Vasile Mircea Popa

Aspecte de combinatorică cu aplicaţii în electrotehnică

Editura Universităţii “Lucian Blaga” din Sibiu
Sibiu, 2009

Aspects of Combinatorics with Applications in Electrotechnics

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
POPA, VASILE MIRCEA
Aspecte de combinatorică cu aplicaţii în electrotehnică / Popa Vasile Mircea. – Sibiu: Editura Universităţii „Lucian Blaga" din Sibiu, 2009
Bibliogr.
ISBN 978-973-739-873-4

621.3

Îngrijire editorială: autorul
Traducere prefaţă: ing. George Vasilca
Tehnoredactare: arh. Silviu Ioan Popa

PREFAŢĂ

Prezenta lucrare a fost elaborată pe parcursul multor ani. Partea de combinatorică a constituit pentru autor o preocupare conexă la activitatea ştiinţifică privind bazele teoretice (fizice) ale electrotehnicii, mai exact, teoria circuitelor electrice. Pană când, prin introducerea noţiunii de receptor dezechilibrat discret m-fazat, aspectele combinatoriale au devenit utile şi necesare pentru analiza acestui concept. Trebuie totuşi să subliniez că unele probleme de combinatorică m-au atras în mod deosebit prin ele însele, prin farmecul lor special. Pentru rezolvarea acestor probleme a fost evident necesară o documentare foarte serioasă folosind literatura de specialitate dar şi o preocupare susţinută pentru o tratare personală a unor aspecte, folosind metode noi. Dacă am reuşit să formulez într-un mod interesant unele chestiuni cunoscute, sau eventual chiar unele chestiuni noi, va rezulta din opiniile specialiştilor care vor citi această carte. În orice caz, punerea problemelor, modul de abordare, notaţiile folosite şi evident întrega redactare a rândurilor următoare aparţin autorului.

Această carte este de fapt o colecţie de articole, din care unele au fost publicate anterior în diverse reviste şi volume. Acest lucru constituie un avantaj pentru cititor, deoarece fiecare capitol al cărţii are în acest fel un caracter independent şi poate fi citit direct. Pe de altă parte, din acest motiv apar inevitabil unele repetări. Totuşi, pentru un cititor interesat de conţinutul cărţii, cea mai bună variantă este citirea cărţii în ordinea firească a capitolelor, aşa cum sunt ele aşezate în carte.

Cartea debutează cu un articol introductiv cu titlul Matematica şi Bazele electrotehnicii, în care se prezintă conexiunile dintre Matematică (în general) şi Bazele electrotehnicii. Cele două părţi ale Bazelor electrotehnicii şi anume Teoria câmpului electromagnetic şi Teoria circuitelor electrice utilizează din plin metode matematice din cele mai dezvoltate, care sunt arătate pe scurt în articol, împreună cu un exemplu de regim tranzitoriu tratat prin metoda rezolvării ecuaţiei diferenţiale şi prin metoda operaţională bazată pe transformata Laplace.

În următoarele două articole se introduc conceptele intitulate aranjamente generalizate şi combinări generalizate. Se dau definiţiile acestor concepte, formule de recurenţă, o metodă de calcul şi aplicaţii. Urmează un articol privind numărarea soluţiilor admisibile ale problemei transporturilor în numere întregi, unde se prezintă modelul matematic şi un algoritm de calcul.

Următoarele patru articole se referă la numărarea bijecţiilor, injecţiilor, funcţiilor şi surjecţiilor între două mulţimi multiple. Se formulează problemele respective, se prezintă pentru fiecare problemă un algoritm de numărare şi aplicaţii.

Urmează un capitol despre mulţimi multiple şi mulţimi ordonate, noţiuni foarte importante şi mult folosite în combinatorică. Se dau definiţiile respective şi se arată modul de calcul al numărului mulţimilor de un anumit tip.

Se tratează în continuare grupările generalizate şi grupările barate generalizate precum şi cazuri speciale ale acestora. Aceste concepte generalizează o serie de noţiuni cunoscute din combinatorică iar denumirile lor sunt introduse de autor. Se prezintă problema grupării obiectelor şi problema distribuirii obiectelor în căsuţe precum şi o metodă de calcul pentru numărul de soluţii ale acestor două probleme (în fond, echivalente), cu aplicaţii. Se indică şi două tabele de generalizare precum şi relaţiile de generalizare respective. De asemenea, se arată în continuare o utilizare combinatorială a polinoamelor lui Newton.

Următoarele trei articole tratează aspecte combinatoriale privind ecuaţia diofantică liniară cu coeficienţi unitari, cu coeficienţi naturali precum şi ecuaţia partiţiilor unui număr natural. Se prezintă aceste ecuaţii şi modul în care putem obţine numărul soluţiilor sau eventual lista soluţiilor.

Pentru anumite cazuri particulare ale grupărilor generalizate şi ale ecuaţiei diofantice liniare există formule şi metode grafice de calcul, care sunt prezentate în următoarele două articole.

În următorul capitol al părţii de combinatorică se prezintă metode pentru calculul numărului grupărilor generalizate în cazul standard (k=n). Autorul a elaborat patru metode de calcul, care sunt expuse detaliat.

În ultimul capitol al părţii de combinatorică sunt prezentate programe de calculator realizate pentru obţinerea numărului soluţiilor, respectiv pentru obţinerea listei soluţiilor la problemele de numărare analizate în această carte. Utilizarea programelor de calculator asigură rezolvarea aplicaţiilor numerice într-un timp mult mai scurt decât metodele "manuale".

În continuare sunt propuse cititorului pentru rezolvare un număr de 261 de probleme urmate de soluţii. Problemele sunt în cea mai mare parte originale şi sunt aplicative la partea teoretică expusă anterior. Pentru problemele preluate din alte lucrări, s-a indicat sursa respectivă în indexul bibliografic pentru probleme.

Urmează partea de aplicaţii în electrotehnică. Aceasta este bazată pe noţiunea de receptor dezechilibrat discret m-fazat, noţiune care de asemenea este introdusă de autor. Articolele care tratează acest subiect sunt scrise atât în limba română cât şi în limba engleză. Se prezintă modelul matematic al receptorului dezechilibrat discret, caracterizarea algebrică a receptoarelor dezechilibrate discrete, metode pentru analiza claselor de dezechilibru ale receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate, precum şi metodele respective tratate pe rând. În încheierea acestei părţi se prezintă analiza asistată de calculator a receptoarelor discrete m-fazate.

Ca anexe ale cărţii sunt prezentate un tabel cu numerele $N = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ pentru n=1,2,...,9 precum şi un tabel care indică unde au mai fost publicate o parte dintre articole.

La sfârşitul cărţii este prezentată bibliografia generală (o bibliografie specifică este prezentată la fiecare articol în parte).

Cartea poate interesa pe matematicieni, pe inginerii specializaţi în teoria circuitelor electrice (prin partea a doua a cărţii), precum şi pe toţi cei pasionaţi de matematica aplicată în general, de combinatorică în special.

Conţinutul lucrării poate fi fără îndoială îmbunătăţit şi completat. Voi fi recunoscător pentru orice observaţie sau sugestie în acest sens, venită de la cititori.

Sibiu, 28 octombrie 2009 Autorul.

FOREWORD

This book has been conceptualized and developed over many years of academic work. The domain of combinatorics has been of special interest to the author as it relates to his scientific research activities in the field of electrotechnics, particularly in the theoretical analysis of electric circuits. Moreover, through the introduction of the concept of m-phased discreet unbalanced load, the methods of the combinatorial mathematics have become not only useful but also necessary to analyze this new theoretical concept. As a personal note, I must point out that I was also attracted to certain topics of combinatorics due to their very own nature and because of the special mathematical beauty they offer. In writing of this book it was necessary not only to conduct extensive research of the literature in a specialized field, but also to focus my attention on treating the subject matter in a very personal way, using original methods and novel approaches where possible. If I succeded or not to formulate some well-known theoretical issues in an interesting way, or do the same on even new subject matters, will result from the opinions of the readers of this book, particularly the specialists in the field. In any case, the formulation of the issues, the scientific approach employed, the notations used throughout the text and obviously the editing of the entire book, are solely those of the author.

This book is in fact a collection of articles, some of which were previously published in various scientific journals and other publications. As such, this is a benefit to the reader because each chapter in the book is fairly independent of the others and as such it can be read directly. On the other hand, this approach inevitably leads to some repetitions in the text. However, for a reader really interested in the book, the best option is to read its content in the natural order of the chapters, as they appear in the book.

The book starts with an introductory article titled ”Mathematics and Bases of Electrotechnics”, which shows the connections between mathematics in general and theoretical bases of electrotechnics. As it is well known, the two major domains of the bases of electrotechnics, namely the electromagnetic field theory and the theory of electric circuits, both use most advanced mathematical methods. Some of these methods are briefly reviewed in the article, together with an example of transient regime solved by using the method of differential equation and the operational method based on Laplace transform.

The following two articles introduce the concepts called generalized arrangements and generalized combinations. The articles offer definitions of these concepts and introduce recurrence formulas, a method of calculation and several applications. The next article addresses the subject matter of counting admissible solutions to the transportation problem in integer numbers, and describes a mathematical model and its algorithm for calculation.

The following four articles relate to the counting of bijections, injections, functions and surjections between two multiple sets. The article formulates critical problems and for each problem presents a counting algorithm followed by applications.

Next chapter deals with multiple sets and ordered sets, which are notions of high importance and much use in the field of combinatorics. Essential definitions are presented, and indications are given on how to calculate the number of sets of a certain type.

Next, the chapters treats generalized groupings and generalized barred groupings as well as special cases thereof. These concepts generalize a number of well known notions from the field of combinatorics, whose definitions and names are introduced by the author. Further down, the problem of grouping objects and the problem of distributing objects in boxes are presented, as well as the method for calculating the number of solutions of these two problems (which in fact are equivalent), followed by applications. The articles concludes by

showing two generalization tables, as well as the associated generalization relations, followed by an example of combinatorial use of Newton polynomials.

The following three articles deal with combinatorial aspects as applied to the linear diophantine equation with unit coefficients, with natural coefficients and the partitions equation of a natural number. Relevant equations are presented, and how one can get the number of solutions, or possibly the list of solutions.

For certain particular cases of generalized groupings and of the linear diophantine equation, there are known formulas and graphical methods of calculation, which are presented in the following two articles.

In the next chapter of the section on combinatorics, several methods for calculating the number of generalized groupings in standard case (k = n) are presented. In this area of research the author has developed four original calculation methods which are presented in great detail.

In the last chapter of the section on combinatorics, several computer software programs are presented which are designed to accurately yield the number of solutions and the list of solutions to the counting problems analyzed in this book. As it is widely accepted, the use of computer software programs leads to solving of numerical applications in a much shorter time than by using manual methods.

To conclude the section on combinatorics, the author has included 261 problems followed by solutions, which are offered to the readers for study and resolution. Most of the problems are of an orignal nature and relate well to the theoretical issues discussed in the book. For problems taken from other publications, the author has indicated the respective sources in the bibliographical index for problems.

The final section of the book discusses applications of combinatorics in the field of electotechnics. Specifically, the applications are based on the concept of the m-phased discreet unbalanced load, notion that is also introduced by the author. Articles dealing with this subject are written both in Romanian and English. Overall, this section presents the mathematical model of the discreet unbalanced load, the algebraic characterization of discreet unbalanced loads, methods for the analysis of unbalanced classes of m-phased discreet unbalanced loads, as well as the respective methods which are treated individually. The end of this section addresses topis related to computer aided analysis of m-phased discreet loads.

As annexes to the book are included a table of numbers $N = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ for n = 1,2 ,..., 9 and a table showing where articles have been previously published.

A general bibliography is attached at the end of the book, while specific bibliographies are included at the end of each article in the book.

This book will be of particular interest to mathematicians and engineers specializing in the theory of electrical circuits, and generally to all other readers captivated by the application of combinatorics to the theory of electrical engineering.

Undoubtedly, the contents of this book can be improved and enriched in the future. As such, I will be grateful for any comments or suggestions received from the readers.

Sibiu, 28 October 2009. The author.

CUPRINS

Prefaţă ... 3
Prefaţă (în limba engleză) ... 5
Cuprins ... 7
Cuprins (în limba engleză) ... 8

ASPECTE DE COMBINATORICĂ ... 9

Matematica şi Bazele electrotehnicii ... 11
Aranjamente generalizate ... 17
Combinări generalizate ... 23
Numărarea soluţiilor admisibile ale problemei transporturilor în numere întregi ... 29
Numărarea bijecţiilor între două mulţimi multiple ... 33
Numărarea injecţiilor între două mulţimi multiple ... 41
Numărarea funcţiilor între două mulţimi multiple ... 47
Numărarea surjecţiilor între două mulţimi multiple ... 53
Mulţimi multiple şi mulţimi ordonate ... 59
Grupări generalizate ... 65
Grupări barate generalizate ... 71
Cazuri speciale ale grupărilor generalizate ... 77
Cazuri speciale ale grupărilor barate generalizate ... 83
O utilizare combinatorială a polinoamelor lui Newton ... 89
Aspecte combinatoriale privind ecuaţia diofantică liniară cu coeficienţi unitari ... 95
Aspecte combinatoriale privind ecuaţia diofantică liniară cu coeficienţi naturali ... 101
Aspecte combinatoriale privind ecuaţia partiţiilor unui număr natural ... 109
Formule pentru cazuri particulare ale grupărilor generalizate şi ale ecuaţiei diofantice liniare ... 115
Metoda grafică pentru cazuri particulare ale grupărilor generalizate şi ale ecuaţiei diofantice liniare ... 125
Metode pentru calculul numărului grupărilor generalizate în cazul standard ... 131
Programe de calculator cu caracter combinatorial ... 147
Probleme ... 155
Soluţii ... 172
Index bibliografic pentru probleme ... 204

APLICAŢII ÎN ELECTROTEHNICĂ ... 205

A Mathematical Model for Unbalanced Classes Analysis of Polyphasic Loads ... 207
The Algebraic Characterization of Discreet Unbalanced Loads ... 209
Methods for Calculating the Number of Discreet Unbalanced Loads ... 211
The Recurrence Method for Calculating the Unbalanced Classes Number of m-Phased Loads ... 213
The Order Reducing Method for Determining the Number of Discreet Unbalanced Loads ... 215
Model matematic al receptorului dezechilibrat discret ... 221
Aspecte algebrice privind receptoarele dezechilibrate discrete m-fazate ... 227
Metode pentru analiza claselor de dezechilibru ale receptoarelor m-fazate ... 231
Metodă recursivă pentru determinarea numărului receptoarelor dezechilibrate discrete ... 235
O metodă de reducere pentru calculul numărului receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate ... 239
Analiza asistată de calculator a receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate ... 243

ANEXE ... 247

Tabel cu numerele $N = G_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)}$ pentru n=1,2,...,9 ... 249

Tabel care indică unde au mai fost publicate o parte dintre articole ... 257
Bibliografie generală ... 259

CONTENTS

Preface (in Romanian) 3
Preface (in English) 5
Contents (in Romanian) 7
Contents (in English) 8

ASPECTS OF COMBINATORICS 9

Mathematics and Bases of Electrotechnics 11
Generalized Arrangements 17
Generalized Combinations 23
Counting Admissible Solutions to the Transportation Problem in Integer Numbers 29
Counting of Bijections Between Two Multiple Sets 33
Counting of Injections Between Two Multiple Sets 41
Counting of Functions Between Two Multiple Sets 47
Counting of Surjections Between Two Multiple Sets 53
Multiple Sets and Ordered Sets 59
Generalized Groupings 65
Generalized Barred Groupings 71
Special Cases of Generalized Groupings 77
Special Cases of Generalized Barred Groupings 83
A Combinatorial Use of Newton Polynomials 89
Combinatorial Aspects Regarding the Linear Diophantine Equation with Unit Coefficients 95
Combinatorial Aspects Regarding the Linear Diophantine Equation with Natural Coefficients 101
Combinatorial Aspects Regarding the Partitions Equation of a Natural Number 109
Formulas for Particular Cases of Generalized Groupings and of Linear Diophantine Equation 115
Graphical Method for Particular Cases of Generalized Groupings and of Linear Diophantine Equation 125
Methods for Calculating the Number of Generalized Groupings in the Standard Case 131
Combinatorial Software Programs 147
Problems 155
Solutions 172
Bibliographic Index for Problems 204

APPLICATIONS IN ELECTOTECHNICS 205

A Mathematical Model for Unbalanced Classes Analysis of Polyphasic Loads 207
The Algebraic Characterization of Discreet Unbalanced Loads 209
Methods for Calculating the Number of Discreet Unbalanced Loads 211
The Recurrence Method for Calculating the Unbalanced Classes Number of m-Phased Loads 213
The Order Reducing Method for Determining the Number of Discreet Unbalanced Loads 215
Mathematical Model for the Discreet Unbalanced Load 221
Algebraic Aspects Regarding the m-Phased Discreet Unbalanced Loads 227
Methods for the Unbalanced Classes Analysis of m-Phased Loads 231
Recursive Method for Determining the Number of Discreet Unbalanced Loads 235
A Reducing Method for Calculating the Number of m-Phased Discreet Unbalanced Loads 239
The Computer-Aided Analysis of m-Phased Discreet Unbalanced Loads 243

ANNEX 247

Table with numbers $N = G_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)}$ for n=1,2,…,9 249

Table showing where articles have been previously published 257
General bibliography 259

ASPECTE DE COMBINATORICĂ

Matematica şi Bazele electrotehnicii

Vasile Mircea Popa

Abstract

This paper presents the connections between mathematics and bases of electrotechnics.

The field theory and the circuit theory is based on the concept of mathematical modelling. To analyse any complex physical system, we must be able to describe the system in terms of an idealised model, that is an interconnection of idealised elements. Although physical elements and physical phenomena may be described only approximately, idealised elements are by definition characterises precisely.

At the end of the paper are presented the conclusions.

2000 Mathematical Subject Classification: 97U99

1. Introducere

Disciplina Bazele electrotehnicii studiază fenomenele electrice şi magnetice din punctul de vedere al aplicaţiilor tehnice [4]. Ea constituie pregătirea teoretică de bază a inginerilor de la toate specializările de profil electric. Teoria utilizată este, în special, teoria macroscopică clasică a electricităţii şi magnetismului, numită şi teoria lui Maxwell. Aceasta este o teorie fenomenologică, dezvoltată fără studierea în detaliu la scară atomică a fenomenelor electromagnetice. Teoria macroscopică a lui Maxwell este în general suficientă pentru aplicaţiile tehnice curente. Pentru aplicaţii tehnice speciale, se utilizează şi teorii mai profunde aparţinând fizicii moderne (teoria relativităţii, teoria cuantică a fenomenelor electromagnetice, fizica corpului solid).

Este deci evident că disciplina Bazele electrotehnicii utilizează cunoştinţe de fizică clasică şi modernă, pe care studenţii trebuie să le cunoască din liceu şi de la cursul de fizică urmat în

anul I de facultate. În acelaşi timp, sunt necesare solide cunoştinţe matematice care se dobândesc în cursul primului an de facultate [3].

Astfel, pentru cursul de Bazele electrotehnicii, sunt utilizate unele capitole de matematică, pe care le enumerăm în continuare.

a) **Analiza matematică** (integrale duble şi triple, integrale curbilinii de speţa I şi a II-a, integrale de suprafaţă de speţa I şi a II-a, formula lui Stokes, formula Gauss-Ostrogradski, ecuaţii diferenţiale, sisteme de ecuaţii diferenţiale, ecuaţii cu derivate parţiale).

b) **Teoria câmpurilor** (câmp scalar, câmp vectorial, operatorii gradient, rotor, divergenţă, derivata substanţială a unei funcţii definite printr-o integrală de suprafaţă de speţa a II-a).

c) **Ecuaţiile fizicii matematice** (ecuaţia lui Laplace, ecuaţia lui Poisson, ecuaţia undelor, ecuaţia lui Helmholtz, problema lui Dirichlet, problema lui Neumann).

d) **Analiza complexă** (reprezentarea unei funcţii sinusoidale printr-un număr complex, proprietăţi).

e) **Serii Fourier** (seria Fourier, integrala Fourier, transformata Fourier).

f) **Calcul operaţional** (transformata Laplace: definiţie, exemple, proprietăţi, aplicaţii).

g) **Funcţii speciale** (funcţiile lui Bessel: definiţie, proprietăţi).

După cum se vede din lista anterioară, este vorba de cunoştinţe serioase de matematici superioare predate studenţilor în anul I de facultate. Este foarte important ca în momentul utilizării noţiunilor de mai sus la Bazele electrotehnicii, ele să fi fost deja studiate de studenţi la cursurile de matematică. Din acest motiv, este necesar ca ele să fie predate la Matematică anterior utilizării la Bazele electrotehnicii (sau în cel mai rău caz, aproximativ în paralel).

În viziunea actuală, Bazele electrotehnicii sunt formate din două părţi mari:

- Teoria câmpului electromagnetic

- Teoria circuitelor electrice.

Vom arăta în continuare în ce măsură Matematica intervine în cele două părţi mari ale Bazelor electrotehnicii. Pentru partea de Teoria circuitelor electrice, vom prezenta un frumos exemplu de utilizare a instrumentului matematic pentru studierea regimului tranzitoriu al unui circuit electric.

2. Teoria câmpului electromagnetic

În teoria fenomenologică, macroscopică, a electromagnetismului, conceptul de câmp electromagnetic este esenţial. El defineşte o formă fizică de existenţă a materiei, relativ distinctă de forma de substanţă. Câmpul electromagnetic există atât în interiorul corpurilor, cât şi în vid. El este constituit din două componente relative şi interdependente: câmpul electric şi câmpul magnetic.

În Teoria câmpului electromagnetic, ca parte a Bazelor electrotehnicii, se pune problema studierii acestui câmp, atât sub aspectul proprietăţilor fizice generale, cât şi (mai ales) al calculului precis al parametrilor lui, legat de diverse dispozitive tehnice, în vederea proiectării

optimale a acelor dispozitive. Pentru calculul câmpului electromagnetic se porneşte de la ecuaţiile lui fundamentale, urmărindu-se obţinerea unor metode de calcul care să conducă în final la rezultate numerice cu precizia necesară [1].

Asupra câmpului electromagnetic se pot formula două categorii de probleme:

a) **probleme de analiză** (calcul sau determinare) a câmpului electromagnetic, la care, fiind date domeniul de existenţă a câmpului, distribuţia spaţio-temporală a surselor câmpului şi celelalte condiţii de unicitate asociate, se cere determinarea perechilor de specii de mărimi de stare macroscopică a câmpului electromagnetic: (E, D) şi (H, B).

b) **probleme de sinteză** a câmpului electromagnetic, la care se presupune cunoscută repartiţia spaţială şi evoluţia în timp a câmpului electromagnetic în domeniul său de definiţie şi se cere determinarea corespunzătoare a surselor câmpului.

Formularea corectă a unei probleme de analiză a câmpului electromagnetic macroscopic presupune, în primul rând, definirea fenomenologiei de bază a problemei, stabilirea modelului ei fenomenologic. Urmează apoi obţinerea unui model matematic de câmp electromagnetic. Acesta poate fi, în principiu, de tip diferenţial, variaţional sau integral. Rezolvarea sa, în vederea obţinerii soluţiei problemei, se poate efectua pe cale analitică sau numerică.

Metodele analitice sunt cele mai riguroase, în domeniile lor de aplicabilitate, dar devin rapid inutilizabile la creşterea complexităţii problemelor.

Metodele numerice s-au impus recent, datorită dezvoltării impetuoase a tehnicii de calcul. Comparativ cu metodele analitice, cele numerice prezintă o arie de aplicabilitate mult mai mare. Ele permit obţinerea unor rezultate cu precizia dorită, pentru problema de câmp abordată.

Reuniunea dintre un model matematic de câmp electromagnetic şi o metodă numerică de rezolvare a acestuia conform unui algoritm programabil, defineşte un model numeric de câmp electromagnetic. Se ajunge astfel la o disciplină de graniţă matematico-inginerească, numită **analiza numerică a câmpului electromagnetic**.

Aceasta ar fi, foarte pe scurt, problematica de bază a Teoriei câmpului electromagnetic. Se observă strânsa legătură dintre Matematică şi această parte a Bazelor electrotehnicii, de foarte mare importanţă în tehnica modernă, având în vedere proiectarea produselor electronice şi a sistemelor de telecomunicaţii.

3. Teoria circuitelor electrice

Această a doua parte din Bazele electrotehnicii foloseşte şi ea din plin metodele matematice pentru soluţionarea problemelor legate de circuitele electrice. Circuitele electrice pot funcţiona în diverse regimuri: de curent continuu, de curent alternativ sinusoidal, în regim nesinusoidal, în regim tranzitoriu. Şi în cadrul Teoriei circuitelor electrice există două categorii de probleme: de analiza circuitelor electrice şi de sinteza circuitelor electrice [2].

Importanţa Teoriei circuitelor electrice este evidentă, având în vedere producerea, transportul şi utilizarea energiei electrice, în toate aspectele ei. Din acest motiv, la predarea cursului de Bazele electrotehnicii se insistă pe acest capitol, atât pe teorie, cât şi pe aplicaţii.

Pentru a exemplifica, după consideraţiile mai generale anterioare, modul în care Matematica este utilizată în Bazele electrotehnicii, vom prezenta în cele ce urmează o problemă de regim tranzitoriu.

Pentru rezolvarea ei, vom utiliza două metode:

- metoda rezolvării ecuaţiei diferenţiale
- metoda operaţională.

Problema este următoarea: la momentul t=0, se aplică o tensiune continuă (E) pe un rezistor legat în serie cu un condensator. Se cere variaţia curentului în circuit. Presupunem că iniţial condensatorul este descărcat (vezi fig. 1).

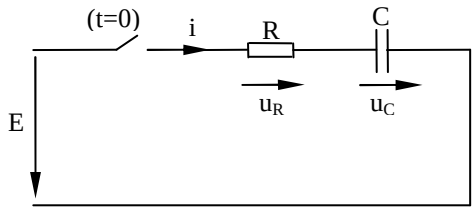


Fig. 1 – Încărcarea unui condensator

a) Metoda rezolvării ecuaţiei diferenţiale

În această metodă se obţine ecuaţia diferenţială a circuitului (funcţia necunoscută fiind curentul), care se rezolvă.

După închiderea întrerupătorului, la momentul t=0, în circuit apare curentul i care produce pe cele două elemente căderile de tensiune u_R şi u_C.

Se poate scrie:

$$u_R + u_C = E \tag{1}$$

unde:

$$u_R = Ri \tag{2}$$

$$u_C = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i dt \tag{3}$$

Deci: $Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i dt = E$

Prin derivare obţinem: $R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$ sau $\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0$

Notăm RC=T (constanta de timp a circuitului) şi ecuaţia devine:

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{T}i = 0 \tag{4}$$

Soluţia generală a ecuaţiei este:

$$i = Ke^{-\frac{t}{T}}, \text{ unde K este constanta de integrare.} \tag{5}$$

Pentru determinarea acestei constante folosim condiţia iniţială:

$$i(0) = \frac{E}{R}$$

deoarece curentul este limitat iniţial numai de rezistenţa în circuit, condensatorul comportându-se ca un scurtcircuit.

Rezultă: $K = \frac{E}{R}$ (6)

Obţinem expresia curentului în circuit:

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{T}} \quad (7)$$

Curentul descreşte exponenţial şi tinde spre 0 după un timp lung, ceea ce din punct de vedere fizic este evident.

b) Metoda operaţională

Această metodă se bazează pe transformata Laplace, deci pe calcul operaţional, dar nu în sensul că se rezolvă ecuaţia diferenţială a circuitului prin această metodă. Întrepătrunderea cu transformata Laplace este chiar mai profundă, folosindu-se aşa numita „schemă operaţională” a circuitului.

Corespunzător circuitului din figura 1, se desenează schema operaţională în care apar impedanţele operaţionale ale celor două elemente, precum şi imaginile în operaţional ale tensiunii aplicate şi ale curentului (vezi fig. 2).

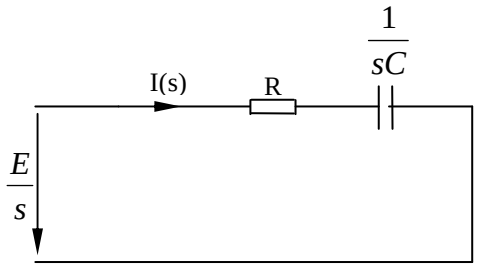


Fig. 2 – Schema operaţională la încărcarea unui condensator

Curentul din schema operaţională rezultă cu legea lui Ohm:

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s}}{R + \frac{1}{sC}} \quad (8)$$

Se poate scrie:

$$I(s) = \frac{\frac{E}{R}}{s + \frac{1}{RC}} \quad (9)$$

Utilizând transformata Laplace inversă obţinem imediat curentul ca funcţie de timp:

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{T}} \tag{10}$$

unde T este constanta de timp a circuitului.

Am obţinut acelaşi rezultat printr-o metodă mai expeditivă şi mai intuitivă.

Exemplul anterior este foarte simplu, dar ilustrează modul în care Matematica este utilizată în Teoria circuitelor electrice. Evident, problemele abordate în această parte a Bazelor electrotehnicii sunt extrem de variate şi de complexe, pentru rezolvarea lor utilizându-se metode matematice dintre cele mai sofisticate.

4. Concluzii

Matematica intervine decisiv în Bazele electrotehnicii, disciplină tehnică fundamentală pentru specializările inginereşti de profil electric. Disciplina Bazele electrotehnicii utilizează cunoştinţe de Matematică şi de Fizică pe care le dezvoltă într-un mod specific, în scopul realizării unui fundament pentru disciplinele electrotehnice de specialitate. Conexiunea este şi inversă, în sensul că multe din problemele ridicate de electrotehnică (şi de tehnică, în general) au servit ca punct de plecare pentru dezvoltarea unor teorii matematice moderne.

Bibliografie

[1] Mîndru, G. ş.a. – *Modelarea numerică a câmpului electromagnetic*, 2 volume, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, 1995

[2] Simion, E. ş.a. – *Teoria circuitelor electrice*, 2 vol., Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, 1996

[3] Stănăşilă, O. – *Matematici speciale*, Editura All, Bucureşti, 2001

[4] Popa, V.M. – *Bazele electrotehnicii*, Editura Alma Mater, Sibiu, 2002

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Aranjamente generalizate

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we propose a generalization of the arrangement notion. We give the generalized arrangements' definition and we present the issue of distributing the objects into cells. We also present two recurrence relations concerning the generalized arrangements.

Next, we develope a general method for the generalized arrangements' calculation: the Newton type polynomials method.

In the end of the paper we propose three applications and we indicate the references.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

După cum se ştie, în aranjamentele simple de m obiecte luate câte k, orice obiect apare cel mult câte o singură dată, pe când în cazul aranjamentelor cu repetiţie orice obiect se poate repeta, de maximum k ori.

În cele ce urmează vom considera cazul general, când obiectul i se poate repeta de maximum l_i ori, unde $1 \leq l_i \leq k$ (i = 1, 2, ..., m) [2].

2 Definiţie

Prin aranjamente generalizate de n obiecte (l_1, l_2, ..., l_m) luate câte k înţelegem submulţimile ordonate conţinând k obiecte diferite sau identice care se pot forma pe rând din cele $n = \sum_{i=1}^{m} l_i$ obiecte (m clase de obiecte, din clasa i având l_i obiecte identice).

Numărul aranjamentelor generalizate de n obiecte (l_1, l_2, ..., l_m) luate câte k se notează cu:

$A^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$.

Trebuie evident să avem: $n \geq k$ şi $1 \leq l_i \leq k$ (i = 1, 2, ..., m).

Prin particularizare se regăsesc aranjamentele simple şi cele cu repetiţie:

$A^k_{n(1,1,...,1)} = A^k_m$ (m = n)

$A^k_{n(k,k,...,k)} = a^k_m$ (mk = n).

Exemplu:

Să considerăm aranjamentele de 7 obiecte (3, 3, 1) luate câte 3.

Obiectele sunt: 1 1 1 2 2 2 3.

Construind sistematic aranjamentele generalizate, obţinem următoarea listă:

1 1 1; 1 1 2; 1 1 3; 1 2 1; 1 2 2; 1 2 3; 1 3 1; 1 3 2; 2 1 1; 2 1 2;
2 1 3; 2 2 1; 2 2 2; 2 2 3; 2 3 1; 2 3 2; 3 1 1; 3 1 2; 3 2 1; 3 2 2.

Lista conţine 20 de poziţii, deci, prin enumerare am obţinut rezultatul:

$A^3_{7(3,3,1)} = 20$.

Cazuri particulare:

Pentru cazurile particulare k=0, k=1, k=n-1 şi k=n, numărul aranjamentelor generalizate se determină cu ajutorul următoarelor formule, care rezultă imediat din definiţie:

$$A^0_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = 1$$

$$A^1_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = m$$

$$A^{n-1}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \frac{n!}{l_1!l_2!...l_m!}$$

$$A^n_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \frac{n!}{l_1!l_2!...l_m!}.$$

3 Problema distribuirilor

Vom considera în continuare o problemă de distribuire a unor obiecte in căsuţe. Căsuţele se consideră distincte şi neordonate (nu are importanţă ordinea obiectelor dintr-o căsuţă). Dacă o căsuţă poate primi cel mult l_i obiecte, vom spune că această căsuţă are capacitatea l_i.

Problemă:

Considerăm k obiecte diferite şi m căsuţe de capacităţi l_i (i = 1, 2, ..., m). Se distribuie cele k obiecte diferite în cele m căsuţe. În câte moduri se poate face distribuirea?

Vom arăta că numărul de distribuiri posibile este:

$A^k_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$.

Să considerăm la început un caz particular cu interpretările conform definiţiei şi problemei distribuirilor:

$A^2_{4(2,1,1)} = 7$.

Definiţie.
Obiecte: 1123

11
12
13
21
31
23
32

Problema distribuirilor.
Obiecte: AB

AB		
A	B	
A		B
B	A	
B		A
	A	B
	B	A

După cum se observă, orice grupare poate fi interpretată ca indicând căsuţele în care se plasează obiectele A,B şi invers, orice distribuire în căsuţe determină o grupare. De exemplu, gruparea 21 arată că obiectul A se plasează în căsuţa 2 iar obiectul B în căsuţa 1, respectiv a patra distribuire în căsuţe conduce la gruparea 21.

Acest principiu se poate evident aplica pe cazul general, deci între submulţimile ordonate şi distribuirile în căsuţe există o corespondenţă biunivocă, ceea ce arată că ele au acelaşi număr de elemente.

4 Formule de recurenţă

Există următoarele formule de recurenţă, ale căror demonstraţii le propunem ca exerciţiu cititorului.

Formula de recurenţă I:

$$A^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = k! \sum_{R} \frac{1}{x_1!x_2!...x_m!}$$

unde $(x_1, x_2, ..., x_m)$ este o soluţie în numere naturale a ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condiţiile: $0 \le x_i \le l_i$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulţimea R a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are |R| termeni (cardinalul mulţimii R).

Ca exemplu de aplicare a formulei, să calculăm numărul $A^{3}_{7(3,3,1)}$.

Ecuaţia $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, cu condiţiile $0 \le x_1 \le 3$, $0 \le x_2 \le 3$, $0 \le x_3 \le 1$
are următoarele soluţii:

(0, 2, 1); (0, 3, 0); (1, 1, 1); (1, 2, 0); (2, 1, 0); (2, 0, 1); (3, 0, 0).

Deci:

$$A^{3}_{7(3,3,1)} = 6\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) = 20.$$

Formula de recurenţă II:

$$A^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = A^{k}_{n-l_m(l_1,l_2,...,l_{m-1})} + C^{1}_{k} \cdot A^{k-1}_{n-l_m(l_1,l_2,...,l_{m-1})} + C^{2}_{k} \cdot A^{k-2}_{n-l_m(l_1,l_2,...,l_{m-1})} + ... + C^{l_m}_{k} \cdot A^{k-l_m}_{n-l_m(l_1,l_2,...,l_{m-1})}$$

Suma din membrul drept are l_m+1 termeni.

Ca exemplu de aplicare a formulei, să calculăm acelaşi număr $A^3_{7(3,3,1)}$.

Obţinem:

$$A^3_{7(3,3,1)} = A^3_{6(3,3)} + C^1_3 \cdot A^2_{6(3,3)}$$

Utilizând una din metodele de calcul expuse în prezentul articol, obţinem:

$$A^3_{6(3,3)} = 8 \ ; \ A^2_{6(3,3)} = 4$$

Deci: $A^3_{7(3,3,1)} = 8 + 3 \cdot 4 = 20$.

5 Metoda polinoamelor de tip Newton

În continuare vom dezvolta o metodă generală pentru calculul aranjamentelor generalizate (metoda polinoamelor de tip Newton [3], [4]).

Vom considera la început un caz particular, respectiv calculul numărului $A^3_{5(3,2)}$. Prin urmare, trebuie să calculăm în câte moduri se pot distribui trei obiecte diferite în două căsuţe de capacităţi trei respectiv doi. La fiecare distribuire a obiectelor în căsuţe rămân două locuri necompletate. Să introducem o clasă de obiecte fictive, având două astfel de obiecte, astfel încât la fiecare distribuire a obiectelor, căsuţele să fie complet ocupate. Aceste obiecte fictive corespund „golurilor" sau „lipsurilor" din căsuţe la o distribuire a celor trei obiecte diferite. De asemenea, să presupunem la început că fiecare căsuţă poate primi cinci obiecte. Atunci, primul obiect se poate plasa în prima căsuţă sau în a doua căsuţă. Acestor posibilităţi de distribuire a primului obiect le putem ataşa polinomul simetric şi omogen de două nedeterminate:

$$P_1 = y_1 + y_2$$

La fel, al doilea obiect se poate plasa în prima sau în a doua căsuţă. Scriem polinomul ataşat:

$$P_1 = y_1 + y_2$$

Fiecărei distribuiri a primului obiect i se poate ataşa o distribuire a celui de-al doilea obiect, totalitatea distribuirilor care rezultă reprezentându-se prin produsul celor două polinoame:

$$P_1^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2$$

Al treilea obiect se poate de asemenea plasa în prima sau a doua căsuţă, polinomul ataşat fiind:

$$P_1 = y_1 + y_2$$

Distribuirilor celor trei obiecte distincte le corespunde polinomul:

$$P_1^3 = y_1^3 + y_2^3 + 3y_1^2y_2 + 3y_1y_2^2$$

Cele două obiecte identice („golurile") se pot distribui ambele în prima căsuţă, ambele în a doua căsuţă sau una în prima şi cealaltă în a doua căsuţă. Polinomul ataşat va fi:

$$P_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_1y_2$$

Distribuirilor celor cinci obiecte le corespunde polinomul:

$$P_1^3 \cdot P_2 = y_1^5 + 4y_1^4y_2 + 7y_1^3y_2^2 + 7y_1^2y_2^3 + 4y_1y_2^4 + y_2^5$$

Exponentul unei nedeterminate arată câte obiecte sunt în căsuţa reprezentată de nedeterminata respectivă. Coeficientul unui monom arată de câte ori apare el în polinomul final, deci câte distribuiri de tipul respectiv sunt posibile. În cazul nostru, prima căsuţă poate primi maximum trei obiecte iar a doua maximum două obiecte, deci distribuirile sunt de tipul $y_1^3y_2^2$.

Deci, rezultă: $A^3_{5(3,2)} = 7$.

O simplificare considerabilă a calculelor se poate face considerând reprezentarea polinoamelor simetrice şi omogene de felul celor de mai sus prin sumele nedeterminatelor de aceeaşi putere (relaţii de tip Newton, [1]).

Astfel, notând:

$$x_1 = y_1 + y_2$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2$$

avem:

$$P_1 = x_1$$
$$P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right)$$
$$P = P_1^3 \cdot P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^5 + x_1^3 x_2\right)$$
$$P = \frac{1}{2}\left[\left(y_1 + y_2\right)^5 + \left(y_1 + y_2\right)^3 \cdot \left(y_1^2 + y_2^2\right)\right]$$

Cu teorema multinomului [5] extragem coeficientului monomului $y_1^3 y_2^2$:

$$N = \frac{1}{2}\left[\frac{5!}{3!2!} + \frac{3!}{1!2!} + \frac{3!}{3!0!}\right] = 7$$

Metoda expusă se poate aplica evident pe cazul general. Deci pentru calculul aranjamentelor generalizate:

$$A^k_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$$

se procedează astfel:

a) Se calculează polinomul:

$$P = P_1^k \cdot P_{n-k}$$

unde:

$$P_1 = x_1 \text{ iar } P_{n-k} = P_{n-k}\left(x_1, x_2, ..., x_{n-k}\right)$$

este polinomul de tip Newton de grad n-k în n-k nedeterminate.

Deci, $P = P\left(x_1, x_2, ..., x_{n-k}\right)$ va avea gradul n şi n-k nedeterminate (n > k).

b) Se înlocuieşte în P:

$$x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$$
$$\text{……...……}$$
$$x_{n-k} = y_1^{n-k} + y_2^{n-k} + ... + y_m^{n-k}$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Primele patru polinoame de tip Newton sunt:

$$P_1 = x_1$$
$$P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right)$$
$$P_3 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1 x_2 + 2x_3\right)$$
$$P_4 = \frac{1}{24}\left(x_1^4 + 6x_2^2 x_2 + 8x_1 x_3 + 3x_2^2 + 6x_4\right)$$

Menţionăm, fără a insista aici asupra acestui aspect, că aplicând metoda de numărare Pòlya – de Bruijn [5] în cazul problemei noastre, se obţine în fond metoda de calcul expusă mai sus. Polinoamele de tip Newton apar ca polinoame indicatoare de cicluri pentru grupurile simetrice de permutări.

În cazul particular k = n se obţin permutările generalizate:

$$A^{n}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = P_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \frac{n!}{l_1!l_2!...l_m!}$$

6 Aplicaţii

Ca aplicaţii vom considera trei probleme.

a) Câte numere de patru cifre se pot forma cu cifrele 1,2,3 dacă în fiecare astfel de număr cifra 1 se poate utiliza de cel mult 3 ori, cifra 2 de cel mult două ori şi cifra 3 de cel mult două ori?

b) Opt elevi urmează a fi cazaţi într-un cămin în trei camere având patru, trei şi respectiv trei paturi. În câte moduri se poate face distribuirea elevilor în camere?

c) Utilizând metoda polinoamelor de tip Newton, să se recalculeze $A^{3}_{7(3,3,1)}$.

Aplicând cele expuse mai sus, se obţin rezultatele:

a) $A^{4}_{7(3,2,2)} = 62$

b) $A^{8}_{10(4,3,3)} = 2660$

c) $A^{3}_{7(3,3,1)} = 20$

Bibliografie

[1] D. E. Knuth, *Tratat de programarea calculatoarelor, vol. I*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

[2] V. M. Popa, *Unele generalizări în combinatorică*, Buletinul Ştiinţific al Institutului de Învăţământ Superior Sibiu, vol. III, Sibiu, 1980, pag. 33-39.

[3] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81.

[4] V. M. Popa, *Matematică aplicată*, Sibiu, 2005.

[5] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică,Bucureşti, 1972

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
e-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro

Combinări generalizate

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we propose a generalization of the combination notion. We give the generalized combinations' definition and we present the issue of distributing the objects into cells. We also present the complementar combinations' formula and two recurrence relations concerning the generalized combinations.

Next, we develope a general method for the generalized combinations' calculation: the Newton type polynomials method.

In the end of the paper we propose three applications and we indicate the references.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

După cum se ştie, în combinările simple de m obiecte luate câte k, orice obiect apare cel mult câte o singură dată, pe când în cazul combinărilor cu repetiţie orice obiect se poate repeta, de maximum k ori.

În cele ce urmează vom considera cazul general, când obiectul i se poate repeta de maximum l_i ori, unde $1 \le l_i \le k$ (i = 1, 2, ..., m) [2].

2 Definiţie

Prin combinări generalizate de n obiecte (l_1, l_2, ..., l_m) luate câte k înţelegem submulţimile conţinând k obiecte diferite sau identice care se pot forma pe rând din cele $n = \sum_{i=1}^{m} l_i$ obiecte (m clase de obiecte, din clasa i având l_i obiecte identice).O astfel de mulţime,care poate conţine şi elemente identice,se numeşte mulţime multiplă.

Numărul combinărilor generalizate de n obiecte (l_1, l_2, ..., l_m) luate câte k se notează cu:

$C^k_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$.

Trebuie evident să avem: $n \ge k$ şi $1 \le l_i \le k$ (i = 1, 2, ..., m).

Prin particularizare se regăsesc combinările simple şi cele cu repetiţie:

$C^k_{n(1,1,...,1)} = C^k_m$ (m = n)

$C^k_{n(k,k,...,k)} = c^k_m$ (mk = n).

Exemplu:
Să considerăm combinările de 7 obiecte (3, 3, 1) luate câte 3.
Obiectele sunt: 1 1 1 2 2 2 3.
Construind sistematic combinările generalizate, obţinem următoarea listă:

1 1 1; 1 1 2; 1 1 3; 1 2 2; 1 2 3; 2 2 2; 2 2 3

Lista conţine 7 poziţii, deci, prin enumerare am obţinut rezultatul:

$$C^3_{7(3,3,1)} = 7.$$

Cazuri particulare:
Pentru cazurile particulare k=0, k=1, k=n-1 şi k=n, numărul combinărilor generalizate se determină cu ajutorul următoarelor formule, care rezultă imediat din definiţie:

$$C^0_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = 1$$
$$C^1_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = m$$
$$C^{n-1}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = m$$
$$C^n_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = 1.$$

Deci, patru formule simple în care valorile indicilor l_1, l_2, ..., l_m nu intervin.

3 Problema distribuirilor

Vom considera în continuare o problemă de distribuire a unor obiecte în căsuţe. Căsuţele se consideră distincte şi neordonate (nu are importanţă ordinea obiectelor dintr-o căsuţă). Dacă o căsuţă poate primi cel mult l_i obiecte, vom spune că această căsuţă are capacitatea l_i.

Problemă:
Considerăm k obiecte identice şi m căsuţe de capacităţi l_i (i = 1, 2, ..., m). Se distribuie cele k obiecte identice în cele m căsuţe. În câte moduri se poate face distribuirea?
Vom arăta că numărul de distribuiri posibile este:

$$C^k_{n(l_1,l_2,...,l_m)}.$$

Să considerăm la început un caz particular cu interpretările conform definiţiei şi problemei distribuirilor:

$$C^2_{4(2,1,1)} = 4.$$

Aceste interpretări, corespunzătoare definiţiei, respectiv problemei distribuirilor, rezultă din tabelele următoare.

Definiţie.
Obiecte: 1123

11
12
13
23

Problema distribuirilor.
Obiecte: AA

AA		
A	A	
A		A
	A	A

După cum se observă, orice grupare poate fi interpretată ca indicând căsuţele în care se plasează obiectele A,A şi invers, orice distribuire în căsuţe determină o grupare. De exemplu, gruparea 12 arată că obiectul A se plasează în căsuţa 1 iar celălalt obiect A în căsuţa 2, respectiv a patra distribuire în căsuţe conduce la gruparea 23.

Acest principiu se poate evident aplica pe cazul general, deci între submulţimi şi distribuirile în căsuţe există o corespondenţă biunivocă, ceea ce arată că ele au acelaşi număr de elemente.

4 Formula combinărilor complementare

Există următoarea formulă,care rezultă imediat din definiţia combinărilor generalizate:

$$C^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = C^{n-k}_{n\ (l_1,l_2,...,l_m)}$$

Această formulă o vom numi formula combinărilor generalizate complementare. Ea generalizează cunoscuta formulă a combinărilor complementare:

$$C^{k}_{m} = C^{m-k}_{m}$$

Într-adevăr,putem scrie:

$$C^{k}_{m} = C^{k}_{n(1,1,...,1)} = C^{n-k}_{n\ (1,1,...,1)} = C^{n-k}_{m} = C^{m-k}_{m} \qquad \text{(avem n = m).}$$

Generalizarea este astfel probată.

5 Formule de recurenţă

Există următoarele formule de recurenţă, ale căror demonstraţii le propunem ca exerciţiu cititorului.

Formula de recurenţă I:

$$C^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \sum_{R} 1 = |R|$$

unde R este mulţimea soluţiilor (x_1, x_2, ..., x_m) în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condiţiile: $0 \le x_i \le l_i$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulţimea R a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are |R| termeni (cardinalul mulţimii R) şi evident, valoarea |R|.

Deci, numărul combinărilor generalizate este egal cu numărul soluţiilor cu numere naturale ale unei ecuaţii diofantice liniare, cu coeficienţi unitari şi cu limitări superioare ale necunoscutelor.

Ca exemplu de aplicare a formulei, să calculăm numărul $C^{3}_{7(3,3,1)}$.

Ecuaţia $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, cu condiţiile $0 \le x_1 \le 3$, $0 \le x_2 \le 3$, $0 \le x_3 \le 1$
are următoarele soluţii:

(0, 2, 1); (0, 3, 0); (1, 1, 1); (1, 2, 0); (2, 0, 1); (2, 1, 0); (3, 0, 0).

Deci:

$$C^{3}_{7(3,3,1)} = 7 .$$

Formula de recurenţă II:

$$C^{k}_{n(1_1,1_2,...,1_m)} = C^{k}_{n-l_m(1_1,1_2,...,1_{m-1})} + C^{k-1}_{n-l_m(1_1,1_2,...,1_{m-1})} + C^{k-2}_{n-l_m(1_1,1_2,...,1_{m-1})} + ... + C^{k-l_m}_{n-l_m(1_1,1_2,...,1_{m-1})}$$

Suma din membrul drept are l_m+1 termeni.

Observăm că această formulă generalizează cunoscuta relaţie valabilă pentru combinările simple:

$$C^{k}_{m} = C^{k}_{m-1} + C^{k-1}_{m-1}$$

Pentru aceasta,particularizăm $l_1 = l_2 = ... = l_m = 1$ (deci m = n) în formula de recurenţă II a combinărilor generalizate.

Ca exemplu de aplicare a formulei, să calculăm acelaşi număr $C^{3}_{7(3,3,1)}$.

Obţinem:

$$C^{3}_{7(3,3,1)} = C^{3}_{6(3,3)} + C^{2}_{6(3,3)}$$

Utilizând una din metodele de calcul expuse în prezentul articol, obţinem:

$$C^{3}_{6(3,3)} = 4 \ ; \ C^{2}_{6(3,3)} = 3$$

Deci: $C^{3}_{7(3,3,1)} = 4 + 3 = 7$.

6 Metoda polinoamelor de tip Newton

În continuare vom dezvolta o metodă generală pentru calculul combinărilor generalizate (metoda polinoamelor de tip Newton [3], [4]).

Vom considera la început un caz particular, respectiv calculul numărului $C^{3}_{5(3,2)}$. Prin urmare, trebuie să calculăm în câte moduri se pot distribui trei obiecte identice în două căsuţe de capacităţi trei respectiv doi. La fiecare distribuire a obiectelor în căsuţe rămân două locuri necompletate. Să introducem o clasă de obiecte fictive, având două astfel de obiecte, astfel încât la fiecare distribuire a obiectelor, căsuţele să fie complet ocupate. Aceste obiecte fictive corespund „golurilor” sau „lipsurilor” din căsuţe la o distribuire a celor trei obiecte identice. De asemenea, să presupunem la început că fiecare căsuţă poate primi cinci obiecte.

Cele trei obiecte identice se pot distribui toate în prima căsuţă,toate în a doua căsuţă,două în prima căsuţă şi una în a doua casuţă sau una în prima căsuţă şi două în a doua căsuţă.Acestor posibilităţi de distribuire a celor trei obiecte le putem ataşa polinomul simetric şi omogen de două nedeterminate:

$$P_3 = y_1^3 + y_2^3 + y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2$$

Cele două obiecte fictive („golurile”) se pot distribui ambele în prima căsuţă, ambele în a doua căsuţă sau una în prima şi cealaltă în a doua căsuţă. Polinomul ataşat va fi:

$$P_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2$$

Distribuirilor celor cinci obiecte le corespunde polinomul:

$$P_3 \cdot P_2 = y_1^5 + 2y_1^4 y_2 + 3y_1^3 y_2^2 + 3y_1^2 y_2^3 + 2y_1 y_2^4 + y_2^5$$

Exponentul unei nedeterminate arată câte obiecte sunt în căsuţa reprezentată de nedeterminata respectivă. Coeficientul unui monom arată de câte ori apare el în polinomul final, deci câte distribuiri de tipul respectiv sunt posibile. În cazul nostru, prima căsuţă poate primi maximum trei obiecte iar a doua maximum două obiecte, deci distribuirile sunt de tipul $y_1^3 y_2^2$.

Deci, rezultă: $C^3_{5(3,2)} = 3$.

O simplificare considerabilă a calculelor se poate face considerând reprezentarea polinoamelor simetrice şi omogene de felul celor de mai sus prin sumele nedeterminatelor de aceeaşi putere (relaţii de tip Newton, [1]).

Astfel, notând:

$$x_1 = y_1 + y_2$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2$$
$$x_3 = y_1^3 + y_2^3$$

avem:

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right)$$
$$P_3 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3\right)$$
$$P = P_3 \cdot P_2 = \frac{1}{12}\left(x_1^5 + 4x_1^3x_2 + 2x_1^2x_3 + 3x_1x_2^2 + 2x_2x_3\right)$$
$$P = \frac{1}{12}\left[(y_1 + y_2)^5 + 4(y_1 + y_2)^3 \cdot \left(y_1^2 + y_2^2\right) + 2(y_1 + y_2)^2 \cdot \left(y_1^3 + y_2^3\right) + \right.$$
$$\left. + 3(y_1 + y_2)\left(y_1^2 + y_2^2\right)^2 + 2\left(y_1^2 + y_2^2\right) \cdot \left(y_1^3 + y_2^3\right)\right]$$

Cu teorema multinomului [5] extragem coeficientului monomului $y_1^3y_2^2$:

$$N = \frac{1}{12}\left[\frac{5!}{3!2!} + 4\left(\frac{3!}{1!2!} + \frac{3!}{3!0!}\right) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1\right] = 3$$

Metoda expusă se poate aplica evident pe cazul general. Deci pentru calculul aranjamentelor generalizate $C^k_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$ se procedează astfel:

a) Se calculează polinomul:

$P = P_k \cdot P_{n-k}$, unde:

$P_k = P_k(x_1, x_2, ..., x_k)$

este polinomul de tip Newton de grad k în k nedeterminate, iar:

$P_{n-k} = P_{n-k}(x_1, x_2, ..., x_{n-k})$

este polinomul de tip Newton de grad n-k în n-k nedeterminate.

Deci, $P = P(x_1, x_2, ..., x_\lambda)$ va avea gradul n şi λ nedeterminate, unde λ = max(k, n-k).

b) Se înlocuieşte în P:

$$x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$$
$$\text{……...……}$$
$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1}y_2^{l_2}...y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Primele patru polinoame de tip Newton sunt:

$$P_1 = x_1$$
$$P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right)$$

$$P_3 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3\right)$$

$$P_4 = \frac{1}{24}\left(x_1^4 + 6x_2^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4\right)$$

Menţionăm, fără a insista aici asupra acestui aspect, că aplicând metoda de numărare Pòlya – de Bruijn [5] în cazul problemei noastre, se obţine în fond metoda de calcul expusă mai sus. Polinoamele de tip Newton apar ca polinoame indicatoare de cicluri pentru grupurile simetrice de permutări.

7 Aplicaţii

Ca aplicaţii vom considera trei probleme.

a) Câte mulţimi multiple de patru cifre se pot forma cu cifrele 1,2,3 dacă în fiecare astfel de mulţime cifra 1 se poate utiliza de cel mult 3 ori, cifra 2 de cel mult două ori şi cifra 3 de cel mult două ori?

b) Patru mingi de tenis identice urmează a fi introduse în trei cutii distincte având capacitatea de a cuprinde trei, trei şi respectiv două mingi. În câte moduri se poate face distribuirea mingilor în cutii?

c) Utilizând metoda polinoamelor de tip Newton, să se recalculeze $C^3_{7(3,3,1)}$.

Aplicând cele expuse mai sus, se obţin rezultatele:

a) $C^4_{7(3,2,2)} = 8$

b) $C^4_{8(3,3,2)} = 10$

c) $C^3_{7(3,3,1)} = 7$

Bibliografie

[1] D. E. Knuth, *Tratat de programarea calculatoarelor, vol. I*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.
[2] V. M. Popa, *Unele generalizări în combinatorică*, Buletinul Ştiinţific al Institutului de Învăţământ Superior Sibiu, vol. III, Sibiu, 1980, pag. 33-39.
[3] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81.
[4] V. M. Popa, *Matematică aplicată*, Sibiu, 2005.
[5] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică,Bucureşti, 1972

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Numărarea soluţiilor admisibile ale problemei transporturilor în numere întregi

Vasile Mircea Popa

Abstract

The paper proposes a method for calculating the number of admitted solutions of the transportation problem in integer numbers.The mathematical model is the bijection between two multiple sets,briefly presented.

We give a algorithm for this number calculation. We also present a observation and a application.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 90C05

1 Introducere

În problema transporturilor din programarea liniară se consideră μ centre de aprovizionare, centrul i având o cantitate λ_i dintr-o marfă oarecare ($i = 1, 2, ..., \mu$) precum şi m centre de consum,centrul j solicitând o cantitate l_j din marfa respectivă ($j = 1, 2, ..., m$). Se pune problema transportării mărfii din centrele de aprovizionare în centrele de consum astfel încât costul total al transportului,exprimat printr-o funcţie obiectiv liniară,să fie minim. Presupunând problema echilibrată, adică $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = \sum_{j=1}^{m} l_j = n$ şi notând cu x_{ij} cantitatea de marfă care se transportă din centrul de aprovizionare i în centrul de consum j, se numeşte soluţie admisibilă a problemei orice soluţie a sistemului de ecuaţii:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \lambda_i; \quad \sum_{i=1}^{\mu} x_{ij} = l_j; \quad \lambda_i, l_j > 0; \quad x_{ij} \geq 0. \tag{1}$$

Sistemul are μm necunoscute şi $\mu + m - 1$ ecuaţii independente (datorită condiţiei de echilibru) [1].

În continuare presupunem că numerele x_{ij} sunt naturale, iar numerele λ_i, l_j sunt naturale, strict pozitive. În acest caz, numărul soluţiilor sistemului (1) respectiv numărul soluţiilor admisibile ale problemei transporturilor în numere întregi (naturale) este finit, iar determinarea acestui număr este o problemă combinatorială echivalentă cu problema distribuirii a n obiecte (μ clase de obiecte, clasa i conţinând λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$) în m căsuţe de capacităţi l_j, cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$ (a se vedea [3]).

Notăm acest număr astfel: $N = G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$.

2 Modelul matematic

Modelul matematic al problemei enunţate mai sus este numărarea bijecţiilor între două mulţimi multiple [3]. Expunem aici pe scurt acest model.

Se consideră două mulţimi finite X şi Y având acelaşi număr n de elemente precum şi mulţimea B(X,Y) a bijecţiilor f definite pe X cu valori în Y. Se consideră o relaţie de echivalenţă (ρ_1) definită pe mulţimea X, care determină o partiţie a mulţimii X în μ clase de echivalenţă X_i, conţinînd cîte λ_i elemente ($i = 1, 2, ..., \mu$). De asemenea, se consideră o relaţie de echivalenţă (ρ_2) definită pe mulţimea Y, care determină o partiţie a mulţimii Y în m clase de echivalenţă Y_j, conţinând câte l_j elemente ($j = 1, 2, ..., m$).Elementele unei clase de echivalenţă vor fi denumite echivalente sau identice.În acest fel, mulţimile X şi Y devin mulţimi multiple, adică mulţimi în care elementele se pot repeta.Vom considera în continuare un grup G de permutări al mulţimii X şi anume produsul simplu al grupurilor simetrice de permutări ale elementelor claselor de echivalenţă din X [2].Prin permutările acestui grup orice element x al mulţimii X este transformat într-un element care aparţine aceleiaşi clase de echivalenţă ca şi x.Analog, considerăm şi grupul H de permutări al mulţimii Y. În sfârşit, pe baza celor două relaţii de echivalenţă anterioare se defineşte o relaţie de echivalenţă ρ pe mulţimea B(X,Y), în felul următor: $f_1 \sim f_2$ dacă există $\alpha \in G$ şi $\beta \in H$ astfel încât $f_2 = \beta f_1 \alpha$. Afirmaţia că relaţia astfel definită este o relaţie de echivalenţă este demonstrată în lucrarea [3].

Această relaţie de echivalenţă determină o partiţie a mulţimii bijecţiilor B(X,Y) în clase de echivalenţă.

Numărul acestor clase de echivalenţă se notează astfel:

$$|B(X, Y)/\rho| = G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}.$$

Pentru prezentarea completă a modelului matematic, a se vedea lucrarea [3].

3 Algoritm de calcul

Pentru calculul numărului:

$$N = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$$

putem utiliza algoritmul dedus în [3] şi pe care îl reproducem în continuare:

a) Se calculează polinomul:

$$P = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot ... \cdot P_{\lambda_\mu},$$

unde $P_{\lambda_i} = P_{\lambda_i}(x_1, x_2, ..., x_{\lambda_i})$ este polinomul de tip Newton, de grad λ_i, în λ_i nedeterminate.

Deci, $P = P(x_1, x_2, ..., x_\lambda)$ va avea gradul $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$ şi λ nedeterminate, unde $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$.

b) Se înlocuieşte în P:

$$x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$$
$$\aleph \aleph \aleph \aleph \aleph \aleph \aleph \aleph$$
$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda.$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Polinomul general de tip Newton are forma:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+...+nk_n=n \\ k_1, k_2, ..., k_n \geq 0}} \frac{1}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! ... n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}.$$

Aplicând formula generală de mai sus se obţin uşor primele patru polinoame de tip Newton:

$$P_1 = x_1$$
$$P_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$$
$$P_3 = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$$
$$P_4 = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_2^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4)$$

Algoritmul expus mai sus coincide cu metoda de numărare Pólya – de Bruijn aplicată în cazul problemei noastre [2].

4 Observaţie

Mai remarcăm că numărul N reprezintă şi numărul matricilor cu μ linii şi m coloane formate cu numere naturale, în care sumele liniilor şi coloanelor sunt impuse:

$$\begin{array}{c|cccc} n & l_1 & l_2 & K & l_m \\ \hline \lambda_1 & x_{11} & x_{12} & \Lambda & x_{1m} \\ \lambda_2 & x_{21} & x_{22} & \Lambda & x_{2m} \\ M & M & M & M & M \\ \lambda_\mu & x_{\mu 1} & x_{\mu 2} & \Lambda & x_{\mu m} \end{array} \qquad (2)$$

5 Aplicaţie

Ca aplicaţie, propunem cititorului să verifice prin calcul egalităţile:

$$G_{6(2,2,1,1)}^{6(2,1,1,1,1)} = 102\,; \quad G_{7(3,1,1,1,1)}^{7(3,2,1,1)} = 114$$

şi să formuleze problemele corespunzătoare de numărare a soluţiilor sistemului (1), respectiv a matricilor (2).

Bibliografie

[1] M. Maliţa, C. Zidăroiu, *Matematica organizării*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1971

[2] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică,Bucureşti, 1972

[3] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81

[4] V. M. Popa, *Matematică aplicată*, Sibiu, 2005

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Numărarea bijecţiilor între două mulţimi multiple

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we define the bijections between two multiple sets and we calculate the number of this bijections using the Newton type polynomials method. We also present a recurrence formula for the Newton type plynomials and an applications. At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1. Introducere

O mulţime multiplă este o mulţime pe care s-a definit o relaţie de echivalenţă. Relaţia de echivalenţă determină o partiţie a mulţimii în clase de echivalenţă, elementele fiecărei clase de echivalenţă fiind denumite echivalente (sau identice). Se mai poate spune că o mulţime multiplă este o mulţime în care elementele se pot repeta. De exemplu, $A = \{a, a, a, b, b, c\}$.

În prezenta lucrare, vom defini bijecţiile între două mulţimi multiple şi vom determina numărul acestor bijecţii.

2. Definirea bijecţiilor între două mulţimi multiple

Considerăm două mulţimi finite X şi Y având $|X| = n$, respectiv $|Y| = n$ elemente, precum şi mulţimea bijecţiilor $f : X \to Y$, mulţime pe care o notăm $B(X, Y)$.

Să considerăm acum o relaţie de echivalenţă (ρ_1) definită pe mulţimea X, care determină o partiţie a mulţimii X în μ clase de echivalenţă X_i, conţinând câte λ_i elemente, adică $|X_i| = \lambda_i$, ($i = 1, 2, ..., \mu$). Elementele unei clase de echivalenţă vor fi denumite echivalente sau identice. Asemănător, considerăm o relaţie de echivalenţă (ρ_2) definită pe mulţimea Y, care determină o partiţie a mulţimii Y în m clase de echivalenţă Y_j, conţinând câte l_j elemente,

adică $\left|Y_j\right| = l_j$, $(j = 1, 2, ..., m)$. În acest fel, mulţimile X şi Y devin mulţimi multiple, adică mulţimi în care elementele se pot repeta. Utilizând această terminologie, putem spune că mulţimea X conţine μ elemente distincte, elementul i repetându-se de λ_i ori $(i = 1,2,...,\mu)$. Asemănător, pentru mulţimea Y.

Vom considera în continuare un grup G de permutări al mulţimii X şi anume produsul simplu al grupurilor simetrice de permutări ale elementelor claselor de echivalenţă din X [1]. Acest grup se notează astfel: $G = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times ... \times S_{\lambda_\mu}$ şi se defineşte în modul următor: pentru orice $\alpha \in G$, $\alpha_i \in S_{\lambda_i}$, $x \in X_i$, avem: $\alpha(x) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_\mu)(x) = \alpha_i(x)$, $(i = 1, 2, ..., \mu)$.

Definiţia este consistentă. Într-adevăr, deoarece G este o submulţime finită a lui S_k, pentru ca G să fie un grup de permutări al mulţimi X (subgrup al grupului simetric S_k), este suficient să verificăm că pentru orice $\alpha, \alpha' \in G \Rightarrow \alpha\alpha' \in G$ (am notat cu $\alpha\alpha'$ compunerea permutărilor α şi α'). Fie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_\mu)$ şi $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_i, ..., \alpha'_\mu)$. Pentru orice $x \in X_i$, avem conform definiţiei: $\alpha\alpha'(x) = \alpha(\alpha'(x)) = \alpha(\alpha'_i(x)) = \alpha_i(\alpha'_i(x)) = \alpha_i\alpha'_i(x)$. Se obţine deci: $\alpha\alpha' = (\alpha_1\alpha'_1, \alpha_2\alpha'_2, ..., \alpha_i\alpha'_i, ..., \alpha_\mu\alpha'_\mu)$ şi se observă că $\alpha\alpha' \in G$.

Analog, considerăm şi grupul H de permutări ale mulţimii Y: $H = S_{l_1} \times S_{l_2} \times ... \times S_{l_m}$.

Se poate defini o relaţie de echivalenţă (ρ) pe mulţimea bijecţiilor $B(X, Y)$, în modul următor: $f_1 \sim f_2$ dacă există $\alpha \in G$ şi $\beta \in H$ astfel încât $f_2 = \beta f_1 \alpha$. Să demonstrăm că relaţia astfel definită este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea bijecţiilor $f : X \to Y$, în raport cu grupurile G şi H de permutări. Relaţia este reflexivă: $f \sim f$, deoarece $f = \varepsilon_2 f \varepsilon_1$, unde $\varepsilon_1 \in G$ şi $\varepsilon_2 \in H$ sunt permutările identice din cele două grupuri de permutări. Relaţia este simetrică: $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1$. Într-adevăr, $f_2 = \beta f_1 \alpha$ conduce la $f_1 = \beta^{-1} f_2 \alpha^{-1}$, unde $\alpha^{-1} \in G$ şi $\beta^{-1} \in H$, ceea ce probează afirmaţia. Relaţia este tranzitivă: $f_1 \sim f_2$ şi $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3$. Într-adevăr, din $f_2 = \beta f_1 \alpha$ şi $f_3 = \beta' f_2 \alpha'$ rezultă: $f_3 = \beta'\beta f_1 \alpha\alpha' = \beta'' f_1 \alpha''$, unde $\beta'\beta = \beta'' \in H$ şi $\alpha\alpha' = \alpha'' \in G$.

Relaţia (ρ) de echivalenţă definită mai sus determină o partiţie a mulţimii $B(X, Y)$ în clase de echivalenţă. Reprezentanţii claselor de echivalenţă se numesc bijecţii între cele două mulţimi multiple.

Numărul acestor clase de echivalenţă se notează astfel: $\left|B(X, Y)/\rho\right| = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$.

Se observă că problema expusă mai sus este echivalentă cu o problemă de distribuire a unor obiecte în căsuţe distincte, neordonate (nu are importanţă ordinea obiectelor în căsuţe). Considerăm n obiecte (μ clase de obiecte, clasa i conţinând λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$) şi m căsuţe de capacităţi l_j, cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$. Se distribuie cele n obiecte în cele m căsuţe. Numărul de distribuiri posibile este $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$. În simbolul general anterior, în cele două paranteze apar partiţii ale numărului natural n. Ordinea indicilor din paranteze nu are importanţă. Vom prefera să notăm atât indicii de jos cât şi cei de sus în ordinea descrescătoare. Dacă în urma aplicării unor formule de calcul apar indici nuli, aceştia vor fi eliminaţi.

Mai facem observaţia că numărul $N = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$ este egal cu numărul soluţiilor sistemului:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \lambda_i; \quad i = 1, 2, ..., \mu \\ \sum_{i=1}^{\mu} x_{ij} = l_j; \quad j = 1, 2, ..., m \end{cases}$$

unde $\lambda_i, l_j > 0$ şi $x_{ij} \geq 0$ sunt numere naturale.

Acest sistem are μm necunoscute şi $\mu + m - 1$ ecuaţii independente (datorită condiţiei $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = \sum_{j=1}^{m} l_j = n$). Gradul de nedeterminare al sistemului este: $\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1)$.

Se observă că numărul N reprezintă de asemenea numărul matricilor cu μ linii şi m coloane, conţinând numere naturale, la care sumele liniilor, respectiv ale coloanelor sunt impuse:

n	l_1	l_2	K	l_m
λ_1	x_{11}	x_{12}	K	x_{1m}
λ_2	x_{21}	x_{22}	K	x_{2m}
M				
λ_μ	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	K	$x_{\mu m}$

Metoda enumerării aplicată "manual" constă în construirea efectivă a matricilor de tipul celei de mai sus şi numărarea lor. Este evident că pentru n mare această variantă este total nepractică.

3. Algoritmul de numărare

În continuare, ne propunem să calculăm valoarea simbolului general introdus mai sus.

Vom considera la început un caz particular şi anume calculul numărului $G_{3(1,1,1)}^{3(2,1)}$. Prin urmare, trebuie să calculăm în câte moduri se pot distribui 3 obiecte (două de o clasă şi unul de altă clasă) în trei căsuţe de capacitate 1, deci fiecare căsuţă primind un obiect.

Să presupunem că fiecare căsuţă ar putea primi toate cele trei obiecte. Atunci, primele două obiecte se pot plasa amândouă în prima căsuţă, în a doua, în a treia, un obiect în prima căsuţă şi al doilea în a doua, în prima şi a treia sau în a doua şi a treia. Acestor posibilităţi de distribuire a primelor două obiecte le putem ataşa polinomul omogen şi simetric de trei nedeterminate:

$$P_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 .$$

Gradul polinomului este dat de numărul de obiecte de aceeaşi clasă (2) iar numărul de nedeterminate de numărul de căsuţe (3). Fiecare monom corespunde unei distribuiri.

La fel, al treilea obiect se poate plasa în căsuţa întâi, a doua sau a treia. Scriem polinomul. ataşat:

$$P_1 = y_1 + y_2 + y_3 .$$

Fiecărei distribuiri a obiectelor din prima clasă i se poate ataşa o distribuire a obiectului din cealaltă clasă, totalitatea distribuirilor care rezultă reprezentându-se prin produsul celor două polinoame:

$$P_2 \cdot P_1 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 2y_1^2y_2 + 2y_1^2y_3 + 2y_2^2y_3 + 2y_1y_2^2 + 2y_1y_3^2 + 2y_2y_3^2 + 3y_1y_2y_3.$$

Coeficientul unui monom arată de câte ori apare el în polinomul final, deci câte distribuiri de tipul respectiv sunt posibile. În cazul nostru, fiecare căsuţă primeşte un obiect, deci distribuirile sunt de tipul $y_1y_2y_3$. Numărul de distribuiri posibile este deci 3. Exponentul unei nedeterminate arată câte obiecte sunt în căsuţa reprezentată de variabila respectivă. În acest fel, putem deduce de exemplu că numărul de distribuiri a celor trei obiecte considerate în trei căsuţe din care prima nu primeşte nici un obiect, a doua primeşte două obiecte, iar a treia primeşte un obiect este 2 etc.

O simplificare considerabilă a calculelor se poate face considerând reprezentarea polinoamelor simetrice şi omogene prin sumele nedeterminatelor de aceeaşi putere (relaţii tip Newton; [2],[3]).

Astfel, notând:

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

avem:

$$P_1 = x_1;\ P_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$$
$$P = P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{2}(x_1^3 + x_1x_2)]$$
$$P = \frac{1}{2}[(y_1 + y_2 + y_3)^3 + (y_1 + y_2 + y_3)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

Cu teorema multinomului [1] extragem coeficientul monomului $y_1y_2y_3$:

$$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = 3.$$

Metoda expusă se poate aplica evident pe cazul general. Deci, pentru calculul simbolului general standard $G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ se procedează astfel:

a) Se calculează polinomul

$$P = P_{\lambda_1}P_{\lambda_2}...P_{\lambda_\mu}$$

unde $P_{\lambda_i} = P_{\lambda_i}(x_1, x_2, ..., x_{\lambda i})$ este polinomul de tip Newton, de grad λ_i, în λ_i nedeterminate.

Deci, $P = P(x_1, x_2, ..., x_\lambda)$ va avea gradul $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$ şi λ nedeterminate, unde $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$.

b) Se înlocuieşte în P:

$$x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$$
$$.....$$
$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda.$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Polinomul simetric de m nederminate $y_1, y_2, ..., y_m$ şi omogen de gradul n:

$$P_n = \sum_{1 \le i_1 \le ... \le i_n \le m} y_{i_1} y_{i_2} ... y_{i_n}$$

se poate exprima în funcţie de $x_1, x_2, ..., x_n$, unde:

$$x_i = \sum_{1 \le j \le m} y_j^i \quad (i = 1,2,...,n)$$

având următoarea formă [2]:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+...+nk_n=n \\ k_1, k_2, ..., k_n \ge 0}} \frac{1}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! ... n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n} \tag{1}$$

Numărul de termeni din sumă este $P(n)$, adică numărul de moduri diferite de a scrie pe n ca o sumă de numere naturale, în care ordinea termenilor nu are importanţă.

Putem demonstra relaţia (1) construind funcţia generatoare:

$$G(z) = 1 + P_1 z + P_2 z^2 + ... = \sum_{n \ge 0} P_n z^n \ . \tag{2}$$

Folosind regulile de înmulţire a seriilor, obţinem:

$$G(z) = (1 + y_1 z + y_1^2 z^2 + K)K\,(1 + y_m z + y_m^2 z^2 + K) = \frac{1}{(1 - y_1 z)K\,(1 - y_m z)}.$$

Deci:

$$\ln G(z) = \ln \frac{1}{1 - y_1 z} + K + \ln \frac{1}{1 - y_m z} = \sum_{k \ge 1} \frac{y_1^k z^k}{k} + K + \sum_{k \ge 1} \frac{y_m^k z^k}{k} = \sum_{k \ge 1} \frac{x_k z^k}{k}.$$

Calculăm din nou dezvoltarea în serie de puteri a lui G(z) :

$$G(z) = e^{\ln G(z)} = \exp\left(\sum_{k \ge 1} \frac{x_k z^k}{k} \right) = \prod_{k \ge 1} \exp \frac{x_k z^k}{k} = \left(1 + x_1 z + \frac{x_1^2 z^2}{2!} + K \right) \left(1 + \frac{x_2 z^2}{2} + \frac{x_2^2 z^4}{2^2 \cdot 2!} + K \right) K =$$

$$= \sum_{n \ge 0} \left(\sum_{\substack{k_1+2k_2+K+nk_n=n \\ k_1, k_2, K, k_n \ge 0}} \frac{x_1^{k_1}}{1^{k_1} k_1!} \cdot \frac{x_2^{k_2}}{2^{k_2} k_2!} \Lambda \ \frac{x_n^{k_n}}{2^{k_n} k_n!} \right) z^n \tag{3}$$

Din relaţiile (2) şi (3) rezultă (1).

Aplicând formula generală (1) se obţin uşor primele opt polinoame de tip Newton:

$$P_1 = x_1$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2 \right)$$

$$P_3 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1 x_2 + 2x_3 \right)$$

$$P_4 = \frac{1}{24}\left(x_1^4 + 6x_2^2 x_2 + 8x_1 x_3 + 3x_2^2 + 6x_4 \right)$$

$$P_5 = \frac{1}{120}\left(x_1^5 + 10x_1^3x_2 + 15x_1x_2^2 + 20x_1^2x_3 + 20x_2x_3 + 30x_1x_4 + 24x_5\right)$$

$$P_6 = \frac{1}{720}(x_1^6 + 45x_1^2x_2^2 + 15x_1^4x_2 + 15x_2^3 + 40x_1^3x_3 + 120x_1x_2x_3 + 40x_3^2 + 90x_1^2x_4 +$$
$$+ 90x_2x_4 + 144x_1x_5 + 120x_6)$$

$$P_7 = \frac{1}{5040}(x_1^7 + 21x_1^5x_2 + 105x_1^3x_2^2 + 105x_1x_2^3 + 70x_1^4x_3 + 210x_2^2x_3 + 420x_1^2x_2x_3 + 280x_1x_3^2 +$$
$$+ 210x_1^3x_4 + 630x_1x_2x_4 + 420x_3x_4 + 504x_1^2x_5 + 504x_2x_5 + 840x_1x_6 + 720x_7)$$

$$P_8 = \frac{1}{40320}(x_1^8 + 28x_1^6x_2 + 210x_1^4x_2^2 + 420x_1^2x_2^3 + 105x_2^4 + 112x_1^5x_3 + 1120x_1^3x_2x_3 + 1680x_1x_2^2x_3 +$$
$$+ 1120x_1^2x_3^2 + 1120x_2x_3^2 + 2520x_1^2x_2x_4 + 420x_1^4x_4 + 1260x_2^2x_4 + 3360x_1x_3x_4 + 1260x_4^2 +$$
$$+ 4032x_1x_2x_5 + 1344x_1^3x_5 + 2688x_3x_5 + 3360x_1^2x_6 + 3360x_2x_6 + 5760x_1x_7 + 5040x_8)$$

Menţionăm, fără a insista aici asupra acestui aspect, că aplicând metoda de numărare Pólya – de Bruijn [1] în cazul probemei noastre, se obţine în fond metoda de calcul expusă mai sus. Polinoamele P_{λ_i} apar ca polinoame indicatoare de cicluri pentru grupurile simetrice de permutări.

Mai facem observaţia că polinomul simetric de m nederminate $y_1, y_2, ..., y_m$ şi omogen de gradul n se mai poate exprima prin relaţia:

$$P_n = \sum_R y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} K\ y_m^{\alpha_m}$$

unde R este mulţimea soluţiilor în numere naturale ale ecuaţiei:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + K + \alpha_m = n\,.$$

Această ecuaţie are $|R| = c_m^n$ soluţii (combinări cu repetiţie).

Vom calcula pentru exemplificare, prin metoda polinoamele de tip Newton prezentată mai sus, numărul $N = G_{6(3,2,1)}^{6(4,1,1)}$.

Avem:

$$P = P_4 \cdot P_1^2$$

$$P = \frac{1}{24}\left(x_1^6 + 6x_1^4x_2 + 8x_1^3x_3 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4\right).$$

Înlocuim:

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3;$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2;$$
$$x_3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3;$$
$$x_4 = y_1^4 + y_2^4 + y_3^4;$$

$$P = \frac{1}{24}[(y_1 + y_2 + y_3)^6 + 6(y_1 + y_2 + y_3)^4(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + 8(y_1 + y_2 + y_3)^3(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) +$$
$$+ 3(y_1 + y_2 + y_3)^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^2 + 6(y_1 + y_2 + y_3)^2(y_1^4 + y_2^4 + y_3^4)].$$

Calculăm coeficientul monomului $y_1^3 y_2^3 y_3$:

$$N = \frac{1}{24}\left[\frac{6!}{3!2!1!} + 6\left(\frac{4!}{1!2!1!} + \frac{4!}{3!0!1!}\right) + 8\cdot\frac{3!}{0!2!1!} + 3\cdot\frac{2!}{1!0!1!}\cdot 2\right] = 8 .$$

4. Formula de recurenţă pentru polinoamele P_n

Pentru polinoamele de tip Newton (polinoamele indicatoare de cicluri) există o formulă de recurenţă. Notăm:

$$P_i = \frac{1}{i!}C_i \ (i = 0,1,2,...).$$

Avem următoarea formulă de recurenţă [4]:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} A_n^k x_{k+1} C_{n-k} .$$

Prin convenţie, $P_0 = C_0 = 1$.

Această formulă de recurenţă poate fi scrisă şi în formele următoare:

$$P_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k P_{n-k}$$

$$P_n = \frac{x_1 P_{n-1} + x_2 P_{n-2} + ... + x_n P_0}{n} .$$

Formula de recurenţă permite calculul polinoamelor P_n din aproape în aproape,aceasta fiind o nouă metoda de calcul, pe lîngă metoda care utilizează formula generală prezentată mai sus şi în care numărul termenilor este P(n), adică numărul partiţiilor numărului natural n.

5. Aplicaţii

În continuare, vom calcula numărul $N = G_{5(2,2,1)}^{5(2,1,1,1)}$ utilizând algoritmul expus.

Vom utiliza algoritmul prezentat mai sus în acest articol (metoda polinoamelor de tip Newton).

Avem:

$$P = P_2 \cdot P_1^3 = \frac{1}{2}\left(x_1^5 + x_1^3 x_2\right)$$

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

$$P = \frac{1}{2}\left[(y_1 + y_2 + y_3)^5 + (y_1 + y_2 + y_3)^3\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)\right]$$

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{5!}{2!\,2!\,1!} + \frac{3!}{0!\,2!\,1!} + \frac{3!}{2!\,0!\,1!}\right) = 18 .$$

Ca exerciţiu, propunem cititorului să verifice prin calcul egalităţile:

$$G_{6(2,2,1,1)}^{6(2,2,1,1)} = 58$$

$$G_{6(2,2,1,1)}^{6(2,1,1,1,1)} = 102$$

$$G_{7(3,1,1,1,1)}^{7(3,2,1,1)} = 114$$

$$G_{7(2,2,2,1)}^{7(2,2,1,1,1)} = 207$$

şi să formuleze problemele corespunzătoare de numărare a bijecţiilor, respectiv de distribuire a obiectelor în căsuţe.

Evident, cititorul va putea să enunţe probleme asemănătoare de numărare a bijecţiilor între două mulţimi multiple şi să calculeze numerele respective prin metoda prezentată în acest articol.

Numărul bijecţiilor între două mulţimi multiple se poate calcula şi printr-o formulă de recurenţă, elaborată în acest scop. S-a dezvoltat şi o altă metodă de calcul, numită metoda reducerii ordinului.

De asemenea, vom menţiona aici că problema prezentată poate fi rezolvată pentru diverse cazuri particulare (aplicaţii numerice) prin utilizarea calculatorului electronic. Autorul prezentului articol a realizat acest lucru, dar prezentarea acestui aspect nu face obiectul articolului de faţă. Se va reveni pentru expunerea algoritmului utilizat (bazat pe metoda enumerării) şi a programului de calculator respectiv, într-un articol viitor. La fel, pentru metoda de calcul prin recurenţă şi respectiv pentru metoda reducerii ordinului.

Bibliografie

[1] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică,Bucureşti, 1972

[2] D. E. Knuth, *Tratat de programarea calculatoarelor, vol. I*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974

[3] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81

[4] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Numărarea injecţiilor între două mulţimi multiple

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we define the injections between two multiple sets and we calculate the number of this injections using the Newton type polynomials method.We also present two particular cases (generalized arrangements and generalized combinations), a recurrence relation and applications.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

O mulţime multiplă este o mulţime pe care s-a definit o relaţie de echivalenţă. Relaţia de echivalenţă determină o partiţie a mulţimii în clase de echivalenţă, elementele fiecărei clase de echivalenţă fiind denumite echivalente (sau identice). Se mai poate spune că o mulţime multiplă este o mulţime în care elementele se pot repeta. De exemplu, $A = \{a, a, a, b, b, c\}$.

În prezenta lucrare, vom defini injecţiile între două mulţimi multiple şi vom determina numărul acestor injecţii.

2 Definirea injecţiilor între două mulţimi multiple

Considerăm două mulţimi finite X şi Y având $|X| = k$, respectiv $|Y| = n$ elemente ($k \le n$), precum şi mulţimea injecţiilor $f : X \to Y$, mulţime pe care o notăm $I(X, Y)$.

Să considerăm acum o relaţie de echivalenţă (ρ_1) definită pe mulţimea X, care determină o partiţie a mulţimii X în μ clase de echivalenţă X_i, conţinând câte λ_i elemente, adică $|X_i| = \lambda_i$, ($i = 1, 2, ..., \mu$). Elementele unei clase de echivalenţă vor fi denumite echivalente sau identice. Asemănător, considerăm o relaţie de echivalenţă (ρ_2) definită pe mulţimea Y, care determină o partiţie a mulţimii Y în m clase de echivalenţă Y_j, conţinând câte l_j elemente, adică $|Y_j| = l_j$, ($j = 1, 2, ..., m$). În acest fel, mulţimile X şi Y devin mulţimi multiple, adică mulţimi în care elementele se pot repeta.

Vom considera în continuare un grup G de permutări al mulţimii X şi anume produsul simplu al grupurilor simetrice de permutări ale elementelor claselor de echivalenţă din X [1]. Acest grup se notează astfel: $G = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times ... \times S_{\lambda_\mu}$ şi se defineşte în modul următor: pentru orice $\alpha \in G$, $\alpha_i \in S_{\lambda_i}$, $x \in X_i$, avem: $\alpha(x) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_\mu)(x) = \alpha_i(x)$, $(i = 1, 2, ..., \mu)$.

Definiţia este consistentă. Într-adevăr, deoarece G este o submulţime finită a lui S_k, pentru ca G să fie un grup de permutări al mulţimi X (subgrup al grupului simetric S_k), este suficient să verificăm că pentru orice $\alpha, \alpha' \in G \Rightarrow \alpha\alpha' \in G$ (am notat cu $\alpha\alpha'$ compunerea permutărilor α şi α'). Fie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_\mu)$ şi $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_i, ..., \alpha'_\mu)$. Pentru orice $x \in X_i$, avem conform definiţiei: $\alpha\alpha'(x) = \alpha(\alpha'(x)) = \alpha(\alpha'_i(x)) = \alpha_i(\alpha'_i(x)) = \alpha_i\alpha'_i(x)$. Se obţine deci: $\alpha\alpha' = (\alpha_1\alpha'_1, \alpha_2\alpha'_2, ..., \alpha_i\alpha'_i, ..., \alpha_\mu\alpha'_\mu)$ şi se observă că $\alpha\alpha' \in G$.

Analog, considerăm şi grupul H de permutări ale mulţimii Y: $H = S_{l_1} \times S_{l_2} \times ... \times S_{l_m}$.

Se poate defini o relaţie de echivalenţă (ρ) pe mulţimea injecţiilor $I(X, Y)$, în modul următor: $f_1 \sim f_2$ dacă există $\alpha \in G$ şi $\beta \in H$ astfel încât $f_2 = \beta f_1 \alpha$. Să demonstrăm că relaţia astfel definită este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea injecţiilor $f : X \to Y$, în raport cu grupurile G şi H de permutări. Relaţia este reflexivă: $f \sim f$, deoarece $f = \varepsilon_2 f \varepsilon_1$, unde $\varepsilon_1 \in G$ şi $\varepsilon_2 \in H$ sunt permutările identice din cele două grupuri de permutări. Relaţia este simetrică: $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1$. Într-adevăr, $f_2 = \beta f_1 \alpha$ conduce la $f_1 = \beta^{-1} f_2 \alpha^{-1}$, unde $\alpha^{-1} \in G$ şi $\beta^{-1} \in H$, ceea ce probează afirmaţia. Relaţia este tranzitivă: $f_1 \sim f_2$ şi $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3$. Într-adevăr, din $f_2 = \beta f_1 \alpha$ şi $f_3 = \beta' f_2 \alpha'$ rezultă: $f_3 = \beta'\beta f_1 \alpha\alpha' = \beta'' f_1 \alpha''$, unde $\beta'\beta = \beta'' \in H$ şi $\alpha\alpha' = \alpha'' \in G$.

Relaţia (ρ) de echivalenţă definită mai sus determină o partiţie a mulţimii $I(X, Y)$ în clase de echivalenţă. Reprezentanţii claselor de echivalenţă se numesc injecţii între cele două mulţimi multiple.

Numărul acestor clase de echivalenţă se notează astfel: $|I(X, Y)/\rho| = G^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$.

Se observă că problema expusă mai sus este echivalentă cu o problemă de distribuire a unor obiecte în căsuţe distincte, neordonate. Considerăm k obiecte (μ clase de obiecte, clasa i conţinând λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = k$) şi m căsuţe de capacităţi l_j, cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$. Se distribuie cele k obiecte în cele m căsuţe. Numărul de distribuiri posibile este $G^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$, unde $k \le n$. Ordinea indicilor din paranteze nu are importanţă.Vom prefera să notăm atât indicii de jos cât şi cei de sus în ordinea descrescătoare.Dacă în urma aplicării unor formule de calcul apar indici nuli,aceştia vor fi eliminaţi.

3 Cazuri particulare

Considerăm două cazuri particulare interesante şi introducem două notaţii noi:

a) $\mu = k$; $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_\mu = 1$

$$G^{k(1, 1, ..., 1)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} = A^{k}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} \quad (k \le n)$$

b) $\mu = 1$; $\lambda_1 = k$

$$G^{k(\lambda_1)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} = C^{k}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} \quad (k \le n)$$

Aceste cazuri particulare se numesc aranjamente generalizate de n obiecte (l_1, l_2, ..., l_m) luate câte k,respectiv combinări generalizate de n obiecte (l_1, l_2, ..., l_m) luate câte k.

În afara problemei numărării injecţiilor (respectiv a distribuirii obiectelor în căsuţe) aceste cazuri particulare rezolvă problema numărării submulţimilor (eventual ordonate) ale unei mulţimi multiple, după cum vom arăta în continuare.

O mulţime ordonată este o mulţime pe care s-a definit o relaţie de ordine [1].Utilizând ordinea primelor n numere naturale strict pozitive,o mulţime finită Y cu n elemente poate fi ordonată,după cum se ştie,cu ajutorul unei bijecţii $f : \{1, 2, ..., n\} \to Y$. La scrierea unei mulţimi finite ordonate, ordinea elementelor va fi indicată prin poziţia elementelor respective, de la stânga la dreapta. De exemplu, din mulţimea {A,B} se obţin mulţimile ordonate AB şi BA.Asemănător, cu elementele unei mulţimi multiple se pot forma mulţimi multiple ordonate.De exemplu, din mulţimea multiplă ABB se obţin mulţimile multiple ordonate ABB, BAB, BBA. Mulţimile multiple şi/sau ordonate le notăm simplu, prin scrierea alăturată a elementelor componente, ca mai sus.

Să reluăm acum problema numărării injecţiilor între două mulţimi multiple în cazul special: $X = \{1, 2, ..., k\}$; $\mu = k$; $\lambda_i = 1$, $(i = 1, 2, ..., k)$.

Mulţimea injecţiilor $f : X \to Y$ va fi împărţită în clase de echivalenţă.Pe de altă parte, cu elementele mulţimii multiple Y se pot forma submulţimi multiple ordonate, de câte k elemente ($k \le n$). Fie $y_1 y_2 ... y_i ... y_k$ o astfel de submulţime.Dacă punem $y_i = f(i)$, $(i = 1, 2, ..., k)$, observăm că fiecărei injecţii - reprezentant al unei clase de echivalenţă îi corespende o submulţime multiplă ordonată şi invers. Deci între mulţimea $I(X, Y)/\rho$ şi mulţimea submulţimilor multiple ordonate cu k elemente ale mulţimii multiple Y există o corespondenţă biunivocă, ceea ce înseamnă că ele au acelaşi număr de elemente.Aceste submulţimi vor fi numite aranjamente generalizate de n obiecte (l_1 de clasa 1, ..., l_m de clasa m), luate câte k. Numărul lor va fi dat de $A^k_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$.

Aranjamentele generalizate introduse mai sus generalizează aranjamentele simple şi cu repetiţie:

$$A^k_{n(1,1,...,1)} = A^k_m \qquad (m = n)$$

$$A^k_{n(k,k,...,k)} = a^k_m \qquad (mk = n).$$

În cazul particular k=n obţinem permutările generalizate:

$$A^n_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = P_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \frac{n!}{l_1!l_2!...l_m!}$$

Submulţimile multiple cu k elemente ale mulţimii multiple Y le vom numi combinări generalizate de n obiecte (l_1 de clasa 1, … l_m de clasa m) luate câte k. Asemănător deducem că numărul lor este $C^k_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$.

Există relaţiile de generalizare pentru combinările simple şi pentru cele cu repetiţie:

$$C^k_{n(1,1,...,1)} = C^k_m \qquad (m = n)$$

$$C^k_{n(k,k,...,k)} = c^k_m \qquad (mk = n).$$

4 Formula de complementaritate şi algoritmul de numărare

Vom arăta în continuare că numărarea injecţiilor între două mulţimi multiple se poate reduce întotdeauna la numărarea bijecţiilor între două mulţimi multiple. Mai precis,vom demonstra formula de complementaritate:

$$G^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} = G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu, n-k)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$$

Simbolul din membrul stâng al egalităţii reprezintă numărul de distribuiri a k obiecte (λ_1 de clasa 1, …, λ_μ de clasa μ) în m căsuţe de capacităţi $l_1\ l_2, ..., l_m$. La fiecare distribuire rămân libere $n-k$ locuri în căsuţe. Introducând o nouă clasă de obiecte fictive (în număr de $n-k$), numărul de obiecte devine egal cu n, adică la fiecare distribuire se completează toate locurile din căsuţe (semnificaţia simbolului din membrul drept). Considerând obiectele din noua clasă ca şi "goluri" sau "lipsuri" în prima distribuire, rezultă că există o corespondenţă biunivocă între mulţimile celor două distribuiri, deci numărul lor este acelaşi şi cu aceasta proprietatea este demonstrată.

Utilizând acest rezultat, putem număra injecţiile între două mulţimi multiple cu ajutorul algoritmului expus în [3]. Deoarece deducerea algoritmului este făcută acolo, redăm mai jos modul general de calcul iar apoi tratăm un exemplu concret.

a) Se calculează polinomul:

$$P = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot ... \cdot P_{\lambda_\mu} \cdot P_{n-k},$$

unde $P_{\lambda_i} = P_{\lambda_i}\left(x_1, x_2, ..., x_{\lambda_i}\right)$ este polinomul de tip Newton, de grad λ_i, în λ_i nedeterminate şi la fel, $P_{n-k} = P_{n-k}\left(x_1, x_2, ..., x_{n-k}\right)$.

Deci, $P = P\left(x_1, x_2, ..., x_\lambda\right)$ va avea gradul n şi λ nedeterminate, unde $\lambda = \max\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu, n-k\right)$.

b) Se înlocuieşte în P:

$$x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda.$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Polinomul general de tip Newton are forma [2]:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+...+nk_n=n \\ k_1, k_2, ..., k_n \geq 0}} \frac{1}{1^{k_1}\, k_1!\, 2^{k_2}\, k_2! ... n^{k_n}\, k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}.$$

Aplicând formula generală de mai sus se obţin uşor primele patru polinoame de tip Newton:

$$P_1 = x_1$$
$$P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right)$$
$$P_3 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3\right)$$
$$P_4 = \frac{1}{24}\left(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4\right)$$

Menţionăm, fără a insista aici asupra acestui aspect, că aplicând metoda de numărare Pólya– de Bruijn [1] în cazul problemei noastre, se obţine în fond metoda de calcul expusă mai sus. Polinoamele de tip Newton apar ca polinoame indicatoare de cicluri pentru grupurile simetrice de permutări.

5 Formulă de recurenţă

Există următoarea formulă de recurenţă,care rezultă imediat din definiţie:

$$G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = \sum_R G_{k(x_1, x_2, ..., x_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$$

unde R este mulţimea soluţiilor $(x_1, x_2, ..., x_m)$ în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condiţiile: $0 \le x_i \le l_i$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulţimea R a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are |R| termeni (cardinalul mulţimii R).

Avem:

$$|R| = C_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k}$$

Această formulă de recurenţă furnizează şi ea o metodă pentru calculul numărului injecţiilor între două mulţimi multiple.

6 Aplicaţii

În continuare, vom calcula numărul $N = G_{5(2,2,1)}^{4(2,1,1)}$ utilizând algoritmul expus şi respectiv formula de recurenţă.

Vom utiliza la început algoritmul prezentat mai sus în acest articol (metoda polinoamelor de tip Newton).

Avem:

$$P = P_2 \cdot P_1^3 = \frac{1}{2}\left(x_1^5 + x_1^3 x_2\right)$$

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

$$P = \frac{1}{2}\left[(y_1 + y_2 + y_3)^5 + (y_1 + y_2 + y_3)^3\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)\right]$$

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{5!}{2!\,2!\,1!} + \frac{3!}{0!\,2!\,1!} + \frac{3!}{2!\,0!\,1!}\right) = 18.$$

Vom calcula acelaşi număr utilizând a doua metodă de calcul,respectiv formula de recurenţă. Putem scrie:

$$G_{5(2,2,1)}^{4(2,1,1)} = \sum_R G_{4(x_1, x_2, x_3)}^{4(2,1,1)},$$

unde R este mulţimea soluţiilor în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$

cu condiţiile: $0 \le x_1 \le 2$, $0 \le x_2 \le 2$, $0 \le x_3 \le 1$.

Avem: $|R| = C_{5(2,2,1)}^{4} = 3$.

Mulţimea R este: $R = \{(1, 2, 1), (2, 1, 1), (2, 2, 0)\}$.

Deci, putem scrie:

$$N = G_{4(1,2,1)}^{4(2,1,1)} + G_{4(2,1,1)}^{4(2,1,1)} + G_{4(2,2,0)}^{4(2,1,1)} = 2 \cdot G_{4(2,1,1)}^{4(2,1,1)} + G_{4(2,2)}^{4(2,1,1)}.$$

Dar, putem obţine uşor, folosind metoda polinoamelor de tip Newton:

$$G_{4(2,1,1)}^{4(2,1,1)} = 7 \; ; \; G_{4(2,2)}^{4(2,1,1)} = 4 \, .$$

Deci, $N = 2 \cdot 7 + 4 = 18$.

S-a obţinut acelaşi rezultat ca şi cel dedus prin utlilizarea primei metode (metoda polinoamelor de tip Newton).

Ca exerciţiu, propunem cititorului să verifice prin calcul egalităţile:

$$G_{6(2,2,1,1)}^{4(2,1,1)} = 58 \; ; \; G_{7(2,2,2,1)}^{5(2,1,1,1)} = 207$$

şi să formuleze problemele corespunzătoare de numărare a injecţiilor, respectiv de distribuire a obiectelor în căsuţe.

Evident,cititorul va putea să enunţe probleme asemănătoare de numărare a injecţiilor între două mulţimi multiple şi să calculeze numerele respective prin cele două metode prezentate în acest articol.

S-a elaborat şi o altă metodă de calcul (metoda reducerii ordinului).

De asemenea,vom menţiona că problema prezentată poate fi rezolvată pentru diverse cazuri particulare (aplicaţii numerice) prin utilizarea calculatorului electronic.Autorul prezentului articol a realizat acest lucru,dar prezentarea acestui aspect nu face obiectul articolului de faţă.Se va reveni pentru expunerea algoritmului utilizat şi a programului de calculator respectiv, într-un articol viitor.La fel,pentru metoda reducerii ordinului.

Bibliografie

[1] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică,Bucureşti, 1972

[2] D. E. Knuth, *Tratat de programarea calculatoarelor, vol. I*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

[3] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81.

[4] V. M. Popa, *Matematică aplicată*, Sibiu, 2005.

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Numărarea funcţiilor între două mulţimi multiple

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we define the functions between two multiple sets and we calculate the number of this functions using de Bruijn's formula. We also present three particular examples and applications.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

O mulţime multiplă este o mulţime pe care s-a definit o relaţie de echivalenţă. Relaţia de echivalenţă determină o partiţie a mulţimii în clase de echivalenţă, elementele fiecărei clase de echivalenţă fiind denumite echivalente (sau identice). Se mai poate spune că o mulţime multiplă este o mulţime în care elementele se pot repeta. De exemplu, $A = \{a, a, a, b, b, c\}$.

În prezenta lucrare, vom defini funcţiile între două mulţimi multiple şi vom determina numărul acestor funcţii.

2 Definirea funcţiilor între două mulţimi multiple

Considerăm două mulţimi finite X şi Y având $|X| = k$, respectiv $|Y| = n$ elemente, precum şi mulţimea funcţiilor $f : X \to Y$, mulţime pe care o notăm $F(X, Y)$.

Să considerăm acum o relaţie de echivalenţă (ρ_1) definită pe mulţimea X, care determină o partiţie a mulţimii X în μ clase de echivalenţă X_i, conţinând câte λ_i elemente, adică $|X_i| = \lambda_i$, ($i = 1, 2, ..., \mu$). Elementele unei clase de echivalenţă vor fi denumite echivalente sau identice. Asemănător, considerăm o relaţie de echivalenţă (ρ_2) definită pe mulţimea Y, care determină o partiţie a mulţimii Y în m clase de echivalenţă Y_j, conţinând câte l_j elemente, adică $|Y_j| = l_j$, ($j = 1, 2, ..., m$). În acest fel, mulţimile X şi Y devin mulţimi multiple, adică mulţimi în care elementele se pot repeta.

Vom considera în continuare un grup G de permutări al mulţimii X şi anume produsul simplu al grupurilor simetrice de permutări ale elementelor claselor de echivalenţă din X [1]. Acest grup se notează astfel: $G = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times ... \times S_{\lambda_\mu}$ şi se defineşte în modul următor: pentru orice $\alpha \in G$, $\alpha_i \in S_{\lambda_i}$, $x \in X_i$, avem: $\alpha(x) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_\mu)(x) = \alpha_i(x)$, $(i = 1, 2, ..., \mu)$.

Definiţia este consistentă. Într-adevăr, deoarece G este o submulţime finită a lui S_k, pentru ca G să fie un grup de permutări al mulţimi X (subgrup al grupului simetric S_k), este suficient să verificăm că pentru orice $\alpha, \alpha' \in G \Rightarrow \alpha\alpha' \in G$ (am notat cu $\alpha\alpha'$ compunerea permutărilor α şi α'). Fie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_\mu)$ şi $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_i, ..., \alpha'_\mu)$. Pentru orice $x \in X_i$, avem conform definiţiei: $\alpha\alpha'(x) = \alpha(\alpha'(x)) = \alpha(\alpha'_i(x)) = \alpha_i(\alpha'_i(x)) = \alpha_i\alpha'_i(x)$. Se obţine deci: $\alpha\alpha' = (\alpha_1\alpha'_1, \alpha_2\alpha'_2, ..., \alpha_i\alpha'_i, ..., \alpha_\mu\alpha'_\mu)$ şi se observă că $\alpha\alpha' \in G$.

Analog, considerăm şi grupul H de permutări ale mulţimii Y: $H = S_{l_1} \times S_{l_2} \times ... \times S_{l_m}$.

Se poate defini o relaţie de echivalenţă (ρ) pe mulţimea funcţiilor $F(X, Y)$, în modul următor: $f_1 \sim f_2$ dacă există $\alpha \in G$ şi $\beta \in H$ astfel încât $f_2 = \beta f_1 \alpha$. Să demonstrăm că relaţia astfel definită este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea funcţiilor $f : X \to Y$, în raport cu grupurile G şi H de permutări. Relaţia este reflexivă: $f \sim f$, deoarece $f = \varepsilon_2 f \varepsilon_1$, unde $\varepsilon_1 \in G$ şi $\varepsilon_2 \in H$ sunt permutările identice din cele două grupuri de permutări. Relaţia este simetrică: $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1$. Într-adevăr, $f_2 = \beta f_1 \alpha$ conduce la $f_1 = \beta^{-1} f_2 \alpha^{-1}$, unde $\alpha^{-1} \in G$ şi $\beta^{-1} \in H$, ceea ce probează afirmaţia. Relaţia este tranzitivă: $f_1 \sim f_2$ şi $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3$. Într-adevăr, din $f_2 = \beta f_1 \alpha$ şi $f_3 = \beta' f_2 \alpha'$ rezultă: $f_3 = \beta'\beta f_1 \alpha\alpha' = \beta'' f_1 \alpha''$, unde $\beta'\beta = \beta'' \in H$ şi $\alpha\alpha' = \alpha'' \in G$.

Relaţia (ρ) de echivalenţă definită mai sus determină o partiţie a mulţimii $F(X, Y)$ în clase de echivalenţă. Reprezentanţii claselor de echivalenţă se numesc funcţii între cele două mulţimi multiple.

Numărul acestor clase de echivalenţă se notează astfel: $|F(X, Y)/\rho| = F^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$.

3 Formulă de calcul

Numărarea funcţiilor între două mulţimi multiple se poate face utilizând o metodă datorată matematicianului olandez N.G. de Bruijn (a se vedea poziţiile [4] şi [5] din lista bibliografică).

Numărul:

$$N = |F(X, Y)/\rho| = F^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$$

se calculează cu următoarea formulă:

$$N = P_G\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, ...\right) P_H\left(e^{z_1+z_2+...}, e^{2(z_2+z_4+...)}, e^{3(z_3+z_6+...)}, ...\right)\Big|_{z_1=z_2=...=0} \qquad (1)$$

unde P_G, P_H sunt polinoamele indicatoare de cicluri ale grupurilor de permutări G, respectiv H.

În formulă se aplică derivatele parţiale asupra funcţiei şi se fac apoi toate variabilele egale cu zero.

Avem:

$$P_G = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot ... \cdot P_{\lambda_\mu}$$

unde $P_{\lambda_i} = P_{\lambda_i}\left(x_1, x_2, ..., x_{\lambda_i}\right)$ este polinomul indicator de cicluri pentru grupul simetric de permutări de gradul λ_i.

Asemănător, avem:

$$P_H = P_{l_1} \cdot P_{l_2} \cdot ... \cdot P_{l_m}.$$

Primele patru polinoame indicatoare de ciclu sunt:

$$P_1 = x_1$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right)$$

$$P_3 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3\right)$$

$$P_4 = \frac{1}{24}\left(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4\right)$$

Facem observaţia că pentru calcularea derivatelor parţiale din formula (1), putem utiliza pe lângă calculul „manual” şi calculul în produsul soft Mathcad 14.

4 Exemple de aplicare a formulei

Exemplul 1

Să calculăm numărul funcţiilor între mulţimile multiple X şi Y cu următorii parametri:

$$|X| = k = 4;\ \mu = 3;\ \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = 1$$

$$|Y| = n = 3;\ m = 2;\ l_1 = 2;\ l_2 = 1.$$

Deci, trebuie să calculăm numărul:

$$N = F_{3(2,1)}^{4(2,1,1)}.$$

Avem :

$$P_G = P_2 \cdot P_1^2 = \frac{1}{2}\left(x_1^4 + x_1^2x_2\right)$$

$$P_H = P_2 \cdot P_1 = \frac{1}{2}\left(x_1^3 + x_1x_2\right)$$

$$P_G = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z_2}\right)$$

$$P_H = \frac{1}{2}\left(e^{3z_1+3z_2} + e^{z_1+3z_2}\right).$$

Aplicând formula lui de Bruijn (1) obţinem, în urma efectuării calculelor:

$$N = P_G P_H\Big|_{z_1=z_2=0} = 28.$$

Exemplul 2

Să calculăm numărul funcţiilor între mulţimile multiple X şi Y cu următorii parametri:

$$|X| = k = 3;\ \mu = 2;\ \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 1$$

$$|Y| = n = 3;\ m = 3;\ l_1 = 1;\ l_2 = 1;\ l_3 = 1.$$

Deci, trebuie să calculăm numărul:

$$N = F^{3(2,1)}_{3(1,1,1)}.$$

Avem :

$$P_G = P_2 \cdot P_1 = \frac{1}{2}\left(x_1^3 + x_1 x_2\right)$$

$$P_H = x_1^3$$

$$P_G = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3}{\partial z_1^3} + \frac{\partial}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial}{\partial z_2}\right)$$

$$P_H = e^{3z_1+3z_2}.$$

Obţinem, în urma efectuării calculului:

$$N = P_G P_H\Big|_{z_1=z_2=0} = 18.$$

Exemplul 3

Să calculăm numărul funcţiilor între mulţimile multiple X şi Y cu următorii parametri:

$$|X| = k = 3;\ \mu = 3;\ \lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = 1$$

$$|Y| = n = 3;\ m = 3;\ l_1 = 1;\ l_2 = 1;\ l_3 = 1.$$

Observăm că în acest caz mulţimile X şi Y devin mulţimi nemultiple (mulţimi în sensul obişnuit al cuvântului).

Vom calcula deci numărul:

$$N = F^{3(1,1,1)}_{3(1,1,1)}.$$

Avem:

$$P_G = P_1^3 = x_1^3$$

$$P_H = P_1^3 = x_1^3$$

$$P_G = \frac{\partial^3}{\partial z_1^3}$$

$$P_H = e^{3z_1}.$$

Se obţine:

$$N = P_G P_H\Big|_{z_1=0} = 27.$$

Dar, în acest caz putem calcula numărul N cu ajutorul formulei cunoscute:

$$N = n^k = 27 .$$

Cele două rezultate obţinute prin metode diferite coincid.

5 Observaţii

Există formule asemănătoare pentru calculul numărului bijecţiilor, respectiv al injecţiilor între două mulţimi multiple [4], [5], [6].

Utilizând notaţii asemănătoare, putem scrie:

$$\left|B(X, Y)/\rho\right| = B^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} = P_G\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, ...\right) P_H(z_1, 2z_2, 3z_3, ...) \qquad (2)$$

pentru $z_1 = z_2 = ... = 0$.

$$\left|I(X, Y)/\rho\right| = I^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., lm)} = P_G\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, ...\right) P_H(1+z_1, 1+2z_2, 1+3z_3, ...) \qquad (3)$$

pentru $z_1 = z_2 = ... = 0$.

Pentru calculul numărului bijecţiilor între două mulţimi multiple (respectiv al injecţiilor între două mulţimi multiple) există şi alte metode de calcul, prezentate în lucrările [2] şi [3].

6 Aplicaţii

Propunem cititorului să verifice prin calcul următoarele egalităţi şi să formuleze problemele corespunzătoare de numărare a funcţiilor (respectiv a bijecţiilor, respectiv a injecţiilor) între două mulţimi multiple.

a) $F^{5(2,1,1,1)}_{4(2,1,1)} = 336$

b) $F^{4(2,1,1)}_{2(1,1)} = 12$

c) $F^{4(2,1,1)}_{2(2)} = 6$

d) $F^{3(2,1)}_{3(2,1)} = 10$

e) $B^{6(2,2,1,1)}_{6(2,2,1,1)} = 58$

f) $B^{6(2,1,1,1,1)}_{6(2,2,1,1)} = 102$

g) $I^{4(2,1,1)}_{6(2,2,1,1)} = 58$

h) $I^{5(2,1,1,1)}_{7(2,2,2,1)} = 207 .$

Pentru calculul numărului bijecţiilor între două mulţimi multiple (respectiv al injecţiilor între două mulţimi multiple) cititorul este sfătuit să utilizeze şi metodele indicate în lucrările [2] şi [3]. Rezultatele obţinute trebuie să fie evident aceleaşi cu cele obţinute prin aplicarea formulelor lui de Bruijn.

Numărarea funcţiilor între două mulţimi multiple se mai poate face folosind teorema lui Burnside. Numărul acestor funcţii este egal cu numărul de orbite ale grupului putere H^G de permutări ale mulţimii funcţiilor Y^X (se poate vedea lucrarea [1], pag. 137-138).

Prezentul articol continuă problematica abordată în articolele: "Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple" publicat în revista Gazeta Matematică – Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81 şi „Numărarea injecţiilor între două mulţimi multiple" publicat în volumul Matematică aplicată, Sibiu, 2005 (poziţiile bibliografice [2] şi [3]).

Bibliografie

[1] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[2] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81.

[3] V. M. Popa, *Numărarea injecţiilor între două mulţimi multiple*, în volumul Matematică aplicată, Sibiu, 2005

[4] N. G. De Bruijn, *Generalization of Polya's fundamental theorem in enumerative combinatorial analysis*, Nederl. Akad. Wetensch. Proceedings Ser. A 62, 1959, pp. 59-69

[5] N. G. De Bruijn, *A Survey of Generalizations of Polya's Enumeration Theorem*, Nieuw Archief Wiskunde, 1971, pp. 89-112

[6] C. L. Liu, *Introduction to Combinatorial Mathematics*, Mc Graw – Hill Book Company, New York, 1968.

Universitatea „Lucian Blaga" Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth"
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Numărarea surjecţiilor între două mulţimi multiple

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we define the surjections between two multiple sets and we calculate the number of these surjections using the principle of inclusion and exclusion and de Bruijn's formula for number of functions between two multiple sets. We also present two applications.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

O mulţime multiplă este o mulţime pe care s-a definit o relaţie de echivalenţă. Relaţia de echivalenţă determină o partiţie a mulţimii în clase de echivalenţă, elementele fiecărei clase de echivalenţă fiind denumite echivalente (sau identice). Se mai poate spune că o mulţime multiplă este o mulţime în care elementele se pot repeta. De exemplu, $A = \{a, a, a, b, b, c\}$.

În prezenta lucrare, vom defini surjecţiile între două mulţimi multiple şi vom determina numărul acestor surjecţii.

2 Definirea surjecţiilor între două mulţimi multiple

Considerăm două mulţimi finite X şi Y având $|X| = k$, respectiv $|Y| = n$ elemente ($k \geq n$), precum şi mulţimea surjecţiilor $f : X \to Y$, mulţime pe care o notăm $S(X, Y)$.

Să considerăm acum o relaţie de echivalenţă (ρ_1) definită pe mulţimea X, care determină o partiţie a mulţimii X în μ clase de echivalenţă X_i, conţinând câte λ_i elemente, adică $|X_i| = \lambda_i$, ($i = 1, 2, ..., \mu$). Elementele unei clase de echivalenţă vor fi denumite echivalente sau identice. Asemănător, considerăm o relaţie de echivalenţă (ρ_2) definită pe mulţimea Y, care determină o partiţie a mulţimii Y în m clase de echivalenţă Y_j, conţinând câte l_j elemente, adică $|Y_j| = l_j$, ($j = 1, 2, ..., m$). În acest fel, mulţimile X şi Y devin mulţimi multiple, adică mulţimi în care elementele se pot repeta.

Vom considera în continuare un grup G de permutări al mulţimii X şi anume produsul simplu al grupurilor simetrice de permutări ale elementelor claselor de echivalenţă din X [1]. Acest grup se notează astfel: $G = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times ... \times S_{\lambda_\mu}$ şi se defineşte în modul următor: pentru orice $\alpha \in G$, $\alpha_i \in S_{\lambda_i}$, $x \in X_i$, avem: $\alpha(x) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_\mu)(x) = \alpha_i(x)$, ($i = 1, 2, ..., \mu$).

Definiţia este consistentă. Într-adevăr, deoarece G este o submulţime finită a lui S_k, pentru ca G să fie un grup de permutări al mulţimi X (subgrup al grupului simetric S_k), este suficient să verificăm că pentru orice $\alpha, \alpha' \in G \Rightarrow \alpha\alpha' \in G$ (am notat cu $\alpha\alpha'$ compunerea permutărilor α şi α'). Fie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_\mu)$ şi $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_i, ..., \alpha'_\mu)$. Pentru orice $x \in X_i$, avem conform definiţiei: $\alpha\alpha'(x) = \alpha(\alpha'(x)) = \alpha(\alpha'_i(x)) = \alpha_i(\alpha'_i(x)) = \alpha_i\alpha'_i(x)$. Se obţine deci: $\alpha\alpha' = (\alpha_1\alpha'_1, \alpha_2\alpha'_2, ..., \alpha_i\alpha'_i, ..., \alpha_\mu\alpha'_\mu)$ şi se observă că $\alpha\alpha' \in G$.

Analog, considerăm şi grupul H de permutări ale mulţimii Y: $H = S_{l_1} \times S_{l_2} \times ... \times S_{l_m}$.

Se poate defini o relaţie de echivalenţă (ρ) pe mulţimea surjecţiilor $S(X, Y)$, în modul următor: $f_1 \sim f_2$ dacă există $\alpha \in G$ şi $\beta \in H$ astfel încât $f_2 = \beta f_1 \alpha$. Să demonstrăm că relaţia astfel definită este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea surjecţiilor $f : X \to Y$, în raport cu grupurile G şi H de permutări. Relaţia este reflexivă: $f \sim f$, deoarece $f = \varepsilon_2 f \varepsilon_1$, unde $\varepsilon_1 \in G$ şi $\varepsilon_2 \in H$ sunt permutările identice din cele două grupuri de permutări. Relaţia este simetrică: $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1$. Într-adevăr, $f_2 = \beta f_1 \alpha$ conduce la $f_1 = \beta^{-1} f_2 \alpha^{-1}$, unde $\alpha^{-1} \in G$ şi $\beta^{-1} \in H$, ceea ce probează afirmaţia. Relaţia este tranzitivă: $f_1 \sim f_2$ şi $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3$. Într-adevăr, din $f_2 = \beta f_1 \alpha$ şi $f_3 = \beta' f_2 \alpha'$ rezultă: $f_3 = \beta'\beta f_1 \alpha\alpha' = \beta'' f_1 \alpha''$, unde $\beta'\beta = \beta'' \in H$ şi $\alpha\alpha' = \alpha'' \in G$.

Relaţia (ρ) de echivalenţă definită mai sus determină o partiţie a mulţimii $S(X, Y)$ în clase de echivalenţă. Reprezentanţii claselor de echivalenţă se numesc surjecţii între cele două mulţimi multiple.

Numărul acestor clase de echivalenţă se notează astfel: $|S(X, Y)/\rho| = S^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$.

3 Metodă de calcul

Numărarea surjecţiilor între două mulţimi multiple se poate face utilizând principiul includerii şi al excluderii ([1], numit şi regula sumei) precum şi numărul funcţiilor între două mulţimi multiple, număr care se poate calcula cu formula lui de Bruijn [4].

În esenţă, principiul includerii şi al excluderii ne dă numărul de elemente (cardinalul) pentru reuniunea unor mulţimi finite.

Pentru două mulţimi finite A şi B avem:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Pentru trei mulţimi finite A, B şi C avem:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Generalizarea este evidentă şi este lăsată în sarcina cititorului. De altfel, ea se găseşte în orice carte de combinatorică, în particular în [1].

Pentru introducerea metodei de calcul, vom analiza la început un caz concret.

Să calculăm numărul:

$$N = S_{3(2,1)}^{4(2,1,1)}.$$

Se poate scrie relaţia:

$$N = F_{3(2,1)}^{4(2,1,1)} - P.$$

Cu alte cuvinte, numărul surjecţiilor între mulţimile multiple X şi Y este egal cu numărul funcţiilor între aceste mulţimi din care trebuie să scădem numărul funcţiilor pentru care cel puţin una din valorile cuprinse în clasele de echivalenţă Y_1 şi Y_2 nu este luată. Notăm acest număr cu P. Calculăm acest număr folosind principiul includerii şi al excluderii.

Putem scrie:

$$P = F_{2(1,1)}^{4(2,1,1)} + F_{2(2,0)}^{4(2,1,1)} - F_{1(1,0)}^{4(2,1,1)}.$$

Numerele care intervin în această relaţie au următoarele semnificaţii:

a) $F_{2(1,1)}^{4(2,1,1)}$ este numărul funcţiilor care nu iau una din valorile din Y_1

b) $F_{2(2,0)}^{4(2,1,1)}$ este numărul funcţiilor care nu iau valoarea din Y_2

c) $F_{1(1,0)}^{4(2,1,1)}$ este numărul funcţiilor care nu iau una din valorile din Y_1 şi valoarea din Y_2.

Aplicând formula lui de Bruijn [4] se obţin următoarele valori:

$$F_{3(2,1)}^{4(2,1,1)} = 28$$

$$F_{2(1,1)}^{4(2,1,1)} = 12$$

$$F_{2(2,0)}^{4(2,1,1)} = F_{2(2)}^{4(2,1,1)} = 6$$

$$F_{1(1,0)}^{4(2,1,1)} = F_{1(1)}^{4(2,1,1)} = 1$$

(se elimină indicii nuli).

Rezultă valoarea lui P:

$$P = 12 + 6 - 1 = 17.$$

Obţinem:

$$N = 28 - 17 = 11$$

şi cu aceasta numărul de surjecţii din acest caz concret este determinat.

Metoda de calcul expusă mai sus se poate utiliza asemănător pentru orice numărare de surjecţii între două mulţimi multiple.

4 Aplicaţii

Aplicaţia 1

Să calculăm numărul surjecţiilor între mulţimile multiple X şi Y cu următorii parametri:

$$|X| = k = 4;\ \mu = 3;\ \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = 1$$

$$|Y| = n = 3;\ m = 3;\ l_1 = 1;\ l_2 = 1;\ l_3 = 1.$$

Deci, trebuie să calculăm numărul:

$$N = S_{3(1,1,1)}^{4(2,1,1)}.$$

Vom scrie:

$$N = F_{3(1,1,1)}^{4(2,1,1)} - P$$

unde P are următoarea expresie (pentru trei mulţimi Y_1, Y_2, Y_3):

$$P = F_{2(0,1,1)}^{4(2,1,1)} + F_{2(1,0,1)}^{4(2,1,1)} + F_{2(1,1,0)}^{4(2,1,1)} - F_{1(0,0,1)}^{4(2,1,1)} - F_{1(0,1,0)}^{4(2,1,1)} - F_{1(1,0,0)}^{4(2,1,1)} + F_{0(0,0,0)}^{4(2,1,1)}$$

$$P = 3F_{2(1,1)}^{4(2,1,1)} - 3F_{1(1)}^{4(2,1,1)} + 0.$$

Dar, aplicând formula lui de Bruijn obţinem:

$$F_{2(1,1)}^{4(2,1,1)} = 12$$

$$F_{1(1)}^{4(2,1,1)} = 1.$$

Deci, $P = 3 \cdot 12 - 3 \cdot 1 + 0 = 33$.

Aplicând aceeaşi formulă a lui de Bruijn obţinem:

$$F_{3(1,1,1)}^{4(2,1,1)} = 54.$$

Să detaliem în acest caz calculul bazat pe formula lui de Bruijn.

Avem:

$$P_G = P_2 \cdot P_1^2 = \frac{1}{2}\left(x_1^4 + x_1^2 x_2\right)$$

$$P_H = P_1^3 = x_1^3$$

$$P_G = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z_2}\right)$$

$$P_H = e^{3z_1+3z_2}$$

$$F_{3(1,1,1)}^{4(2,1,1)} = P_G P_H\Big|_{z_1=z_2=0} = \frac{1}{2}\left(3^4+3^3\right) = 54\,.$$

Deci, în final putem exprima numărul de surjecţii din aplicaţia noastră:

$$N = 54 - 33 = 21$$

Aplicaţia 2

Să calculăm numărul surjecţiilor între mulţimile multiple X şi Y cu următorii parametri:

$$|X| = k = 4;\ \mu = 4;\ \lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = 1;\ \lambda_4 = 1$$

$$|Y| = n = 3;\ m = 3;\ l_1 = 1;\ l_2 = 1;\ l_3 = 1.$$

Observăm că în acest caz mulţimile X şi Y devin mulţimi nemultiple (mulţimi în sensul obişnuit al cuvântului).

Vom calcula deci numărul:

$$N = S_{3(1,1,1)}^{4(1,1,1,1)}.$$

Putem scrie:

$$N = F_{3(1,1,1)}^{4(1,1,1,1)} - P\,.$$

Avem:

$$F_{3(1,1,1)}^{4(1,1,1,1)} = n^k = 81$$

$$P = F_{2(0,1,1)}^{4(1,1,1,1)} + F_{2(1,0,1)}^{4(1,1,1,1)} + F_{2(1,1,0)}^{4(1,1,1,1)} - F_{1(0,0,1)}^{4(1,1,1,1)} - F_{1(0,1,0)}^{4(1,1,1,1)} - F_{1(1,0,0)}^{4(1,1,1,1)} + F_{0(0,0,0)}^{4(1,1,1,1)}$$

$$P = 3F_{2(1,1)}^{4(1,1,1,1)} - 3F_{1(1)}^{4(1,1,1,1)} + 0\,.$$

Aplicând formula lui de Bruijn obţinem:

$$F_{2(1,1)}^{4(1,1,1,1)} = 16$$

$$F_{1(1)}^{4(1,1,1,1)} = 1\,.$$

Deci, $P = 3\cdot 16 - 3\cdot 1 = 45$.

Numărul căutat are deci valoarea:

$$N = 81 - 45 = 36\,.$$

Dar, numărul surjecţiilor între două mulţimi X şi Y cu $|X| = k$, $|Y| = n$, $k \geq n$ este dat de o formulă cunoscută, care se obţine aplicând principiul includerii şi al excluderii (vezi, de exemplu [1]).

Notând acest număr cu $\bar{a}_n^k$, avem următoarea formulă:

$$\bar{a}_n^k = n^k - C_n^1(n-1)^k + C_n^2(n-2)^k - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}.$$

În cazul nostru, avem:

$$N = \bar{a}_3^4 = 3^4 - C_3^1 \cdot 2^4 + C_3^2 = 81 - 3 \cdot 16 + 3 = 36 .$$

S-a obţinut acelaşi rezultat ca şi cel dedus prin aplicarea metodei generale,valabile şi pentru mulţimi multiple.

În încheiere propunem cititorului să efectueze calculele necesare aplicării formulei lui de Bruijn pentru verificarea numărului funcţiilor între două mulţimi multiple, corespunzând egalităţilor utilizate în acest articol:

$$F_{3(2,1)}^{4(2,1,1)} = 28;\ F_{2(1,1)}^{4(2,1,1)} = 12;\ F_{2(2)}^{4(2,1,1)} = 6;\ F_{1(1)}^{4(2,1,1)} = 1;\ F_{2(1,1)}^{4(1,1,1,1)} = 16;\ F_{1(1)}^{4(1,1,1,1)} = 1 .$$

De asemenea, propunem cititorului să calculeze numerele:

$$S_{4(2,1,1)}^{4(2,1,1)};\ S_{4(2,1,1)}^{5(2,1,1,1)}$$

şi să formuleze problemele corespunzătoare de numărare a surjecţiilor între două mulţimi multiple.Ce semnificaţie are faptul că în primul simbol avem k=n ?

Prezentul articol continuă problematica abordată în lucrările [2], [3], [4] privind numărarea bijecţiilor, injecţiilor şi funcţiilor între două mulţimi multiple.

Bibliografie

[1] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[2] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81

[3] V. M. Popa, *Numărarea injecţiilor între două mulţimi multiple*, Educaţia Matematică, vol. IV, nr. 2, Sibiu, 2008 (în curs de apariţie) şi în volumul Matematică aplicată, Sibiu, 2005

[4] V. M. Popa, *Numărarea funcţiilor între două mulţimi multiple*, Educaţia Matematică, vol. V, nr. 1, Sibiu, 2009 (în curs de apariţie)

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Mulţimi multiple şi mulţimi ordonate

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we define the multiple and / or ordered sets and we calculate the number of these sets. We also present some particular cases (applications).

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 06A07

1 Introducere

O mulţime multiplă este o mulţime pe care s-a definit o relaţie de echivalenţă.

O mulţime ordonată este o mulţime pe care s-a definit o relaţie de ordine.

În cele ce urmează vom detalia şi extinde aceste definiţii, obţinând unele noţiuni utile în aplicaţii.

2 Relaţie de echivalenţă definită pe o mulţime

Să considerăm o mulţime finită Y având n elemente: $|Y| = n$. Definim pe mulţimea Y o relaţie de echivalenţă (ρ_1). O astfel de relaţie este reflexivă, simetrică şi tranzitivă. După cum se ştie, ea determină o partiţie a mulţimii Y în m clase de echivalenţă Y_j, conţinând câte l_j elemente, adică $|Y_j| = l_j$, ($j = 1, 2, ..., m$), cu $1 \le m \le n$. Vom spune că relaţia de echivalenţă este de tipul n $(l_1, l_2, ..., l_m)$.

Elementele unei clase de echivalenţă vor fi denumite echivalente sau identice. În acest fel mulţimea Y devine mulţime multiplă, adică o mulţime în care elementele se pot repeta. Utilizând această terminologie, putem spune şi că mulţimea Y conţine m elemente distincte, elementul j repetându-se de l_j ori ($j = 1, 2, ..., m$) cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$.

Se spune că mulţimea Y devine multiplă prin relaţia de echivalenţă (ρ_1). O mulţime multiplă este indicată prin cuplul (Y,ρ_1), unde ρ_1 este relaţia de echivalenţă. Ea este deci o structură relaţională (de echivalenţă). În acest caz se spune că Y este mulţimea subiacentă a lui (Y,ρ_1).

Deci, într-o mulţime multiplă, nu toate elementele sunt distincte între ele, dar ordinea elementelor nu are importanţă.

Mai exact, vom spune că mulţimea Y este multiplă de tipul n $(l_1,l_2,...,l_m)$. Numerele $l_1,l_2,...,l_m$ constituie o partiţie a numărului natural n. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $l_1 \geq l_2 \geq ... \geq l_m$.

Mulţimea Y se numeşte total multiplă dacă $m = 1$.

Mulţimea Y se numeşte parţial multiplă dacă $1 < m < n$.

Mulţimea Y se numeşte nemultiplă dacă $m = n$. Aceasta este de fapt o mulţime în sensul obişnuit al cuvântului.

3 Relaţie de ordine definită pe o mulţime

Să considerăm o mulţime finită Y având n elemente: $|Y| = n$. Definim pe mulţimea Y o relaţie de ordine (strictă) (ρ_2) în felul următor.

Presupunem că există λ_1 elemente din mulţimea Y care preced restul elementelor din Y; există alte λ_2 elemente din Y care preced restul elementelor din Y (cu excepţia primelor λ_1 elemente); există alte λ_3 elemente din Y care preced restul elementelor din Y (cu excepţia primelor $\lambda_1 + \lambda_2$ elemente); ... ; există $\lambda_{\mu-1}$ elemente din Y care preced restul elementelor din Y (cu excepţia primelor $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{\mu-2}$ elemente). Vom spune că relaţia de ordine este de tipul $n(\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_\mu)$.

Relaţia de ordine strictă parţială definită mai sus este ireflexivă, asimetrică şi tranzitivă.

Observăm că elementele $x, y \in Y_i$ cu $|Y_i| = \lambda_i$ $(i = 1, 2, ..., \mu)$ nu sunt comparabile între ele prin relaţia definită mai sus. Mulţimile Y_i pot fi numite clase de ordine (sau „zone").

În această situaţie vom spune că mulţimea Y este ordonată, de tipul $n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)$, unde $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$.

Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_\mu$. Astfel, numerele $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu$ constituie o partiţie a numărului natural n.

Se spune că mulţimea Y devine ordonată prin relaţia de ordine (ρ_2). O mulţime ordonată este indicată prin cuplul (Y,ρ_2), unde ρ_2 este relaţia de ordine. Ea este deci o structură relaţională (de ordine). În acest caz se spune că Y este mulţimea subiacentă lui (Y,ρ_2).

Deci, într-o mulţime ordonată, toate elementele sunt distincte între ele, dar ordinea elementelor are importanţă.

Mulţimea Y se numeşte neordonată dacă $\mu = 1$.

Mulţimea Y se numeşte parţial ordonată dacă $1 < \mu < n$.

Mulţimea Y se numeşte total ordonată dacă $\mu = n$.

4 Relaţie de echivalenţă şi relaţie de ordine definite simultan pe o mulţime

Să presupunem acum că pe mulţimea Y definim simultan o relaţie de echivalenţă şi o relaţie de ordine, de tipul celor definite mai sus. Mulţimea va fi multiplă de tipul $n(l_1,l_2,...,l_m)$ şi ordonată de tipul $n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)$.Pe scurt, vom spune că mulţimea este de tipul $n(l_1,l_2,...,l_m)$ şi $n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)$.

Mulţimile multiple şi / sau ordonate le notăm simplu, prin scriere alăturată a elementelor componente. Ele se mai numesc în combinatorică şi „grupe” (de elemente, de obiecte).

Este clar că se pot defini 9 tipuri de mulţimi, după cum vom arăta mai jos.

a) Mulţime total multiplă, neordonată

Este o mulţime de tipul $n(n)$ şi $n(n)$.

Numărul mulţimilor de acest tip îl notăm cu $G^{n(n)}_{n(n)}$.

Se deduce uşor că avem $G^{n(n)}_{n(n)}=1$, indiferent de valoarea lui n.

De exemplu, $G^{4(4)}_{4(4)}=1$ şi avem mulţimea: $aaaa$.

b) Mulţime parţial multiplă, neordonată

Este o mulţime de tipul $n(l_1,l_2,...,l_m)$ şi $n(n)$.

Numărul mulţimilor de acest tip îl notăm cu $G^{n(n)}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$.

Se deduce uşor că avem $G^{n(n)}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}=1$.

De exemplu, $G^{4(4)}_{4(2,2)}=1$ şi avem mulţimea: $aabb$.

c) Mulţime nemultiplă, neordonată

Este o mulţime de tipul $n(1,1,...,1)$ şi $n(n)$.

Numărul mulţimilor de acest tip îl notăm $G^{n(n)}_{n(1,1,...,1)}$.

Se deduce uşor că avem $G^{n(n)}_{n(1,1,...,1)}=1$.

De exemplu, $G^{4(4)}_{4(1,1,1,1)}=1$ şi avem mulţimea: $abcd$.

d) Mulţime total multiplă, parţial ordonată

Este o mulţime de tipul $n(n)$ şi $n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)$.

Numărul mulţimilor de acest tip îl notăm cu $G^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}_{n(n)}$.

Se deduce uşor că avem $G^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}_{n(n)}=1$.

De exemplu, $G^{4(2,1,1)}_{4(4)}=1$ şi avem mulţimea: $aaaa$.

e) Mulţime parţial multiplă, parţial ordonată

Este o mulţime de tipul $n(l_1, l_2, ..., l_m)$ şi $n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$.

Numărul mulţimilor de acest tip îl notăm cu $G^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$.

Nu există o formulă pentru calculul acestui număr. El se poate calcula folosind algoritmul prezentat în [3]. Redăm mai jos acest algoritm.

Pentru calculul simbolului general standard $G^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$ se procedează astfel:

a) Se calculează polinomul $P = P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} ... P_{\lambda_\mu}$

unde $P_{\lambda_i} = P_{\lambda_i}(x_1, x_2, ..., x_{\lambda i})$ este polinomul de tip Newton, de grad λ_i, în λ_i nedeterminate.

Deci, $P = P(x_1, x_2, ..., x_\lambda)$ va avea gradul $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$ şi λ nedeterminate, unde $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$.

b) Se înlocuieşte în P:

$$x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$$
$$.....$$
$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Polinomul simetric de m nederminate $y_1, y_2, ..., y_m$ şi omogen de gradul n:

$$P_n = \sum_{1 \le i_1 \le ... \le i_n \le m} y_{i_1} y_{i_2} ... y_{i_n}$$

se poate exprima în funcţie de $x_1, x_2, ..., x_n$, unde:

$$x_i = \sum_{1 \le j \le m} y_j^i \qquad (i = 1,2,...,n)$$

având următoarea formă [2]:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+...+nk_n=n \\ k_1, k_2, ..., k_n \ge 0}} \frac{1}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! ... n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}$$

Numărul de termeni din sumă este $P(n)$, adică numărul de moduri diferite de a scrie pe n ca o sumă de numere naturale, în care ordinea termenilor nu are importanţă.

Aplicând fomula generală de mai sus, se obţin uşor primele patru polinoame de tip Newton:

$$P_1 = x_1$$
$$P_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$$

$$P_3 = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$$

$$P_4 = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4)$$

Menţionăm, fără a insista aici asupra acestui aspect, că aplicând metoda de numărare Pólya – de Bruijn [1] în cazul probemei noastre, se obţine în fond metoda de calcul expusă mai sus. Polinoamele P_{λ_i} apar ca polinoame indicatoare de cicluri pentru grupurile simetrice de permutări.

De exemplu, $G_{4(2,2)}^{4(2,1,1)} = 4$ şi avem mulţimile: $aabb$, $abab$, $abba$, $bbaa$.

Clasele de ordine (zonele) au lungimile (cardinalele) de 2, 1, 1 şi le avem permanent în minte la scrierea mulţimilor parţial ordonate de mai sus.

f) Mulţime nemultiplă, parţial ordonată

Este o mulţime de tipul $n(1,1,...,1)$ şi $n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$.

Numărul mulţimilor de acest tip îl notăm cu $G_{n(1,1,...,1)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$.

Se deduce uşor că avem $G_{n(1,1,...,1)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \frac{n!}{\lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot ... \cdot \lambda_\mu!}$.

De exemplu, $G_{4(1,1,1,1)}^{4(2,1,1)} = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = 12$ şi avem mulţimile:

$abcd$;	$abdc$;	$acbd$;	$acdb$;	$adbc$;	$adcb$;
$bcad$;	$bcda$;	$bdac$;	$bdca$;	$cdab$;	$cdba$.

g) Mulţime total multiplă, total ordonată

Este o mulţime de tipul $n(n)$ şi $n(1,1,...,1)$.

Numărul mulţimilor de acest tip îl notăm astfel: $G_{n(n)}^{n(1,1,...,1)}$.

Se deduce uşor că avem $G_{n(n)}^{n(1,1,...,1)} = 1$.

De exemplu, $G_{4(4)}^{4(1,1,1,1)} = 1$ şi avem mulţimea: $aaaa$.

h) Mulţime parţial multiplă, total ordonată

Este o mulţime de tipul $n(l_1, l_2, ..., l_m)$ şi $n(1,1,...,1)$.

Numărul mulţimilor de acest tip îl notăm astfel: $G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(1,1,...,1)}$.

Se deduce uşor că avem $G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(1,1,...,1)} = \frac{n!}{l_1! \cdot l_2! \cdot ... \cdot l_m!}$.

De exemplu, $G_{4(2,2)}^{4(1,1,1,1)} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ şi avem mulţimile:

$aabb$;	$abab$;	$abba$;	$baab$;	$baba$;	$bbaa$.

i) Mulţime nemultiplă, total ordonată

Este o mulţime de tipul $n(1,1,...,1)$ şi $n(1,1,...,1)$.

Numărul mulţimilor de acest tip îl notăm astfel: $G^{n(1,1,...,1)}_{n(1,1,...,1)}$.

Se deduce uşor că avem $G^{n(1,1,...,1)}_{n(1,1,...,1)} = n!$.

De exemplu, $G^{4(1,1,1,1)}_{4(1,1,1,1)} = 4! = 24$ şi avem mulţimile:

abcd ;	abdc ;	acbd ;	acdb ;	adbc ;	adcb ;
bacd ;	badc ;	bcad ;	bcda ;	bdac ;	bdca ;
cabd ;	cadb ;	cbad ;	cbda ;	cdab ;	cdba ;
dabc ;	dacb ;	dbac ;	dbca ;	dcab ;	dcba .

5 Concluzii

În lucrare s-au definit mulţimile multiple şi / sau ordonate şi s-a arătat că există 9 cazuri principiale posibile. S-a introdus o notaţie simplă pentru numărul acestor mulţimi şi s-a determinat acest număr, pentru fiecare caz în parte.În 8 cazuri numărul se calculează simplu.Pentru cazul mulţimii parţial multiple şi parţial ordonate se utilizează un algoritm expus în lucrare.

6 Bibliografie

[1] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică,Bucureşti, 1972

[2] D. E. Knuth, *Tratat de programarea calculatoarelor, vol. I*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

[3] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81.

[4] V. M. Popa, *Matematică aplicată*, Sibiu, 2005.

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Grupări generalizate

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we introduce generalized groupings by considering two dual combinatorial problems: the problem of object grouping and the problem of distributing objects into cells. We also present a calculating algorithm, a recurrence formula and applications.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

După cum se ştie, două probleme fundamentale din combinatorică sunt problema grupării obiectelor şi problema distribuirii obiectelor în căsuţe [1].

Aranjamentele, combinările şi permutările (atât cele simple cât şi cele cu repetiţie) se introduc de obicei considerând problema grupării obiectelor. Dar aceste concepte fundamentale au o interpretare la fel de simplă în cadrul problemei distribuirii obiectelor în căsuţe.

Tot pe baza acestor probleme vom introduce în continuare „grupările generalizate”. Vom demonstra că cele două probleme sunt echivalente, apoi vom arăta modul de calcul al grupărilor generalizate.

Obiectele pot fi diferite sau identice (de aceeaşi clasă) iar căsuţele se consideră distincte şi neordonate (nu are importanţă ordinea obiectelor dintr-o căsuţă). Dacă o căsuţă poate primi cel mult l_j obiecte, vom spune că această căsuţă are capacitatea l_j. Prin „grupă” de k obiecte vom înţelege o mulţime mai specială, în sensul că poate fi eventual ordonată şi poate conţine eventual şi obiecte identice. De asemenea, vom considera şi grupe împărţite în „zone”, în interiorul unei zone ordinea obiectelor neavând importanţă.

De exemplu, grupa: 112 13 23 are trei zone, conţinând trei, două şi respectiv două obiecte. Ea este identică cu grupa: 121 13 32 dar diferă de grupele: 112 12 33 şi 112 13 24.

Deci, două grupe sunt identice dacă (şi numai dacă) zonele corespunzătoare au aceeaşi componenţă. Aceste grupe sunt de fapt mulţimi parţial multiple şi parţial ordonate (a se vedea [4]).

2 Problema grupării obiectelor

Să considerăm o mulţime finită Y parţial multiplă de tipul $n(l_1, l_2, ..., l_m)$ [4]. Mulţimea Y conţine deci m clase de elemente. Se poate spune că mulţimea Y conţine m elemente distincte, elementul j repetându-se de l_j ori ($j = 1, 2, ..., m$) cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$.

Vom forma (pe rând) submulţimi parţial ordonate de tipul $k(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_\mu)$ ale mulţimii Y [4], $k \le n$.

Problema grupării obiectelor este de fapt problema formării acestor submulţimi.Aceste submulţimi sunt mulţimi parţial multiple (conţinând elemente din mulţimea Y) şi parţial ordonate de tipul $k(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_\mu)$. Ele se mai numesc în combinatorică şi „grupe” (de elemente, de obiecte). Le vom nota simplu, prin scrierea alăturată a elementelor componente.

Procedând sistematic, putem obţine lista exhaustivă a acestor submulţimi. Numărul elementelor din listă, deci numărul submulţimilor respective se notează prin simbolul următor: $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$. Aceste submulţimi (grupe) se mai numesc grupări generalizate.

În paranteză apar partiţii ale numerelor naturale n şi k. Ordinea numerelor din cele două paranteze nu are importanţă. Vom considera că avem:

$$l_1 \ge l_2 \ge ... \ge l_m ; \ \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge ... \ge \lambda_\mu .$$

3 Problema distribuirii obiectelor în căsuţe

Considerăm k obiecte (μ clase de obiecte, din clasa i având λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = k$) şi m căsuţe.

Se împart cele k obiecte în cele m căsuţe astfel încât căsuţa j să primească cel mult l_j obiecte (deci nici un obiect, unul sau mai multe, maximum l_j). Numărul de distribuiri posibile este: $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$, $k \le n$.

4 Demonstraţia echivalenţei dintre problema grupărilor şi cea a distribuirilor

Pe cazul cel mai general să considerăm în cazul problemei I (a grupărilor) următoarea grupare:

$$\underbrace{a_1 a_2 \ldots a_i}_{\lambda_1} \ldots \underbrace{1\,2\,3}_{\lambda_\mu} \ldots a_k$$

unde $a_i \in \{1,2,....,m\}$, i = 1,2,…,k.

În cazul problemei II (a distribuirilor) considerăm obiectele A_i (i = 1,2,…,k). Dacă $a_i = j$, $j \in \{1,2,...,m\}$, rezultă că obiectul A_i se plasează în căsuţa j. Pe baza acestui principiu fiecărei grupări îi corespunde o distribuire şi invers. Deci între mulţimea grupărilor şi cea a distribuirilor se poate stabili o corespondenţă biunivocă, ceea ce înseamnă că ele au acelaşi număr de elemente.

Exemplu: $G_{4(2,1,1)}^{3(2,1)} = 7$.

Vom construi sistematic două tabele, corespunzând celor două probleme.

I	II		
Obiecte: 1123	Obiecte: AAB		
112	AA	B	
113	AA		B
121	AB	A	
131	AB		A
123	A	A	B
132	A	B	A
231	B	A	A

În tabelul din stânga avem în vedere (fără a evidenţia în mod expres acest lucru) împărţirea grupelor în cele două zone de lungime 2, respectiv 1.

Deci, cele două probleme sunt echivalente (duale).

5 Calculul numărului $G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$

Înainte de a prezenta algoritmul de calcul, vom face observaţia că numărul de mai sus reprezintă şi numărul injecţiilor între două mulţimi multiple [3].

Deoarece deducerea algoritmului este făcută în lucrările [2] şi [3], redăm mai jos modul general de calcul şi apoi tratăm un exemplu concret.

a) Se calculează polinomul:

$$P = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot ... \cdot P_{\lambda_\mu} \cdot P_{n-k},$$

unde $P_{\lambda_i} = P_{\lambda_i}(x_1, x_2, ..., x_{\lambda_i})$ este polinomul de tip Newton, de grad λ_i, în λ_i nedeterminate şi la fel, $P_{n-k} = P_{n-k}(x_1, x_2, ..., x_{n-k})$.

Deci, $P = P(x_1, x_2, ..., x_\lambda)$ va avea gradul n şi λ nedeterminate, unde $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu, n-k)$.

b) Se înlocuieşte în P :

$$x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$$
$$\text{K K K K K K K K}$$
$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda.$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Polinomul general de tip Newton are forma [2]:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+...+nk_n=n \\ k_1, k_2, ..., k_n \geq 0}} \frac{1}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! ... n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}.$$

Aplicând formula generală de mai sus se obţin uşor primele patru polinoame de tip Newton:

$$P_1 = x_1$$
$$P_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$$
$$P_3 = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1 x_2 + 2x_3)$$
$$P_4 = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_1^2 x_2 + 8x_1 x_3 + 3x_2^2 + 6x_4)$$

Menţionăm, fără a insista aici asupra acestui aspect, că aplicând metoda de numărare Pólya– de Bruijn [1] în cazul problemei noastre, se obţine în fond metoda de calcul expusă mai sus. Polinoamele de tip Newton apar ca polinoame indicatoare de cicluri pentru grupurile simetrice de permutări.

6 Formulă de recurenţă

Există următoarea formulă de recurenţă, care rezultă imediat din definiţie:

$$G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = \sum_R G_{k(x_1, x_2, ..., x_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$$

unde R este mulţimea soluţiilor $(x_1, x_2, ..., x_m)$ în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condiţiile: $0 \leq x_i \leq l_i$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulţimea R a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are |R| termeni (cardinalul mulţimii R).

Avem:

$$|R| = C^{k}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}.$$

În formula de mai sus pentru |R| apar combinările generalizate, care sunt un caz particular al grupărilor generalizate, pentru $\mu = 1$.

Formula de recurenţă furnizează şi ea o metodă pentru calculul numărului grupărilor generalizate, respectiv al injecţiilor între două mulţimi multiple.

7 Aplicaţii

În continuare, vom calcula numărul $N = G^{4(2,1,1)}_{5(2,2,1)}$ utilizând algoritmul expus şi respectiv formula de recurenţă.

Vom utiliza la început algoritmul prezentat mai sus în acest articol (metoda polinoamelor de tip Newton).

Avem:

$$P = P_2 \cdot P_1^3 = \frac{1}{2}\left(x_1^5 + x_1^3 x_2\right)$$

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

$$P = \frac{1}{2}\left[(y_1 + y_2 + y_3)^5 + (y_1 + y_2 + y_3)^3\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)\right]$$

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{5!}{2!\,2!\,1!} + \frac{3!}{0!\,2!\,1!} + \frac{3!}{2!\,0!\,1!}\right) = 18.$$

Vom calcula acelaşi număr utilizând a doua metodă de calcul, respectiv formula de recurenţă. Putem scrie:

$$G^{4(2,1,1)}_{5(2,2,1)} = \sum_{R} G^{4(2,1,1)}_{4(x_1, x_2, x_3)},$$

unde R este mulţimea soluţiilor în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$

cu condiţiile: $0 \le x_1 \le 2$, $0 \le x_2 \le 2$, $0 \le x_3 \le 1$.

Avem: $|R| = C^{4}_{5(2,2,1)} = 3$.

Mulţimea R este: $R = \{(1,2,1), (2,1,1), (2,2,0)\}$.

Deci, putem scrie:

$$N = G^{4(2,1,1)}_{4(1,2,1)} + G^{4(2,1,1)}_{4(2,1,1)} + G^{4(2,1,1)}_{4(2,2,0)} = 2 \cdot G^{4(2,1,1)}_{4(2,1,1)} + G^{4(2,1,1)}_{4(2,2)}.$$

Dar, putem obţine uşor, folosind metoda polinoamelor de tip Newton:

$$G^{4(2,1,1)}_{4(2,1,1)} = 7;\ G^{4(2,1,1)}_{4(2,2)} = 4.$$

Deci, $N = 2 \cdot 7 + 4 = 18$.

S-a obţinut acelaşi rezultat ca şi cel dedus prin utlilizarea primei metode (metoda polinoamelor de tip Newton).

Tabelele cu grupări, respectiv cu distribuiri, sunt redate în continuare.

I	II		
Obiecte:11223	Obiecte: AABC		
1122	AA	BC	
1123	AA	B	C
1132	AA	C	B
1212	AB	AC	
1213	AB	A	C
1221	AC	AB	
1223	A	AB	C
1231	AC	A	B
1232	A	AC	B
1312	AB	C	A
1321	AC	B	A
1322	A	BC	A
2211	BC	AA	
2213	B	AA	C
2231	C	AA	B
2311	BC	A	A
2312	B	AC	A
2321	C	AB	A

Ca observaţie finală vom spune că simbolul studiat în prezentul articol generalizează conceptele clasice de aranjamente, combinări, permutări, simple şi cu repetiţie.

Bibliografie

[1] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[2] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81.

[3] V. M. Popa, *Numărarea injecţiilor între două mulţimi multiple*, Educaţia Matematică, vol. IV, nr. 2, Sibiu, 2008 (în curs de apariţie) şi în volumul Matematică aplicată, Sibiu, 2005

[4] V. M. Popa, *Mulţimi multiple şi mulţimi ordonate*, Educaţia Matematică,vol.V,nr. 2, Sibiu, 2009 (în curs de apariţie)

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Grupări barate generalizate

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we introduce generalized barred groupings by considering two dual combinatorial problems: the problem of object grouping and the problem of distributing objects into cells, both with two supplementary conditions. We also present a recurrence formula and applications.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

După cum se ştie, două probleme fundamentale din combinatorică sunt problema grupării obiectelor şi problema distribuirii obiectelor în căsuţe [1],[4].

În lucrarea [4] s-au prezentat aceste două probleme şi s-au introdus grupările generalizate notate prin $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$.

Tot pe baza acestor probleme vom introduce în continuare „grupările barate generalizate”. Vom demonstra că cele două probleme de grupare a obiectelor, respectiv de distribuire a obiectelor în căsuţe (în cazul de faţă cu o condiţie suplimentară faţă de problemele prezentate în [4]) sunt echivalente, apoi vom arăta modul de calcul al grupărilor barate generalizate.

Obiectele pot fi diferite sau identice (de aceeaşi clasă) iar căsuţele se consideră distincte şi neordonate (nu are importanţă ordinea obiectelor dintr-o căsuţă). Dacă o căsuţă poate primi cel mult l_j obiecte, vom spune că această căsuţă are capacitatea l_j. Ca şi în lucrarea [4], prin „grupă” de k obiecte vom înţelege o mulţime mai specială, în sensul că poate fi eventual ordonată şi poate conţine eventual şi obiecte identice. De asemenea, vom considera şi grupe împărţite în „zone”, în interiorul unei zone ordinea obiectelor neavând importanţă. Reamintim că avem o condiţie suplimentară şi anume ca fiecare grupă (submulţime) de tipul $k(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_\mu)$ să conţină cel puţin câte un element din fiecare clasă din mulţimea parţial multiplă Y de tipul $n(l_1, l_2, ..., l_m)$, $k \le n$, $k \ge m$.

De exemplu, grupa:

112 13 23

are trei zone, conţinând trei, două şi respectiv două obiecte. Ea este identică cu grupa:

121 13 32

dar diferă de grupa:

112 12 33.

Deci, două grupe sunt identice dacă (şi numai dacă) zonele corespunzătoare au aceeaşi componenţă. Aceste grupe sunt de fapt mulţimi parţial multiple şi parţial ordonate (a se vedea [3]).

2 Problema grupării obiectelor

Să considerăm o mulţime finită Y parţial multiplă de tipul $n(l_1, l_2, ..., l_m)$ [3]. Mulţimea Y conţine deci m clase de elemente. Se poate spune că mulţimea Y conţine m elemente distincte, elementul j repetându-se de l_j ori ($j = 1, 2, ..., m$) cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$.

Vom forma (pe rând) submulţimi parţial ordonate de tipul $k(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_\mu)$ ale mulţimii Y [3], cu condiţia suplimentară că fiecare submulţime să conţină cel puţin câte un element din fiecare clasă din mulţimea Y, $k \le n$, $k \ge m$.

Problema grupării obiectelor este de fapt problema formării acestor submulţimi, cu condiţia suplimentară amintită mai sus. Aceste submulţimi sunt mulţimi parţial multiple (conţinând elemente din mulţimea Y) şi parţial ordonate de tipul $k(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_\mu)$. Ele se mai numesc în combinatorică şi „grupe” (de elemente,de obiecte). Le vom nota simplu, prin scrierea alăturată a elementelor componente.

Procedând sistematic, putem obţine lista exhaustivă a acestor submulţimi, cu condiţia suplimentară de mai sus. Numărul elementelor din listă, deci numărul submulţimilor respective se notează prin simbolul următor: $\overline{G}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$. Aceste submulţimi (grupe) se numesc grupări barate generalizate.

În paranteză apar partiţii ale numerelor naturale n şi k.Ordinea numerelor din cele două paranteze nu are importanţă.Vom considera că avem:

$$l_1 \ge l_2 \ge ... \ge l_m ; \ \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge ... \ge \lambda_\mu .$$

3 Problema distribuirii obiectelor în căsuţe

Considerăm k obiecte (μ clase de obiecte, din clasa i având λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = k$) şi m căsuţe.

Se împart cele k obiecte în cele m căsuţe astfel încât căsuţa j să primească cel puţin un obiect şi cel mult l_j obiecte (deci un obiect sau mai multe, maximum l_j). Numărul de distribuiri posibile este: $\overline{G}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$, $k \le n$, $k \ge m$.

4 Demonstraţia echivalenţei dintre problema grupărilor şi cea a distribuirilor

Pe cazul cel mai general să considerăm în cazul problemei I (a grupărilor) următoarea grupare:

$$\{\underbrace{a_1 a_2 \ldots a_i}_{\lambda_1} \ldots \underbrace{1\,2\,3}_{\lambda_\mu} \ldots a_k\}$$

unde $a_i \in \{1,2,....,m\}$, i = 1,2,…,k şi fiecare valoare 1,2,…,m este luată cel puţin o dată.

În cazul problemei II (a distribuirilor) considerăm obiectele A_i (i = 1,2,…,k). Dacă $a_i = j$, $j \in \{1,2,...,m\}$, rezultă că obiectul A_i se plasează în căsuţa j. Pe baza acestui principiu fiecărei grupări îi corespunde o distribuire şi invers. Deci între mulţimea grupărilor şi cea a distribuirilor se poate stabili o corespondenţă biunivocă, ceea ce înseamnă că ele au acelaşi număr de elemente. În tabelul din dreapta nu vor exista căsuţe goale.

Exemplu:

$$\overline{G}_{6(2,2,2)}^{4(3,1)} = 9\,.$$

Vom construi sistematic două tabele, corespunzând celor două probleme.

I	II		
Obiecte: 112233	Obiecte: AAAB		
1132	AA	B	A
1332	A	B	AA
1123	AA	A	B
1231	AB	A	A
1233	A	A	AB
1232	A	AB	A
2331	B	A	AA
1223	A	AA	B
2231	B	AA	A

În tabelul din stânga avem în vedere (fără a evidenţia în mod expres acest lucru) împărţirea grupelor în cele două zone de lungime 2, respectiv 1. Fiecare grupă conţine toate obiectele 1,2,3. În tabelul din dreapta fiecare casuţă conţine cel puţin un obiect (nu există casuţe goale).

Deci, cele două probleme sunt echivalente (duale)

5 Formulă de recurenţă

Există următoarea formulă de recurenţă, care rezultă imediat din definiţie:

$$\overline{G}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = \sum_{R} G_{k(x_1, x_2, ..., x_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$$

unde $\overline{R}$ este mulţimea soluţiilor $(x_1, x_2, ..., x_m)$ în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condiţiile: $1 \le x_i \le l_i$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulţimea $\overline{R}$ a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are $|\overline{R}|$ termeni (cardinalul mulţimii R).

Avem:

$$|\overline{R}| = \overline{C}^{k}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}.$$

În formula de mai sus apar combinările barate generalizate, care sunt un caz particular al grupărilor barate generalizate, pentru $\mu = 1$.

Formula de recurenţă furnizează o metodă pentru calculul numărului grupărilor barate generalizate.

6 Calculul numărului $G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$

Vom indica modul de calcul al numerelor de forma $G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$ (notaţii adaptate) care intervin în relaţia de recurenţă. Înainte de a prezenta algoritmul de calcul, vom face observaţia că numărul de mai sus reprezintă şi numărul bijecţiilor între două mulţimi multiple [2].

Deoarece deducerea algoritmului este facută în lucrarea [2], redăm mai jos modul general de calcul al acestui număr.

a) Se calculează polinomul $P = P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} ... P_{\lambda_\mu}$

unde $P_{\lambda_i} = P_{\lambda_i}(x_1, x_2, ..., x_{\lambda i})$ este polinomul de tip Newton, de grad λ_i, în λ_i nedeterminate.

Deci, $P = P(x_1, x_2, ..., x_\lambda)$ va avea gradul $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$ şi λ nedeterminate, unde $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$.

b) Se înlocuieşte în P:

$$x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$$
$$.....$$
$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Polinomul simetric de m nederminate $y_1, y_2, ..., y_m$ şi omogen de gradul n:

$$P_n = \sum_{1 \le i_1 \le ... \le i_n \le m} y_{i_1} y_{i_2} ... y_{i_n}$$

se poate exprima în funcţie de $x_1, x_2, ..., x_n$, unde:

$$x_i = \sum_{1 \le j \le m} y_j^i \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

având următoarea formă [2]:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1,k_2,\ldots,k_n\geq 0}} \frac{1}{1^{k_1}\,k_1!\,2^{k_2}\,k_2!\ldots n^{k_n}\,k_n!}\,x_1^{k_1}\,x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$$

Numărul de termeni din sumă este $P(n)$, adică numărul de moduri diferite de a scrie pe n ca o sumă de numere naturale, în care ordinea termenilor nu are importanţă.

Aplicând fomula generală de mai sus, se obţin uşor primele patru polinoame de tip Newton:

$$P_1 = x_1$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$$

$$P_3 = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$$

$$P_4 = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4)$$

Menţionăm, fără a insista aici asupra acestui aspect, că aplicând metoda de numărare Pólya – de Bruijn [1] în cazul probemei noastre, se obţine în fond metoda de calcul expusă mai sus. Polinoamele P_{λ_i} apar ca polinoame indicatoare de cicluri pentru grupurile simetrice de permutări.

7 Aplicaţie

În continuare, vom calcula numărul $N = \overline{G}^{7(5,2)}_{8(3,3,2)}$ utilizând formula de recurenţă şi algoritmul expus.

Putem scrie:

$$\overline{G}^{7(5,2)}_{8(3,3,2)} = \sum_{\overline{R}} G^{7(5,2)}_{7(x_1,x_2,x_3)},$$

unde $\overline{R}$ este mulţimea soluţiilor în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,$$

cu condiţiile: $1 \le x_1 \le 3$, $1 \le x_2 \le 3$, $1 \le x_3 \le 2$.

Avem: $\left|\overline{R}\right| = \overline{C}^{7}_{8(3,3,2)} = 3$.

Mulţimea R este: $R = \{(3,3,1),(3,2,2),(2,3,2)\}$.

Deci, putem scrie:

$$N = G^{7(5,2)}_{7(3,3,1)} + G^{7(5,2)}_{7(3,2,2)} + G^{7(5,2)}_{7(2,3,2)} = 2\cdot G^{7(5,2)}_{7(3,2,2)} + G^{7(5,2)}_{7(3,3,1)}.$$

Dar, putem obţine uşor, folosind metoda polinoamelor de tip Newton:

$$G^{7(5,2)}_{7(3,2,2)} = 6;\ G^{7(5,2)}_{7(3,3,1)} = 5.$$

Deci, $N = 2\cdot 6 + 5 = 17$.

Tabelele cu grupări, respectiv cu distribuiri, sunt redate în continuare.

I	II		
Obiecte:11122233	Obiecte: AAAAABB		
1113322	AAA	BB	AA
1112323	AAA	AB	AB
1112322	AAA	ABB	A
1123312	AAB	AB	AA
1123322	AA	ABB	AA
1112233	AAA	AA	BB
1112223	AAA	AAB	B
1122313	AAB	AA	AB
1122312	AAB	AAB	A
1122323	AA	AAB	AB
1223311	ABB	AA	AA
1223312	AB	AAB	AA
1122213	AAB	AAA	B
1122233	AA	AAA	BB
1222311	ABB	AAA	A
1222313	AB	AAA	AB
2223311	BB	AAA	AA

Ca observaţie finală vom spune că simbolul studiat în prezentul articol generalizează conceptele urmatoare: aranjamente barate generalizate, combinări barate generalizate, grupări barate cu repetiţie generalizate.

Bibliografie

[1] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[2] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81.

[3] V. M. Popa, *Mulţimi multiple şi mulţimi ordonate*, Educaţia Matematică,vol.V,nr. 2, Sibiu, 2009 (în curs de apariţie) şi în prezentul volum

[4] V. M. Popa, *Grupări generalizate*, Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Cazuri speciale ale grupărilor generalizate

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we consider several special cases of generalized groupings. We also present two special cases of recurrence formula and applications.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

În unele lucrări anterioare ([1],[2],[3],[4]) s-au introdus aranjamentele generalizate, combinările generalizate, permutările generalizate şi grupările generalizate. Acestea au fost introduse pe baza a două probleme fundamentale din combinatorică: problema grupării obiectelor şi problema distribuirii obiectelor în căsuţe. S-au arătat relaţiile de generalizare între aceste concepte precum şi modul în care acestea generalizează noţiunile fundamentale de aranjamente, combinări şi permutări, simple şi cu repetiţie.

În prezenta lucrare vom introduce două noţiuni noi: grupările simple generalizate şi grupările cu repetiţie generalizate şi vom arăta relaţiile care există între aceste noi noţiuni şi conceptele amintite mai sus. Vom prezenta un tabel de generalizare şi vom pune în evidenţă toate relaţiile de generalizare/particularizare care sunt valabile între mărimile din tabel, sub forma generală. Vom prezenta două forme speciale (particulare) ale relaţiei de recurenţă pentru aranjamentele cu repetiţie şi permutările cu repetiţie. Vom deduce astfel o egalitate interesantă, cu substrat combinatorial. La capitolul aplicaţii vom arăta cazuri concrete (particulare) de aducere la forma generală (a grupărilor generalizate) pentru toate conceptele speciale din tabelul de generalizare.

2 Cazuri speciale

Grupările simple generalizate (membrul stâng) se introduc pe baza relaţiei:

$$G_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = G_{n(l,l,...,l)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)},\ m = n,\ k \le n.$$

După cum se observă, grupările simple generalizate sunt un caz particular al grupărilor generalizate. Ele generalizează noţiunile de aranjamete, combinări şi permutări simple.

Grupările cu repetiţie generalizate (membrul stâng) se introduc pe baza relaţiei:

$$g_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = G_{n(k,k,...,k)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)},\ mk = n.$$

De asemenea, după cum se observă şi grupările cu repetiţie generalizate sunt un caz particular al grupărilor generalizate. Ele generalizează noţiunile de aranjamente, combinări şi permutări cu repetiţie

Există formulele de calcul [1] :

$$G_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!...\lambda_\mu!(n-k)!},\ k \le n$$

$$g_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = c_m^{\lambda_1} c_m^{\lambda_2} ... c_m^{\lambda_\mu}.$$

Evident, atât pentru grupările simple generalizate cât şi pentru grupările cu repetiţie generalizate se pot formula problemele corespunzătoate de grupare a obiectelor, respectiv de distribuire a obiectelor în căsuţe.

Toate grupările definite anterior pot fi sistematizate într-un tabel recapitulativ din care rezultă şi cum unele le generalizează pe altele.

$G_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$	$g_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$	$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$
A_n^k	a_m^k	$A_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^k$
C_n^k	c_m^k	$C_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^k$
P_n	p_m	$P_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$

Din definiţie, rezultă următoarele relaţii de generalizare:

1. $G_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = G_{n(l,l,...,l)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ $(m = n)$
2. $A_n^k = G_n^{k(l,l,...,l)}$ $(\mu = k)$
3. $C_n^k = G_n^{k(\lambda_1)}$ $(\mu = 1,\ k = \lambda_1)$

4-5. $P_n = A_n^n$

6. $g_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = G_{n(k,k,...,k)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ $(mk = n)$

7. $a_m^k = g_m^{k(l,l,...,l)}$ $(\mu = k)$

8. $c_m^k = g_m^{k(\lambda_1)}$ $(\mu = 1,\ k = \lambda_1)$

9-10. $p_m = a_m^m$

11. $A_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^k = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(l,l,...,l)}$ $(\mu = k)$

12. $C_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^k = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1)}$ $(\mu = 1,\ k = \lambda_1)$

13. $P_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = A_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^n$

14. $A_n^k = A_{n(l,l,...,l)}^k$ $(m = n)$

15. $a_m^k = A_{n(k,k,...,k)}^k$ $(mk = n)$

16. $C_n^k = C_{n(l,l,...,l)}^k$ $(m = n)$

17. $c_m^k = C_{n(k,k,...,k)}^k$ $(mk = n)$

18. $P_n = P_{n(l,l,...,l)}$ $(m = n)$

19. $p_m = \sum_R P_{m(x_1,x_2,...,x_m)}$, unde R este mulţimea soluţiilor în numere naturale ale ecuaţiei $x_1 + x_2 + ... + x_m = m$, unde $0 \le x_i \le m$, i = 1, 2, ..., m; numărul soluţiilor ecuaţiei este $|R| = c_m^m$).

În relaţiile de generalizare de mai sus apar două relaţii numerotate dublu: 4-5 şi 9-10. Am făcut această numerotare dublă, pentru a exista o corespondenţă cu tabelul de la capitolul Aplicaţii, care urmează în lucrare (capitolul 4).

După cum se observă, simbolul cel mai general este cel din colţul din dreapta sus al tabelului, adică:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}.$$

El generalizează toate celelalte 11 simboluri din tabel şi reprezintă evident grupările generalizate. După cum se ştie, el reprezintă în acelaşi timp şi numărul injecţiilor între două mulţimi multiple [4]. Prin formula de complementaritate poate fi adus la forma standard $k = n$ care reprezintă numărul bijecţiilor între două mulţimi multiple [1]

3 Relaţie de recurenţă, cazuri speciale

Pentru grupările generalizate există relaţia de recurenţă [4]:

$$G_{n(l_1,\ l_2,\ ...,\ l_m)}^{k(\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_\mu)} = \sum_R G_{k(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m)}^{k(\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_\mu)}$$

unde R este mulţimea soluţiilor $(x_1, x_2, ..., x_m)$ în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condiţiile: $0 \le x_i \le l_i$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulţimea R a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are |R| termeni (cardinalul mulţimii R).

Avem:

$$\left|R\right| = C^{k}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}.$$

În formula de mai sus pentru |R| apar combinările generalizate, care sunt un caz particular al grupărilor generalizate, pentru $\mu = 1$.

Formula de recurenţă furnizează o metodă pentru calculul numărului grupărilor generalizate (şi pentru numărul injecţiilor între două mulţimi multiple).

a). Vom particulariza relaţia de mai sus.Avem:

$$G^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}_{n(k,k,...,k)} = g^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}_{m}, \text{ unde } mk = n.$$

În particular:

$$G^{k(1,1,...,1)}_{n(k,k,...,k)} = g^{k(1,1,...,1)}_{m}, \text{ unde } mk = n.$$

Aplicăm relaţia generală:

$$G^{k(1,1,...,1)}_{n(k,k,...,k)} = \sum_{R} G^{k(1,1,...,1)}_{k(x_1, x_2, ..., x_m)}$$

unde R este mulţimea soluţiilor $(x_1, x_2, ..., x_m)$ în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condiţiile: $0 \le x_i \le k$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulţimea R a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are |R| termeni (cardinalul mulţimii R).

Avem:

$$\left|R\right| = C^{k}_{n(k,k,...,k)} = c^{k}_{m}.$$

Dar:

$$g^{k(l,l,...,l)}_{m} = a^{k}_{m} = m^{k} = \sum_{R} G^{k(1,1,...,1)}_{k(x_1,x_2,...,x_m)} = \sum_{R} \frac{k!}{x_1!x_2!...x_m!}.$$

Deci, obţinem:

$$\sum_{R} \frac{k!}{x_1!x_2!...x_m!} = m^{k}$$

unde R este mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x_1 + x_2 + ... + x_m = k$; $0 \le x_i \le k$; $i = 1,2,..., m$;

$\left|R\right| = c^{k}_{m}$.

S-a obţinut în acest fel o egalitate interesantă cu substrat combinatorial.

b). Putem particulariza în continuare, făcând $k = m$. Obţinem:

$$p_m = a^{m}_{m} = m^{m} = \sum_{R} \frac{m!}{x_1!x_2!...x_m!}$$

unde R este mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x_1 + x_2 + ... + x_m = m$; $0 \le x_i \le m$; $i = 1,2,..., m$;

$\left|R\right| = c^{m}_{m}$.

Se poate deci scrie:

$$p_m = \sum_R P_m(x_1, x_2, ..., x_m)$$

unde R este mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x_1 + x_2 + ... + x_m = m$; $0 \le x_i \le m$; $i = 1,2,...,m$; $|R| = c_m^m$.

În acest fel am exprimat permutările cu repetiţie cu ajutorul permutărilor generalizate (ca o sumă de permutări generalizate).

4 Aplicaţii

Vom arăta câteva exemple concrete de reducere la cazul grupărilor generalizate şi apoi la cazul standard.

1. $G_5^{3(2,1)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{3(2,1)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{5(2,1,2)} = 30$
2. $A_5^3 = G_5^{3(1,1,1)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{3(1,1,1)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{5(1,1,1,2)} = 60$
3. $C_5^3 = G_5^{3(3)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{3(3)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{5(3,2)} = 10$
4. $P_5 = A_5^5 = G_5^{5(1,1,1,1,1)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{5(1,1,1,1,1)} = 120$
5. $P_5 = A_5^5 = A_{5(1,1,1,1,1)}^5 = G_{5(1,1,1,1,1)}^{5(1,1,1,1,1)} = 120$
6. $g_5^{3(2,1)} = G_{15(3,3,3,3,3)}^{3(2,1)} = G_{15(3,3,3,3,3)}^{15(2,1,12)} = 75$
7. $a_5^3 = g_5^{3(1,1,1)} = G_{15(3,3,3,3,3)}^{3(1,1,1)} = G_{15(3,3,3,3,3)}^{15(1,1,1,12)} = 125$
8. $c_5^3 = g_5^{3(3)} = G_{15(3,3,3,3,3)}^{3(3)} = G_{15(3,3,3,3,3)}^{15(3,12)} = 35$
9. $p_5 = a_5^5 = g_5^{5(1,1,1,1,1)} = G_{25(5,5,5,5,5)}^{5(1,1,1,1,1)} = G_{25(5,5,5,5,5)}^{25(1,1,1,1,1,20)} = 3125$
10. $p_5 = a_5^5 = A_{25(5,5,5,5,5)}^5 = G_{25(5,5,5,5,5)}^{5(1,1,1,1,1)} = G_{25(5,5,5,5,5)}^{25(1,1,1,1,1,20)} = 3125$
11. $A_{5(2,2,1)}^3 = G_{5(2,2,1)}^{3(1,1,1)} = G_{5(2,2,1)}^{5(1,1,1,2)} = 18$
12. $C_{5(2,2,1)}^3 = G_{5(2,2,1)}^{3(3)} = G_{5(2,2,1)}^{5(3,2)} = 5$
13. $P_{5(2,2,1)} = A_{5(2,2,1)}^5 = G_{5(2,2,1)}^{5(1,1,1,1,1)} = 30$
14. $A_5^3 = A_{5(1,1,1,1,1)}^3 = G_{5(1,1,1,1,1)}^{3(1,1,1)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{5(1,1,1,2)} = 60$
15. $a_5^3 = A_{15(3,3,3,3,3)}^3 = G_{15(3,3,3,3,3)}^{3(1,1,1)} = G_{15(3,3,3,3,3)}^{15(1,1,1,12)} = 125$
16. $C_5^3 = C_{5(1,1,1,1,1)}^3 = G_{5(1,1,1,1,1)}^{3(3)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{5(3,2)} = 10$
17. $c_5^3 = C_{15(3,3,3,3,3)}^3 = G_{15(3,3,3,3,3)}^{3(3)} = G_{15(3,3,3,3,3)}^{15(3,12)} = 35$

18. $P_5 = P_{5(1,1,1,1,1)} = A^5_{5(1,1,1,1,1)} = G^{5(1,1,1,1,1)}_{5(1,1,1,1,1)} = 120$

19. $p_5 = \sum_R P_{5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)} = \sum_R A^5_{5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)} = \sum_R G^{5(1,1,1,1,1)}_{5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)} =$

$= G^{5(1,1,1,1,1)}_{25(5,5,5,5,5)} = G^{25(1,1,1,1,1,20)}_{25(5,5,5,5,5)} = 3125$

unde R este mulţimea soluţiilor ecuaţiei: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$, cu condiţiile: $0 \le x_i \le 5$, $i = 1,2,...,m$, $|R| = c_5^5$.

Pentru înţelegerea profundă a conţinutului acestei lucrări propunem cititorului rezolvarea următoarelor teme.

1.Să se formuleze problema grupării obiectelor pentru fiecare din cele 11 cazuri speciale din tabelul de generalizare.

2.Să se formuleze problema distribuirii obiectelor în căsuţe pentru fiecare din cele 11 cazuri speciale din tabelul de generalizare.

3.Să se particularizeze formula de recurenţă valabilă pentru grupările generalizate pentru fiecare din cele 11 cazuri speciale din tabelul de generalizare. De fapt, pentru cazul aranjamentelor cu repetiţie şi pentru cazul permutărilor cu repetiţie, particularizările respective sunt deja făcute (la capitolul 3 din lucrare).

În final mai facem observaţia că în conformitate cu cele arătate anterior, numărul de distribuiri a k obiecte diferite în m căsuţe este egal cu $a_m^k = m^k$. Acest număr este determinat printr-o altă metodă în articolul „Posibilităţile de distribuire a n obiecte la k persoane” de Tudor Zamfirescu, din Gazeta Matematică nr. 11/1965. Metoda respectivă este în orice caz mai laborioasă decât aplicarea formulei de mai sus.

Bibliografie

[1] V. M. Popa, *Matematică aplicată*, Sibiu, 2005

[2] V. M. Popa, *Aranjamente generalizate*, Educaţia Matematică, vol. I, nr. 2, Sibiu, 2005

[3] V. M. Popa, *Combinări generalizate*, Educaţia Matematică, vol.II, nr. 1-2, Sibiu, 2006

[4] V. M. Popa, *Grupări generalizate*, Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Cazuri speciale ale grupărilor barate generalizate

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we consider several special cases of generalized barred groupings. We also present three special cases of recurrence formula and applications.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

Într-o lucrare anterioară [4] s-au introdus grupările barate generalizate. Acestea au fost introduse pe baza a două probleme fundamentale duale din combinatorică: problema grupării obiectelor şi problema distribuirii obiectelor în căsuţe (în cazul de faţă cu o condiţie suplimentară faţă de cazul grupărilor generalizate). Vom introduce în lucrarea de faţă noţiunile de grupări barate cu repetiţie generalizate, aranjamente barate generalizate şi combinări barate generalizate. Vom arăta relaţiile de generalizare între grupările barate generalizate şi aceste concepte precum şi modul în care acestea generalizează noţiunile fundamentale de aranjamente şi combinări barate cu repetiţie.

Vom prezenta un tabel de generalizare şi vom pune în evidenţă toate relaţiile de generalizare/particularizare care sunt valabile între mărimile din tabel, sub forma generală. Vom prezenta forma generală şi o formă specială (particulară) a relaţiei de recurenţă valabilă pentru aranjamentele barate cu repetiţie, pentru aranjamentele barate generalizate şi pentru combinările barate generalizate. Vom deduce astfel o egalitate interesantă, cu substrat combinatorial şi respectiv vom pune în evidenţă două formule de calcul. La capitolul aplicaţii vom arăta cazuri concrete (particulare) de aducere la forma generală (a grupărilor barate generalizate) pentru toate conceptele speciale din tabelul de generalizare.

2 Cazuri speciale

Grupările barate cu repetiţie generalizate (membrul stâng) se introduc pe baza relaţiei:

$$\bar{g}_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \bar{G}_{n(k-m+1,k-m+1,...,k-m+1)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)},\ m(k-m+1)=n.$$

Grupările barate cu repetiţie generalizate sunt un caz particular al grupărilor generalizate. Ele generalizează noţiunile de aranjamente şi combinări barate cu repetiţie.

Aranjamentele barate generalizate (membrul stâng) se introduc pe baza relaţiei:

$$\bar{A}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k} = \bar{G}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(l,l,...,l)}.$$

Ele sunt deci un caz particular al grupărilor barate generalizate şi generalizează aranjamentele barate cu repetiţie.

Combinările barate generalizate (membrul stâng) se introduc pe baza relaţiei:

$$\bar{C}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k} = \bar{G}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1)}.$$

Ele sunt deci un caz particular al grupărilor barate generalizate şi generalizează combinările barate cu repetiţie.

În ce priveşte aranjamentele barate cu repetiţie şi combinarile barate cu repetiţie (numite astfel în lucrarea de faţă), ele reprezintă de fapt numărul surjecţiilor între două mulţimi, respectiv numărul surjecţiilor crescătoare între două mulţimi şi sunt noţiuni clasice şi bine cunoscute în combinatorică [1].

Există formulele de calcul [1]:

$$\bar{g}_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i} C_m^i c_i^{\lambda_1} c_i^{\lambda_2} ... c_i^{\lambda_\mu}\ ;\ k \ge m$$

$$\bar{a}_m^{k} = m^k - C_m^1 (m-1)^k + C_m^2 (m-2)^k - ... + (-1)^{m-1} C_m^{m-1};\ k \ge m$$

$$\bar{c}_m^{k} = C_{k-1}^{m-1};\ k \ge m.$$

Evident, pentru toate noţiunile introduse mai sus se pot formula problemele corespunzătoate de grupare a obiectelor, respectiv de distribuire a obiectelor în căsuţe.

Toate grupările definite anterior pot fi sistematizate într-un tabel recapitulativ din care rezultă şi cum unele le generalizează pe altele.

$\bar{g}_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$	$\bar{G}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$
$\bar{a}_m^{k}$	$\bar{A}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k}$
$\bar{c}_m^{k}$	$\bar{C}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k}$

Din definiţie, rezultă următoarele relaţii de generalizare:

1. $\bar{g}_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \bar{G}_{n(k-m+1,k-m+1,...,k-m+1)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ $(m(k-m+1)=n)$
2. $\bar{a}_m^{k} = \bar{g}_m^{k(l,l,...,l)}$ $(\mu = k)$

3. $\overline{c}_m^k = \overline{g}_m^{k(\lambda_1)}$ $(\mu = 1,\ k = \lambda_1)$

4. $\overline{A}^k_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \overline{G}^{k(l,l,...,l)}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$ $(\mu = k)$

5. $\overline{C}^k_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \overline{G}^{k(\lambda_1)}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$ $(\mu = 1,\ k = \lambda_1)$

6. $\overline{a}_m^k = \overline{A}^k_{n(k-m+1,k-m+1,...,k-m+1)}$ $(m(k-m+1) = n)$

7. $\overline{c}_m^k = \overline{C}^k_{n(k-m+1,k-m+1,...,k-m+1)}$ $(m(k-m+1) = n)$

După cum se observă, simbolul cel mai general este cel din colţul din dreapta – sus al tabelului, adică: $\overline{G}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$.

El generalizează toate celelalte 5 simboluri din tabel şi reprezintă evident grupările barate generalizate. Se poate deduce uşor că în situaţia în care $k = n$ valoarea lui este egală cu cea a simbolului general standard de la grupările generalizate, care reprezintă numărul bijecţiilor între două mulţimi multiple [4].

În ce priveşte celelalte 6 simboluri care apăreau în tabelul grupărilor generalizate dar nu apar în tabelul de mai sus al grupărilor barate generalizate, ele se pot defini dar aceste cazuri sunt banale.

$$\overline{G}_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \overline{G}_n^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!...\lambda_\mu!} \quad (k = n)$$

$$\overline{A}_n^k = A_n^n = n! \qquad (k = n)$$

$$\overline{C}_n^k = C_n^n = 1 \qquad (k = n)$$

$$\overline{P}_n = P_n = n!$$

$\overline{p}_m = \overline{a}_m^m = m!$, care se mai poate scrie:

$m^m - C_m^1(m-1)^m + C_m^2(m-2)^m - ... + (-1)^{m-1}C_m^{m-1} = m!$, ceea ce reprezintă o egalitate interesantă.

$$\overline{P}_{n(l_1,l_2,...,l_\mu)} = \overline{A}^n_{n(l_1,l_2,...,l_\mu)} = A^n_{n(l_1,l_2,...,l_\mu)} = \frac{n!}{l_1!l_2!...l_m!}.$$

3 Relaţie de recurenţă, cazuri speciale

Există următoarea formulă de recurenţă, care rezultă imediat din definiţie:

$$\overline{G}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \sum_{\overline{R}} G^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}_{k(x_1,x_2,...,x_m)}$$

unde $\overline{R}$ este mulţimea soluţiilor $(x_1, x_2, ..., x_m)$ în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condiţiile: $1 \le x_i \le l_i$, $i = 1, 2, ..., m$.

Suma se face pe mulţimea $\overline{R}$ a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are $\left|\overline{R}\right|$ termeni (cardinalul mulţimii R). Avem:

$$\left|\overline{R}\right| = \overline{C}^{k}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}.$$

În formula de mai sus apar combinările barate generalizate, care sunt un caz particular al grupărilor barate generalizate, pentru $\mu = 1$.

Formula de recurenţă furnizează o metodă pentru calculul numărului grupărilor barate generalizate. Numerele care apar în membrul drept se calculează utilizând algoritmul prezentat în lucrarea [2].

a). Vom particulariza relaţia de recurenţă, pentru cazul aranjamentelor barate cu repetiţie. Avem:

$$\overline{G}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}_{n(k-m+1,k-m+1,...,k-m+1)} = \overline{g}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}_{m};\ m(k-m+1) = n.$$

În particular:

$$\overline{G}^{k(1,1,...,1)}_{n(k-m+1,k-m+1,...,k-m+1)} = \overline{g}^{k(1,1,...,1)}_{m}.$$

Aplicăm relaţia generală:

$$\overline{G}^{k(1,\,1,\,...,\,1)}_{n(k-m+1,\,k-m+1,\,...,\,k-m+1)} = \sum_{\overline{R}} G^{k(1,\,1,\,...,\,1)}_{k(x_1,\,x_2,\,...,\,x_m)}$$

unde $\overline{R}$ este mulţimea soluţiilor $(x_1, x_2, ..., x_m)$ în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condiţiile: $1 \le x_i \le k\text{-}m+1$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulţimea $\overline{R}$ a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are $|\overline{R}|$ termeni (cardinalul mulţimii $\overline{R}$).

Avem:

$$\left|\overline{R}\right| = \overline{C}^{k}_{n(k-m+1,k-m+1,...,k-m+1)} = \overline{c}^{k}_{m}.$$

Dar: $\overline{g}^{k(l,l,...,l)}_{m} = \overline{a}^{k}_{m} = m^k - C^1_m (m-1)^k + C^2_m (m-2)^k - ... + (-1)^{m-1} C^{m-1}_m,\ k \ge m.$

Deci, obţinem:

$$\sum_{\overline{R}} \frac{k!}{x_1! x_2! ... x_m!} = m^k - C^1_m (m-1)^k + C^2_m (m-2)^k - ... + (-1)^{m-1} C^{m-1}_m,\ k \ge m,$$

unde $\overline{R}$ are semnificaţia de mai sus.

S-a obţinut în acest fel o egalitate interesantă cu substrat combinatorial.

b). Vom particulariza relaţia de recurenţă pentru cazul aranjamentelor barate generalizate.

Avem: $\overline{A}^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \overline{G}^{k(l,l,...,l)}_{n(l_1,l_2,...,l_m)},\ k \le n,\ k \ge m.$

Deci: $\overline{A}^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \sum_{\overline{R}} G^{k(l,l,...,l)}_{k(x_1,x_2,...,x_m)} = \sum_{\overline{R}} \frac{k!}{x_1! x_2! ... x_m!}$

unde $\overline{R}$ este mulţimea soluţiilor $(x_1, x_2, ..., x_m)$ în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condiţiile: $1 \le x_i \le l_i$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulţimea $\overline{R}$ a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are $\left|\overline{R}\right|$ termeni (cardinalul mulţimii R).

Avem:

$$\left|\overline{R}\right| = \overline{C}^{k}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}.$$

În formula de mai sus apar combinările barate generalizate, care sunt un caz particular al grupărilor barate generalizate, pentru $\mu = 1$.

Formula de recurenţă furnizează o metodă pentru calculul numărului aranjamentelor barate generalizate.

c). Vom particulariza relaţia de recurenţă pentru cazul combinărilor barate generalizate.

Avem: $\overline{C}^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \overline{G}^{k(k)}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$, $k \le n$, $k \ge m$.

Deci: $\overline{C}^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \sum_{\overline{R}} G^{k(k)}_{k(x_1,x_2,...,x_m)} = \sum_{\overline{R}} 1 = \left|\overline{R}\right|$

unde $\overline{R}$ este mulţimea soluţiilor (x_1, x_2, ..., x_m) în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condiţiile: $1 \le x_i \le l_i$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulţimea $\overline{R}$ a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are $\left|\overline{R}\right|$ termeni (cardinalul mulţimii R).

Avem:

$$\left|\overline{R}\right| = \overline{C}^{k}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}.$$

În formula de mai sus apar combinările barate generalizate, care sunt un caz particular al grupărilor barate generalizate, pentru $\mu = 1$.

Formula de recurenţă furnizează o metodă pentru calculul numărului combinărilor barate generalizate.

Deci, numărul combinărilor barate generalizate este egal cu numărul soluţiilor cu numere naturale strict pozitive ale unei ecuaţii diofantice liniare, cu coeficienţi unitari şi cu limitări superioare ale necunoscutelor.

4 Aplicaţii

Vom arăta câteva exemple concrete de reducere la cazul grupărilor barate generalizate.

1. $\overline{g}^{4(2,2)}_{3} = \overline{G}^{4(2,2)}_{6(2,2,2)} = 12$
2. $\overline{a}^{4}_{3} = \overline{g}^{4(1,1,1,1)}_{3} = \overline{G}^{4(1,1,1,1)}_{6(2,2,2)} = 36$
3. $\overline{c}^{4}_{3} = \overline{g}^{4(4)}_{3} = \overline{G}^{4(4)}_{6(2,2,2)} = 3$
4. $\overline{A}^{3}_{5(2,2,1)} = \overline{G}^{3(1,1,1)}_{5(2,2,1)} = 6$

5. $\overline{\overline{C}}^{3}_{5(2,2,1)} = \overline{\overline{G}}^{3(3)}_{5(2,2,1)} = 1$

6. $\overline{\overline{a}}^{4}_{3} = \overline{\overline{A}}^{4}_{6(2,2,2)} = \overline{\overline{G}}^{4(1,1,1,1)}_{6(2,2,2)} = 36$

7. $\overline{\overline{c}}^{4}_{3} = \overline{\overline{C}}^{4}_{6(2,2,2)} = \overline{\overline{G}}^{4(4)}_{6(2,2,2)} = 3$

Pentru înţelegerea profundă a conţinutului acestei lucrări propunem cititorului rezolvarea următoarelor teme.

1.Să se formuleze problema grupării obiectelor pentru fiecare din cele 5 cazuri speciale din tabelul de generalizare.

2.Să se formuleze problema distribuirii obiectelor în căsuţe pentru fiecare din cele 5 cazuri speciale din tabelul de generalizare.

3.Să se particularizeze formula de recurenţă valabilă pentru grupările barate generalizate pentru fiecare din cele 5 cazuri speciale din tabelul de generalizare. De fapt, pentru cazul aranjamentelor barate cu repetiţie, a aranjamentelor barate generalizate şi a combinărilor barate generalizate, particularizările respective sunt deja făcute (la capitolul 4 din lucrare).

Bibliografie

[1] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[2] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81

[3] V. M. Popa, *Mulţimi multiple şi mulţimi ordonate*, Educaţia Matematică, vol.V, nr. 2, Sibiu, 2009 (în curs de apariţie)

[4] V. M. Popa, *Grupări barate generalizate*, Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

O utilizare combinatorială a polinoamelor lui Newton

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we consider a new problem of distributing objects into cells, with a supplementary condition. We also present a calculating algorithm using the Newton polynomials method, a recurrence formula, the symmetry property and applications.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

Într-o lucrare anterioară [3] s-a considerat o problemă de distribuire a obiectelor în căsuţe, pe care o reamintim în continuare. Problema era legată de numărarea bijecţiilor între două mulţimi multiple.

Este vorba de o problemă de distribuire a unor obiecte în căsuţe distincte, neordonate (nu are importanţă ordinea obiectelor în căsuţe). Considerăm n obiecte (μ clase de obiecte, clasa i conţinând λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu}\lambda_i = n$) şi m căsuţe de capacităţi l_j, cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$. Se distribuie cele n obiecte în cele m căsuţe. Numărul de distribuiri posibile se notează astfel: $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$. În simbolul general anterior, în cele două paranteze apar partiţii ale numărului natural n. Ordinea indicilor din paranteze nu are importanţă. Se notează atât indicii de jos cât şi cei de sus în ordinea descrescătoare. Dacă în urma aplicării unor formule de calcul apar indici nuli, aceştia vor fi eliminaţi.

În prezenta lucrare, vom considera o problemă asemănătoare, dar mai restrictivă (cu o condiţie suplimentară şi anume căsuţele să primească numai obiecte distincte). La început vom enunţa această problemă şi apoi vom determina numărul acestor distribuiri de obiecte în căsuţe, având în vedere condiţia amintită mai sus.

2 O nouă problemă de distribuire a obiectelor în căsuţe

Considerăm o problemă de distribuire a unor obiecte în căsuţe distincte, neordonate (nu are importanţă ordinea obiectelor în căsuţe). Considerăm n obiecte (μ clase de obiecte, clasa i conţinând λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu}\lambda_i = n$) şi m căsuţe de capacităţi l_j, cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$. Se distribuie cele n obiecte în cele m căsuţe astfel încât fiecare căsuţă să primească numai obiecte distincte. Numărul de distribuiri posibile, cu această condiţie, se notează astfel: $H_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$. În simbolul general anterior, în cele două paranteze apar partiţii ale numărului natural n. Ordinea indicilor din paranteze nu are importanţă. Vom prefera să notăm atât indicii de jos cât şi cei de sus în ordinea descrescătoare. Dacă în urma aplicării unor formule de calcul apar indici nuli, aceştia vor fi eliminaţi. Trebuie să avem condiţiile: $\lambda_i \le m$, $i = 1,2,...\mu$ şi datorită proprietăţii de dualitate (vezi cap. 4) şi condiţiile: $l_j \le \mu$, $j = 1,2,...,m$. Dacă aceste condiţii nu sunt îndeplinite, valoarea simbolului este nulă.

3 Algoritmul de numărare

În continuare, ne propunem să calculăm valoarea simbolului general introdus mai sus.

Vom considera la început un caz particular şi anume calculul numărului $H_{3(1,1,1)}^{3(2,1)}$. Prin urmare, trebuie să calculăm în câte moduri se pot distribui 3 obiecte (două de o clasă şi unul de altă clasă) în trei căsuţe de capacitate 1, deci fiecare căsuţă primind un obiect.

Să presupunem că fiecare căsuţă ar putea primi câte un obiect din fiecare clasă, deci în cazul nostru două obiecte diferite. Atunci, primele două obiecte se pot plasa astfel: un obiect în prima căsuţă şi al doilea în a doua, în prima şi a treia sau în a doua şi a treia. Acestor posibilităţi de distribuire a primelor două obiecte le putem ataşa polinomul omogen şi simetric elementar de trei nedeterminate:

$$Q_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3.$$

Gradul polinomului este dat de numărul de obiecte de aceeaşi clasă (2) iar numărul de nedeterminate de numărul de căsuţe (3). Fiecare monom corespunde unei distribuiri.

La fel, al treilea obiect se poate plasa în căsuţa întâi, a doua sau a treia. Scriem polinomul. ataşat:

$$Q_1 = y_1 + y_2 + y_3.$$

Fiecărei distribuiri a obiectelor din prima clasă i se poate ataşa o distribuire a obiectului din cealaltă clasă, totalitatea distribuirilor care rezultă reprezentându-se prin produsul celor două polinoame:

$$Q_2 \cdot Q_1 = y_1^2y_2 + y_1^2y_3 + y_2^2y_3 + y_1y_2^2 + y_1y_3^2 + y_2y_3^2 + 3y_1y_2y_3.$$

Coeficientul unui monom arată de câte ori apare el în polinomul final, deci câte distribuiri de tipul respectiv sunt posibile. În cazul nostru, fiecare căsuţă primeşte un obiect, deci

distribuirile sunt de tipul $y_1y_2y_3$. Numărul de distribuiri posibile este deci 3. Exponentul unei nedeterminate arată câte obiecte sunt în căsuţa reprezentată de variabila respectivă. În acest fel, putem deduce de exemplu că numărul de distribuiri a celor trei obiecte considerate în trei căsuţe din care prima nu primeşte nici un obiect, a doua primeşte două obiecte, iar a treia primeşte un obiect este 1, etc.

O simplificare considerabilă a calculelor se poate face considerând reprezentarea polinoamelor simetrice şi omogene elementare prin sumele nedeterminatelor de aceeaşi putere (relaţiile lui Newton; [2],[3]).

Astfel, notând:

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

avem: $Q_1 = x_1;\ Q_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2)$

$$Q = Q_1 \cdot Q_2 = \frac{1}{2}(x_1^3 - x_1x_2)]$$

$$Q = \frac{1}{2}[(y_1 + y_2 + y_3)^3 - (y_1 + y_2 + y_3)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

Cu teorema multinomului [1] extragem coeficientul monomului $y_1y_2y_3$:

$$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = 3.$$

Metoda expusă se poate aplica evident pe cazul general. Deci, pentru calculul simbolului general standard elementar $H_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ se procedează astfel:

a) Se calculează polinomul $Q = Q_{\lambda_1}Q_{\lambda_2}...Q_{\lambda_\mu}$

unde $Q_{\lambda_i} = Q_{\lambda_i}(x_1, x_2, ..., x_{\lambda_i})$ este polinomul lui Newton, de grad λ_i, în λ_i nedeterminate.

Deci, $Q = Q(x_1, x_2, ..., x_\lambda)$ va avea gradul $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$ şi λ nedeterminate, unde $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$.

b) Se înlocuieşte în Q:

$$x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$$

.....

$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1}y_2^{l_2}...y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui Q, care va fi chiar numărul căutat.

Polinomul simetric de m nederminate $y_1, y_2, ..., y_m$ şi omogen de gradul n elementar:

$$Q_n = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_n \le m} y_{i_1} y_{i_2} ... y_{i_n}$$

se poate exprima în funcţie de $x_1, x_2, ..., x_n$, unde:

$$x_i = \sum_{1 \le j \le m} y_j^i \quad (i = 1,2,...,n)$$

având următoarea formă [2]:

$$Q_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+...+nk_n=n \\ k_1, k_2, ..., k_n \ge 0}} \frac{(-1)^{k_2+k_4+...}}{1^{k_1}\, k_1!\, 2^{k_2}\, k_2! ... n^{k_n}\, k_n!} x_1^{k_1}\, x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}$$

Numărul de termeni din sumă este $P(n)$, adică numărul de moduri diferite de a scrie pe n ca o sumă de numere naturale, în care ordinea termenilor nu are importanţă.

Aplicând fomula generală de mai sus, se obţin uşor primele patru polinoame ale lui Newton:

$$Q_1 = x_1$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2)$$

$$Q_3 = \frac{1}{6}(x_1^3 - 3x_1x_2 + 2x_3)$$

$$Q_4 = \frac{1}{24}(x_1^4 - 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 - 6x_4)$$

Observăm că polinoamele lui Newton Q se pot obţine din polinoamele de tip Newton P prin înlocuirea nedeterminatelor cu indici pari cu opusele lor.

4 Formula de recurenţă pentru polinoamele Q_n

Pentru polinoamele lui Newton există o formulă de recurenţă. Notăm:

$$Q_i = \frac{1}{i!} D_i \quad (i = 0,1,2,...)$$

Avem următoarea formulă de recurenţă [2], [4]:

$$D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k A_n^k x_{k+1} D_{n-k} \, .$$

Prin convenţie, $Q_0 = D_0 = 1$.

Această formulă de recurenţă poate fi scrisă şi în formele următoare:

$$Q_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x_k Q_{n-k}$$

$$Q_n = \frac{x_1Q_{n-1} - x_2Q_{n-2} + ... + (-1)^{n-1} x_n Q_0}{n}$$

Formula de recurenţă permite calculul polinoamelor Q_n din aproape în aproape, aceasta fiind o nouă metodă de calcul, pe lîngă metoda care utilizează formula generală prezentată mai sus şi în care numărul termenilor este P(n), adică numărul partiţiilor numărului natural n.

5 Proprietatea de dualitate (simetrie) a simbolului $H_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$

Există relaţia:

$$H_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = H_{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}^{n(l_1,l_2,...,l_m)}.$$

Demonstraţie:

Să considerăm la început un caz particular: $H_{7(3,2,1,1)}^{7(3,2,2)} = H_{7(3,2,2)}^{7(3,2,1,1)} = 5$

Scriem una dintre distribuirile posibile, corespunzător membrului stâng al egalităţii:

A	B	C	A	B	A	C	(obiecte)
1	1	1	2	2	3	4	(căsuţe)

(1)

Putem interverti rolul literelor cu al cifrelor şi presupune că 1,2,3,4 indică categoriile de obiecte iar A, B,C căsuţele. Rearanjăm perechile:

1	2	3	1	2	1	4
A	A	A	B	B	C	C

(2)

Exact aceleaşi perechi apar in (1) şi (2) numai că au fost inversate rândurile. Dar (2) poate fi interpretat ca reprezentând o distribuire formată cu 3 obiecte de clasa 1,două obiecte de clasa 2, un obiect de clasa 3 şi un obiect de clasa 4 în căsuţele A ,B şi C de capacităţi 3,2 şi respectiv 2. Dar aceasta este una dintre distribuirile corespunzătoare membrului drept al egalităţii de demonstrat. Rezultă o corespondenţă biunivocă între cele două mulţimi de distribuiri care vor avea deci acelaşi număr de elemente şi egalitatea din enunţ este demonstrată, deoarece procedeul expus rămâne evident valabil pe cazul general.

Observaţie: Şi simbolul general standard ($k = n$) de la grupările generalizate [3],[5] (respectiv de la numărarea bijecţiilor între două mulţimi multiple) prezintă această proprietate de dualitate (simetrie), iar demonstraţia este asemănătoare. Deci: $G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = G_{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}^{n(l_1,l_2,...,l_m)}$.

6 Aplicaţii

În continuare, vom calcula numărul $N = H_{5(2,2,1)}^{5(2,1,1,1)}$ utilizând algoritmul expus.

Vom utiliza algoritmul prezentat mai sus în acest articol (metoda polinoamelor lui Newton).

Avem:

$$Q = Q_2 \cdot Q_1^3 = \frac{1}{2}\left(x_1^5 - x_1^3 x_2\right)$$

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

$$Q = \frac{1}{2}\left[(y_1 + y_2 + y_3)^5 - (y_1 + y_2 + y_3)^3\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)\right]$$

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{5!}{2!\,2!\,1!} - \frac{3!}{0!\,2!\,1!} - \frac{3!}{2!\,0!\,1!}\right) = 12.$$

Ca exerciţiu, propunem cititorului să verifice prin calcul egalităţile:

$$H_{6(2,\,2,\,1,\,1)}^{6(2,2,1,1)} = 34$$

$$H_{6(2,2,1,1)}^{6(2,1,1,1,1)} = 78$$

$$H_{7(3,1,1,1,1)}^{7(3,2,1,1)} = 34$$

$$H_{7(2,\,2,\,2,\,1)}^{7(2,2,1,1,1)} = 117$$

şi să formuleze problemele corespunzătoare de distribuire a obiectelor în căsuţe, cu condiţia ca fiecare căsuţă să primească numai obiecte distincte. Pentru cazul particular de la capitolul 5 să se construiască tabelele cu distribuirile respective (în număr de 5 distribuiri, fiecare).

De asemenea, cititorul este invitat să formuleze o problemă de grupare a obiectelor, după modelul de la grupările generalizate [5].Ce condiţie suplimentară apare în acest caz?

Vom menţiona că problema prezentată poate fi rezolvată pentru diverse cazuri particulare (aplicaţii numerice) prin utilizarea calculatorului electronic. Autorul prezentului articol a realizat acest lucru, dar prezentarea acestui aspect nu face obiectul articolului de faţă. Se va reveni pentru expunerea algoritmului utilizat (bazat pe metoda enumerării) şi a programului de calculator respectiv, într-un articol viitor.

Bibliografie

[1] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[2] D. E. Knuth, *Tratat de programarea calculatoarelor, vol. I*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

[3] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81.

[4] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958

[5] V. M. Popa, *Grupări generalizate*, Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Aspecte combinatoriale privind ecuaţia diofantică liniară cu coeficienţi unitari

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we present some combinatorial aspects regarding the linear diophantine equation with unit coefficients. We consider the equation with superior limits of variables and the equation with double limits of variables. We also present a interesting combinatorial relation with generalized combinations.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 11D45

1 Introducere

În lucrarea de faţă vom pune în evidenţă unele aspecte combinatoriale privind ecuaţia diofantică liniară cu coeficienţi unitari:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k .$$

Numerele k, x_i sunt naturale. De asemenea, limitările b_i şi l_i care pot exista pentru necunoscutele x_i ale ecuaţiei, sunt numere naturale (i=1,2,…,m). Vom considera, pe rând, mai multe situaţii, funcţie de plajele de valori pentru necunoscutele ecuaţiei.

Ne interesează numărul soluţiilor ecuaţiei, iar în unele situaţii şi lista (mulţimea) soluţiilor respective.

2 Ecuaţia I, cu limitări superioare ale necunoscutelor

Considerăm ecuaţia:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k \qquad (1)$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$0 \le x_i \le l_i,\ i = 1,2,...,m. \qquad (2)$$

Ţinând seama de definiţia combinărilor generalizate [2],[3], deducem imediat că numărul soluţiilor ecuaţiei (1) care verifică condiţiile (2) este $N = C^k_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$, unde $n = \sum_{i=1}^{m} l_i$, $k \le n$.

Exemplul I.

Pentru ecuaţia:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \text{ unde :}$$

$$0 \le x_1 \le 3,\ 0 \le x_2 \le 2,\ 0 \le x_3 \le 1,\ 0 \le x_4 \le 1$$

lista soluţiilor cu condiţiile indicate este prezentată în continuare.

x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	1	1
0	2	0	1
0	2	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0
1	2	0	0
2	0	0	1
2	0	1	0
2	1	0	0
3	0	0	0

Caz particular 1: $l_1 = l_2 = ... = l_m = 1$.

Pentru ecuaţia:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$0 \le x_i \le 1,\ i = 1,2,...,m$$

numărul soluţiilor ecuaţiei este:

$$N = C^k_{n(1,1,...,1)} = C^k_m$$

unde $k \le m,\ m = n$ (combinări simple).

Caz particular 2: $l_1 = l_2 = ... = l_m = k$.

Pentru ecuaţia:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$0 \le x_i \le k,\ i = 1,2,...,m$$

numărul soluţiilor ecuaţiei este:

$$N = C^k_{n(k,k,...,k)} = c^k_m$$

unde $mk = n$ (combinări cu repetiţie).

3 Ecuaţia II, cu duble limitări ale necunoscutelor

Considerăm ecuaţia:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k \tag{3}$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$b_i \le x_i \le l_i, i = 1,2,...,m. \tag{4}$$

Pentru a calcula numărul soluţiilor ecuaţiei (3) care verifică condiţiile (4) facem substituţiile:

$$y_i = x_i - b_i. \tag{5}$$

Deci, $x_i = y_i + b_i$ şi înlocuind în ecuaţia (3) obţinem:

$$y_1 + y_2 + ... + y_m = k - (b_1 + b_2 + ... + b_m) \tag{6}$$

cu condiţiile:

$$0 \le y_i \le l_i - b_i, i = 1,2,...,m \tag{7}$$

care este de tipul ecuaţiei I.

Între mulţimea soluţiilor ecuaţiei (3) cu condiţiile (4) şi mulţimea soluţiilor ecuaţiei (6) cu condiţiile (7) există o corespondenţă biunivocă, stabilită prin intermediul relaţiilor (5). Ele au deci acelaşi număr de elemente (acelaşi cardinal).

Dacă notăm:

$$b_1 + b_2 + ... + b_m = n'$$

ecuaţia de mai sus se scrie:

$$y_1 + y_2 + ... + y_m = k - n'$$

cu condiţiile:

$$0 \le y_i \le l_i - b_i, i = 1,2,...,m.$$

Numărul soluţiilor ecuaţiei (3) cu condiţiile (4) este deci:

$$N = C^{k-n'}_{n-n'(l_1-b_1, l_2-b_2, ..., l_m-b_m)}$$

unde $n = l_1 + l_2 + ... + l_m$, $n' = b_1 + b_2 + ... + b_m$, $k \le n$, $n \ge n'$, $k \ge n'$.

Exemplul II.

Pentru ecuaţia:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9, \text{ unde :}$$

$$2 \le x_1 \le 5, 2 \le x_2 \le 4, 1 \le x_3 \le 2, 1 \le x_4 \le 2$$

lista soluţiilor cu condiţiile indicate este prezentată în continuare.

x_1	x_2	x_3	x_4
2	3	2	2
2	4	1	2
2	4	2	1
3	2	2	2
3	3	1	2
3	3	2	1
3	4	1	1

4	2	1	2
4	2	2	1
4	3	1	1
5	2	1	1

Caz particular 1: $b_i = 1, i = 1,2,...,m$.

Pentru ecuaţia:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$1 \le x_i \le l_i, i = 1,2,...,m$$

folosim substituţiile:

$$y_i = x_i - 1$$

şi obţinem ecuaţia:

$$y_1 + y_2 + ... + y_m = k - m$$

cu condiţiile:

$$0 \le y_i \le l_i - 1, i = 1,2,...,m.$$

Numărul soluţiilor ecuaţiei de mai sus, corespunzând cazului particular 1, este:

$N = \overline{C}^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = C^{k-m}_{n-m(l_1-1,l_2-1,...,l_m-1)}$, unde $k \le n, k \ge m$.

Expresia pentru N cu combinări barate generalizate am scris-o ţinând seama de definiţia acestora şi folosind ecuaţia în necunoscutele x_i [4], iar expresia cu combinări generalizate s-a obţinut de asemenea pe baza definiţiei, folosind ecuaţia cu necunoscutele y_i , sau din cea generală de la ecuaţia II, în urma particularizării de la cazul 1. Rezultă şi o egalitate interesantă (exprimarea combinărilor barate generalizate cu ajutorul combinărilor generalizate).

Caz particular 2: $l_i = b_i + k - n', i = 1,2,...,m$.

Pentru ecuaţia:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$b_i \le x_i \le b_i + k - n', i = 1,2,...,m$$

folosim substituţiile:

$$y_i = x_i - b_i$$

şi obţinem ecuaţia:

$$y_1 + y_2 + ... + y_m = k - (b_1 + b_2 + ... + b_m)$$

cu condiţiile:

$$0 \le y_i \le k - n', i = 1,2,...,m.$$

Dacă notăm:

$$b_1 + b_2 + ... + b_m = n'$$

ecuaţia de mai sus se scrie:

$$y_1 + y_2 + ... + y_m = k - n'$$

cu condiţiile:

$$0 \le y_i \le k - n', i = 1,2,...,m .$$

Numărul soluţiilor ecuaţiei de mai sus, corespunzând cazului particular 2 este:

$$N = c_m^{k-n'}, \text{ unde } n' = b_1 + b_2 + ... + b_m, \; k \ge n' .$$

Expresia pentru N cu combinări cu repetiţie am scris-o ţinând seama de definiţia acestora, folosind ecuaţia în necunoscutele y_i (sau aplicând cazul particular 2 de la ecuaţia I).

Caz particular 3: $b_i = 1$ şi $l_i = 1 + k - m, i = 1,2,...,m$.

Pentru ecuaţia:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$1 \le x_i \le 1 + k - m, i = 1,2,...,m$$

folosim substituţiile:

$$y_i = x_i - 1$$

şi obţinem ecuaţia:

$$y_1 + y_2 + ... + y_m = k - m$$

cu condiţiile:

$$0 \le y_i \le k - m, i = 1,2,...,m .$$

Numărul soluţiilor ecuaţiei de mai sus, corespunzând cazului particular 3 este:

$$N = \bar{c}_m^{k} = c_m^{k-m}, \text{ unde } k \ge m .$$

Expresia pentru N cu combinări barate cu repetiţie am scris-o ţinând seama de definiţia acestora şi folosind ecuaţia în necunoscutele x_i [4], iar expresia cu combinări cu repetiţie s-a obţinut de asemenea pe baza definiţiei, folosind ecuaţia cu necunoscutele y_i (sau aplicând cazul particular 2 de la ecuaţia I).

Am regăsit astfel egalitatea interesantă:

$$\bar{c}_m^{k} = c_m^{k-m}, \text{ unde } k \ge m$$

(exprimarea combinărilor barate cu repetiţie cu ajutorul combinărilor cu repetiţie).

4 O relaţie combinatorială interesantă

Vom prezenta în continuare o relaţie în care intervin combinările generalizate şi care prin frumuseţea ei poate fi considerată o mică bijuterie matematică.

Considerăm mulţimile:

$$M_1 = \{0,1,...,l_1\}, M_2 = \{0,1,...,l_2\},..., M_m = \{0,1,...,l_m\}$$

unde $l_i \ge 1$ sunt numere naturale, i=1,2,...,m. Notăm $n = l_1 + l_2 + ... + l_m$.

De asemenea, considerăm mulţimea:

$$M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_m .$$

Elementele mulţimii M sunt m-uple de forma: $(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Numărul de elemente al mulţimii M (cardinalul mulţimii M) este:

$$|M| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot ... \cdot |M_m| = (l_1 + 1)(l_2 + 1)...(l_m + 1). \quad (8)$$

Am aplicat regula produsului (numărul de elemente al produsului cartezian).

Mulţimea M poate fi partiţionată în n+1 mulţimi disjuncte, P_k (k=0,1,...,n) admiţând că mulţimea P_k este formată din toate m-uplele $(x_1, x_2, ..., x_m)$ pentru care $\sum_{j=1}^{m} x_j = k$.

Prin urmare, numărul de elemente al mulţimii M se poate exprima şi astfel:

$$|M| = |P_0| + |P_1| + ... + |P_n|. \quad (9)$$

Am aplicat regula sumei (caz particular al principiului includerii şi al excluderii [1], pentru mulţimi disjuncte).

Dar, putem scrie:

$$|P_k| = C^k_{n(l_1,l_2,...,l_m)}. \quad (10)$$

Ţinând seama de (8), (9) şi (10) rezultă că există relaţia:

$$C^0_{n(l_1,l_2,...,l_m)} + C^1_{n(l_1,l_2,...,l_m)} + ... + C^n_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = (l_1 + 1)(l_2 + 1)...(l_m + 1). \quad (11)$$

Aceasta este relaţia în care intervin combinările generalizate, pe am dorit să o prezentăm.

Dacă în relaţia de mai sus facem $l_1 = l_2 = ... = l_m = 1$ şi deci n=m, obţinem:

$$C^0_n + C^1_n + ... + C^n_n = 2^n$$

cunoscuta relaţie cu combinări simple şi care este prezentă în toate manualele respectiv capitolele de combinatorică.

Bibliografie

[1] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[2] V. M. Popa, *Combinări generalizate*, Educaţia Matematică, vol. II, nr.1-2, Sibiu, 2006

[3] V. M. Popa, *Cazuri speciale ale grupărilor generalizate*, Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

[4] V. M. Popa, *Cazuri speciale ale grupărilor barate generalizate*, Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Aspecte combinatoriale privind ecuaţia diofantică liniară cu coeficienţi naturali

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we present some combinatorial aspects regarding the linear diophantine equation with natural coefficients. We consider the equation with superior limits of variables and the equation with double limits of variables. We also present an interesting calculating method for number of particular case of equation with superior limits of variables.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 11D45

1 Introducere

În lucrarea de faţă vom pune în evidenţă unele aspecte combinatoriale privind ecuaţia diofantică liniară cu coeficienţi naturali:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k.$$

Numerele k, a_i, x_i sunt naturale şi $a_i \neq 0$. De asemenea, limitările b_i şi l_i care pot exista pentru necunoscutele x_i ale ecuaţiei, sunt numere naturale (i=1,2,…,m). Vom considera, pe rând, mai multe situaţii, funcţie de plajele de valori pentru necunoscutele ecuaţiei.

Ne interesează numărul soluţiilor ecuaţiei, iar în unele situaţii şi lista (mulţimea) soluţiilor respective.

Toate consideraţiile care se fac în prezentul articol ramân evident valabile şi în cazul particuluar $a_i = 1$, i=1,2,…,m, caz studiat în lucrarea [1] şi în care ecuaţia are interpretări combinatoriale suplimentare şi foarte interesante. Acestea sunt legate de noţiunile de combinări generalizate, combinări simple, combinări cu repetiţie, combinări barate generalizate, combinări barate cu repetiţie.

2 Ecuaţia I, cu limitări superioare ale necunoscutelor

Considerăm ecuaţia:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k \quad (1)$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$0 \le x_i \le l_i, \; i = 1,2,...,m. \quad (2)$$

Numărul soluţiilor acestei ecuaţii care verifică condiţiile indicate se poate determina cu ajutorul unui program de calculator numit EDL-NUMAR. Lista acestor soluţii se poate obţine cu ajutorul unui program de calculator numit EDL-LISTA. Detalii privind aceste programe de calculator vor fi prezentate într-o lucrare viitoare.

Exemplul I.

Pentru ecuaţia:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 8, \text{ unde :}$$

$$0 \le x_1 \le 5, \; 0 \le x_2 \le 2, \; 0 \le x_3 \le 2, \; 0 \le x_4 \le 1$$

lista soluţiilor cu condiţiile indicate este prezentată în continuare.

x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	1	1
0	1	2	0
1	2	0	1
1	2	1	0
2	0	1	1
2	0	2	0
3	1	0	1
3	1	1	0
4	2	0	0
5	0	0	1
5	0	1	0

Caz particular 1: $l_1 = l_2 = ... = l_m = 1$.

Pentru ecuaţia:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$0 \le x_i \le 1, \; i = 1,2,...,m$$

numărul soluţiilor ecuaţiei, respectiv lista soluţiilor ecuaţiei se obţin ca mai sus, impunând evident noile limitări superioare ale necunoscutelor corespunzătoare acestui caz particular.

Caz particular 2: $l_i = \left[\frac{k}{a_i} \right]$, i=1,2,…,m.

Pentru ecuaţia:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$0 \le x_i \le \left[\frac{k}{a_i}\right],\ i = 1,2,...,m$$

numărul soluţiilor ecuaţiei, respectiv lista soluţiilor ecuaţiei se obţin ca mai sus, impunând evident noile limitări superioare ale necunoscutelor corespunzătoare acestui caz particular. Aceste noi limitări sunt cele naturale (maxim posibile).

3 Ecuaţia II, cu duble limitări ale necunoscutelor

Considerăm ecuaţia:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k \tag{3}$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$b_i \le x_i \le l_i,\ i = 1,2,...,m. \tag{4}$$

Este evident că pentru a avea un număr de soluţii mai mare decât zero, trebuie să avem îndeplinită şi condiţia: $k \ge a_1b_1 + a_2b_2 + ...a_mb_m$.

Pentru a calcula numărul soluţiilor ecuaţiei (3) care verifică condiţiile (4) facem substituţiile:

$$y_i = x_i - b_i. \tag{5}$$

Deci, $x_i = y_i + b_i$ şi înlocuind în ecuaţia (3) obţinem:

$$a_1y_1 + a_2y_2 + ... + a_my_m = k - (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_mb_m) \tag{6}$$

cu condiţiile:

$$0 \le y_i \le l_i - b_i,\ i = 1,2,...,m \tag{7}$$

care este de tipul ecuaţiei I.

Între mulţimea soluţiilor ecuaţiei (3) cu condiţiile (4) şi mulţimea soluţiilor ecuaţiei (6) cu condiţiile (7) există o corespondenţă biunivocă, stabilită prin intermediul relaţiilor (5). Ele au deci acelaşi număr de elemente (acelaşi cardinal). Prin urmare, numărul soluţiilor ecuaţiei (3) cu condiţiile (4) se poate determina stabilind acest număr pentru ecuaţia (6) cu condiţiile (7), folosind programul de calculator EDL-NUMAR. Lista soluţiilor ecuaţiei (3) cu condiţiile (4) se poate determina stabilind acestă listă pentru ecuaţia (6) cu condiţiile (7), folosind programul de calculator EDL-LISTA şi apoi adaugând la fiecare număr y_i din lista respectivă numărul b_i.

Altfel, numărul soluţiilor acestei ecuaţii care verifică condiţiile indicate se poate determina direct cu ajutorul unui program de calculator numit EDL-NUMAR-LIM.INF. Lista acestor soluţii se poate obţine cu ajutorul unui program de calculator numit EDL-LISTA-LIM.INF. Detalii privind aceste programe de calculator vor fi prezentate într-o lucrare viitoare.

Exemplul II.

Pentru ecuaţia:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20, \text{ unde :}$$

$$2 \le x_1 \le 7,\ 2 \le x_2 \le 4,\ 1 \le x_3 \le 3,\ 1 \le x_4 \le 2$$

lista soluţiilor cu condiţiile indicate este prezentată în continuare.

x_1	x_2	x_3	x_4
2	3	2	2
2	3	3	1
3	4	1	2
3	4	2	1
4	2	2	2
4	2	3	1
5	3	1	2
5	3	2	1
6	4	1	1
7	2	1	2
7	2	2	1

Caz particular 1: $b_i = 1, i = 1,2,...,m$.

Pentru ecuaţia:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$1 \le x_i \le l_i, i = 1,2,...,m$$

folosim substituţiile:

$$y_i = x_i - 1$$

şi obţinem ecuaţia:

$$a_1y_1 + a_2y_2 + ... + a_my_m = k - (a_1 + a_2 + ... + a_m)$$

cu condiţiile:

$$0 \le y_i \le l_i - 1, i = 1,2,...,m.$$

Numărul soluţiilor ecuaţiei, respectiv lista soluţiilor ecuaţiei se obţin ca mai sus, impunând evident noile limitări superioare ale necunoscutelor corespunzătoare acestui caz particular.

Caz particular 2: $l_i = \left[\frac{a_ib_i + k - n'}{a_i}\right]$, $n' = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_mb_m$, $i = 1,2,...,m$.

Pentru ecuaţia:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$b_i \le x_i \le \left[\frac{a_ib_i + k - n'}{a_i}\right], n' = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_mb_m, i = 1,2,...,m.$$

folosim substituţiile:

$$y_i = x_i - b_i$$

şi obţinem ecuaţia:

$$a_1y_1 + a_2y_2 + ... + a_my_m = k - (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_mb_m)$$

cu condiţiile:

$$0 \le y_i \le \left[\frac{a_ib_i + k - n'}{a_i}\right] - b_i, i = 1,2,...,m.$$

Numărul soluţiilor ecuaţiei, respectiv lista soluţiilor ecuaţiei se obţin ca mai sus, impunând evident noile limitări superioare ale necunoscutelor corespunzătoare acestui caz particular.

Caz particular 3: $b_i = 1$ şi $l_i = \left[\frac{a_i + k - n'}{a_i} \right]$, $n' = a_1 + a_2 + ... + a_m$, $i = 1,2,...,m$.

Pentru ecuaţia:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$1 \le x_i \le \left[\frac{a_i + k - n'}{a_i} \right], \; n' = a_1 + a_2 + ... + a_m, \; i = 1,2,...,m .$$

folosim substituţiile:

$$y_i = x_i - 1$$

şi obţinem ecuaţia:

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + ... + a_m y_m = k - (a_1 + a_2 + ... + a_m)$$

cu condiţiile:

$$0 \le y_i \le \left[\frac{a_i + k - n'}{a_i} \right] - 1, \; i = 1,2,...,m .$$

Numărul soluţiilor ecuaţiei, respectiv lista soluţiilor ecuaţiei se obţin ca mai sus, impunând evident noile limitări superioare ale necunoscutelor corespunzătoare acestui caz particular.

4 O metodă de calcul interesantă

Vom prezenta în continuare o metodă de calcul interesantă pentru numărul de soluţii ale ecuaţiei I, în cazul particular 2, când avem limitări superioare naturale (maxim posibile) ale necunoscutelor. Metoda este „manuală” şi recursivă, fiind adaptarea unei idei prezentate în cunoscuta lucrare „Cum rezolvăm o problemă” de George Polya (Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1965) şi unde este preluată dintr-un articol din revista „The American Mathematical Monthly”, Nr. 63, din anul 1956.

Pentru introducerea metodei, considerăm la început un caz particular.

Ne propunem să calculăm numărul soluţiilor cu numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 . \tag{8}$$

Considerăm ecuaţia mai generală:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = k . \tag{9}$$

Notăm cu A_k numărul soluţiilor ecuaţiei:

$$x_1 = k .$$

Notăm cu B_k numărul soluţiilor ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 = k .$$

Notăm cu C_k numărul soluţiilor ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = k .$$

Lista (mulţimea) soluţiilor ecuaţiei (9) este formată din două submulţimi disjuncte. Prima conţine soluţiile pentru care $x_3 = 0$ iar a doua conţine soluţiile pentru care $x_3 \geq 1$.

Prima submulţime are B_k elemente iar a doua C_{k-3} elemente. Într-adevăr, numărul soluţiilor ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = k$$

cu $x_3 \geq 1$ este egal cu numărul soluţiilor ecuaţiei:

$$y_1 + y_2 + 3y_3 = k - 3$$

cu $y_3 \geq 0$ .Aceasta, deoarece între mulţimile soluţiilor celor două ecuaţii se poate stabili o corespondenţă biunivocă, pe baza relaţiilor:

$$x_1 = y_1;\ x_2 = y_2;\ x_3 - 1 = y_3.$$

Deci, putem scrie:

$$C_k = B_k + C_{k-3}. \tag{10}$$

Asemănător, deducem că avem şi relaţia:

$$B_k = A_k + B_{k-1}. \tag{11}$$

Este clar că $A_0 = B_0 = C_0 = 1$ iar $A_k = 1$ pentru orice $k > 0$.

Numerele A_k, B_k, C_k pentru $k < 0$ sunt toate nule.

Pentru calculul numărului soluţiilor ecuaţiei (8) care este evident $N = C_5$, vom utiliza relaţiile (10) şi (11) cu referire la ecuaţia (9).

Vom construi următorul tabel, în care numerele se calculează pe baza relaţiilor (10) şi (11) şi a observaţiilor făcute imediat după aceste relaţii.

k	0	1	2	3	4	5
A_k	1	1	1	1	1	1
B_k	1	2	3	4	5	6
C_k	1	2	3	5	7	9

Putem acum afirma că numărul soluţiilor ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$

este $N = C_5 = 9$.

Lista soluţiilor ecuaţiei este:

x_1	x_2	x_3
0	2	1
0	5	0
1	1	1
1	4	0
2	0	1
2	3	0
3	2	0
4	1	0
5	0	0

Dar, putem afirma şi că numărul soluţiilor ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$$

este $C_4 = 7$, etc.

Metoda ramâne evident valabilă pe caz general, pentru calculul numărului soluţiilor ecuaţiei:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k$$

unde $0 \le x_i \le \left[\frac{k}{a_i}\right]$, $i = 1,2,...,m$.

Aplicaţie

În câte moduri se poate schimba o bancnotă de un leu?

Rezolvarea acestei probleme înseamnă determinarea numărului soluţiilor ecuaţiei:

$$1x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 50x_4 = 100,$$

unde: x_1, x_2, x_3, x_4 sunt numere naturale.

Aplicăm metoda de calcul prezentată anterior.

$$A_k : 1;\ B_k : 1, 5;\ C_k : 1, 5, 10;\ D_k : 1, 5, 10, 50.$$

Se pot scrie relaţiile:

$$D_k = C_k + D_{k-50};\quad C_k = B_k + C_{k-10};\quad B_k = A_k + B_{k-5}.$$

Construim tabelul de calcul:

k	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
A_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
C_k	1		4		9		16		25		36		49		64		81		100		121
D_k	1										37										158

Se observă că numărul căutat este $N = D_{100} = 158$.

5 Metoda funcţiei generatoare

Pentru a calcula numărul soluţiilor ecuaţiei:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k$$

unde $0 \le x_i \le \left[\frac{k}{a_i}\right]$, $i = 1,2,...,m$,

notăm acest număr $N = c(k) = c_k$.

El poate fi aflat ca şi coeficientul lui x^k în dezvoltatea în serie de puteri a funcţiei generatoare a acestor numere.

Funcţia generatoare are urmatoarea formă [2]:

$$f(x)=\frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})...(1-x^{a_m})}$$

iar dezvoltarea în serie de puteri este:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i x^i = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_k x^k + ...$$

Exemplu.

Pentru ecuaţia:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$

considerăm funcţia generatoare:

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2(1-x^3)}.$$

Dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei este:

$$f(x)=1+2x+3x^2+5x^3+7x^4+9x^5+12x^6+...$$

Caută coeficientul termenului în x^5 (deoarece membrul drept al ecuaţiei noastre este $k=5$) şi obţinem: $N=c_5=9$. Dezvoltarea în serie se poate obţine uşor folosind produsul soft Mathcad 14. O variantă a metodei utilizează polinoame (a se vedea lucrarea [3]).

Bibliografie

[1] V. M. Popa, *Aspecte combinatoriale privind ecuaţia diofantică liniară cu coeficienţi unitari*, Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

[2] P. Shiu, *Computations of the partition function*, The Mathematical Gazette, UK, Vol.81, No. 490, 1997

[3] I. Niven, *Mathematics of choice. How to count without counting*, The Mathematical Association of America, 1965

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Aspecte combinatoriale privind ecuaţia partiţiilor unui număr natural

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we present some combinatorial aspects regarding the partition equation for a natural number. We consider the partition equation with the some right member of equation and the partition equation with unit inferior limits of variables. We also present the partitions of number n into different parts.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A17

1 Introducere

Se cunoaşte noţiunea de partiţie a unui număr natural n în m termeni (părţi). Ea este scrierea numărului n sub forma unei sume de m termeni diferiţi sau egali între ei. Numărul acestor partiţii se notează cu $P(n,m)$.

De asemenea, numărul tuturor partiţiilor numărului natural n se notează cu $P(n)$ (a se vedea de exemplu lucrarea [1]). Avem, evident:

$$P(n) = P(n,1) + P(n,2) + ... + P(n,n).$$

În lucrarea de faţă vom pune în evidenţă unele aspecte combinatoriale privind ecuaţia partiţiilor unui număr natural n:

$$x_1 + 2x_2 + ... + nx_n = n.$$

Numerele n, x_i sunt naturale (i=1,2,…,n). După cum se ştie, ecuaţia de mai sus caracterizează partiţiile unui număr natural n, adică scrierea numărului n sub forma unei sume de termeni diferiţi sau egali. Vom analiza ce se întâmplă dacă membrul drept al ecuaţiei este un număr natural m, care poate fi mai mic, mai mare, sau egal cu n. Vom determina numărul soluţiilor ecuaţiei în fiecare din cele trei situaţii.

De asemenea vom analiza ecuaţia în condiţiile în care avem $x_i \geq 1$ (i=1,2,…,n). Acest caz corespunde partiţiilor numărului m în care intervin toţi termenii 1,2,...,n.

În final vom analiza partiţiile unui număr n în m numere diferite între ele.

2 Ecuaţia I, cu membrul drept oarecare

Considerăm ecuaţia:

$$x_1 + 2x_2 + ... + nx_n = m \tag{1}$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$0 \le x_i \le \left[\frac{m}{i}\right], i = 1,2,...,n. \tag{2}$$

Vom determina numărul soluţiilor acestei ecuaţii funcţie de valorile membrului drept al ecuaţiei.

1. Cazul $m = n$.

După cum se ştie, în acest caz numărul soluţiilor ecuaţiei (1) este P(n), adică numărul partiţiilor numărului natural n.

2. Cazul $m < n$.

În acest caz este uşor de observat că numărul soluţiilor ecuaţiei (1) este P(m).

3. Cazul $m > n$.

În acest caz, ecuaţia corespunde scrierii numărului m ca o sumă de termeni care pot lua valorile 1,2,...,n. Numărul soluţiilor ecuaţiei este egal cu numărul acestor scrieri.

Dar, aşa după cum a demonstrat Euler (a se vedea în acest sens, de exemplu lucrarea [2]), acest număr este egal cu numărul reprezentărilor numărului m+n sub forma unor sume de n numere naturale pozitive egale sau diferite.

Deci, numărul soluţiilor ecuaţiei (1) este în acest caz P(m+n,n).

Putem sintetiza analiza de mai sus în urmatorul tabel.

Ecuaţia: $x_1 + 2x_2 + ... + nx_n = m$	
m	Numărul de soluţii al ecuaţiei:
$m < n$	$P(m)$
$m = n$	$P(n)$
$m > n$	$P(m+n,n)$

Observăm că ecuaţia analizată este o ecuaţie diofantică cu coeficienţi naturali în cazul particular $a_i = i$. Ea corespunde ecuaţiei I, cazul particular 2, prezentată în lucrarea [3]. În acest caz particular necunoscutele admit limitările naturale ale ecuaţiei respective. După cum se observă, numărul soluţiilor acestei ecuaţii se poate exprima simplu folosind partiţiile unui număr natural. Dar, evident, putem folosi pentru determinarea numărului soluţiilor acestei ecuaţii (şi, la nevoie, pentru obţinerea listei tuturor soluţiilor) metodele prezentate în lucrarea [3]. Respectiv, putem folosi programele de calculator EDL-NUMAR şi EDL-LISTA în care impunem ca şi limitări pentru necunoscutele ecuaţiei valorile $l_i = \left[\frac{m}{i}\right]$, adică limitările naturale (maxim posibile), $i = 1,2,...,n$, dar şi metoda expusă în capitolul 4 al lucrării [3], care implică un calcul „manual” recursiv şi construirea unui tabel de numere, unde numărul de soluţii al ecuaţiei analizate se găseşte în tabelul respectiv în colţul din dreapta, jos.

3 Ecuaţia II, cu necunoscutele mai mari sau egale decât 1

Considerăm ecuaţia:

$$x_1 + 2x_2 + ... + nx_n = m \tag{3}$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$1 \le x_i \le \left[\frac{i+m-n'}{i}\right],\ n' = 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2},\ i = 1,2,...,n. \tag{4}$$

Pentru a calcula numărul soluţiilor ecuaţiei (3) care verifică condiţiile (4) facem substituţiile:

$$y_i = x_i - 1. \tag{5}$$

Deci, $x_i = y_i + 1$ şi înlocuind în ecuaţia (3) obţinem:

$$y_1 + 2y_2 + ... + ny_n = m - \frac{n(n+1)}{2} \tag{6}$$

cu condiţiile:

$$0 \le y_i \le \left[\frac{i+m-n'}{i}\right] - 1,\ i = 1,2,...,n \tag{7}$$

care este de tipul ecuaţiei 1.

Între mulţimea soluţiilor ecuaţiei (3) cu condiţiile (4) şi mulţimea soluţiilor ecuaţiei (6) cu condiţiile (7) există o corespondenţă biunivocă, stabilită prin intermediul relaţiilor (5). Ele au deci acelaşi număr de elemente (acelaşi cardinal). Prin urmare, numărul soluţiilor ecuaţiei (3) cu condiţiile (4) se poate determina stabilind acest număr pentru ecuaţia (6) cu condiţiile (7).

Vom determina numărul soluţiilor acestei ecuaţii (6) funcţie de valorile membrului drept al ecuaţiei.

Obsevăm la început că pentru ca ecuaţia (3) cu condiţiile (4) să admită soluţii cu numere naturale strict pozitive este necesar să fie îndeplinită condiţia:

$$m \ge \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pentru $m = \frac{n(n+1)}{2}$ avem o singură soluţie şi anume $(1,1,...,1)$ (de n ori).

1. Cazul $m - \frac{n(n+1)}{2} = n$.

În acest caz numărul soluţiilor ecuaţiei este P(n).

2. Cazul $m - \frac{n(n+1)}{2} < n$.

În acest caz numărul soluţiilor ecuaţiei este $P\left[m - \frac{n(n+1)}{2}\right]$.

3. Cazul $m - \frac{n(n+1)}{2} > n$.

În acest caz numărul soluţiilor ecuaţiei este $P\left[m - \frac{n(n+1)}{2} + n, n\right] = P\left[m - \frac{n(n-1)}{2}, n\right]$.

Putem sintetiza analiza de mai sus în tabelul care urmează.

Ecuaţia: $x_1 + 2x_2 + ... + nx_n = m$	
m	Numărul de soluţii al ecuaţiei:
$m < n + \frac{n(n+1)}{2}$	$P\left[m - \frac{n(n+1)}{2}\right]$
$m = n + \frac{n(n+1)}{2}$	$P(n)$
$m > n + \frac{n(n+1)}{2}$	$P\left[m - \frac{n(n-1)}{2}, n\right]$

Observăm că ecuaţia analizată este o ecuaţie diofantică cu coeficienţi naturali în cazul particular $a_i = i$ şi cu condiţia ca fiecare necunoscută a ecuaţiei să fie mai mare sau egală decât 1. Ea corespunde ecuaţiei II, cazul particular 3, prezentată în lucrarea [3]. După cum se observă, numărul soluţiilor acestei ecuaţii se poate exprima simplu folosind partiţiile unui număr natural. Dar, evident putem folosi pentru determinarea numărului soluţiilor acestei ecuaţii (şi, la nevoie, pentru obţinerea listei tuturor soluţiilor) metodele prezentate în lucrarea [3]. Între mulţimea soluţiilor ecuaţiei (3) cu condiţiile (4) şi mulţimea soluţiilor ecuaţiei (6) cu condiţiile (7) există o corespondenţă biunivocă, stabilită prin intermediul relaţiilor (5). Ele au deci acelaşi număr de elemente (acelaşi cardinal). Prin urmare, numărul soluţiilor ecuaţiei (3) cu condiţiile (4) se poate determina stabilind acest număr pentru ecuaţia (6) cu condiţiile (7), folosind programul de calculator EDL-NUMAR dar şi metoda recursivă expusă în capitolul 4 al lucrării [3]. Lista soluţiilor ecuaţiei (3) cu condiţiile (4) se poate determina stabilind acestă listă pentru ecuaţia (6) cu condiţiile (7), folosind programul de calculator EDL-LISTA şi apoi adaugând la fiecare număr y_i din lista respectivă numărul 1.

Altfel, numărul soluţiilor acestei ecuaţii care verifică condiţiile indicate se poate determina direct cu ajutorul programului de calculator EDL-NUMAR-LIM.INF. Lista acestor soluţii se poate obţine cu ajutorul programului de calculator EDL-LISTA-LIM.INF. Detalii privind aceste programe de calculator vor fi prezentate într-o lucrare viitoare.

4 Partiţii cu termeni diferiţi

Vom prezenta în continuare problema partiţiilor unui număr n în m termeni diferiţi între ei, respectiv vom determina numărul acestor partiţii.

Vom folosi în acest scop un alt rezultat demonstrat de Euler [2] pe care îl vom enunţa în continuare. De asemenea se poate vedea şi lucrarea [5], problema 5.4 (pag.32).

Numărul reprezentărilor numărului n sub forma unor sume de m termeni diferiţi este egal cu numărul reprezentărilor numărului $n - \frac{m(m-1)}{2}$ sub forma unei sume de m termeni diferiţi sau egali.

Putem scrie deci relaţia:

$$P'(n,m) = P\left[n - \frac{m(m-1)}{2}, m\right]$$

unde prin $P'(n,m)$ am notat numărul reprezentărilor numărului n sub forma unor sume de m termeni diferiţi.

De exemplu, putem scrie pentru numărul 7 următoarele scrieri ca sume de doi termeni diferiţi: $6+1;\ 5+2;\ 4+3$.

Deci putem scrie $P'(7,2)=3$.

Numărul tuturor partiţiilor numărului natural n în sume cu termeni diferiţi între ei se va nota cu $P'(n)$.

Se poate scrie relaţia:

$$P'(n)=P'(n,1)+P'(n,2)+...+P'(n,n). \quad (8)$$

În suma de mai sus la un moment dat termenii vor fi nuli.

În tabelul următor vom prezenta numărul partiţiilor cu termeni diferiţi între ei pentru numerele n de la 1 la 12.

Tabel cu numerele: $P'(n,m)=P\left[n-\frac{m(m-1)}{2},m\right]$ şi $P'(n)$.

	m=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$P'(n)$
n=1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
5	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
6	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
7	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
8	1	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6
9	1	4	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
10	1	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	10
11	1	5	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	12
12	1	5	7	2	0	0	0	0	0	0	0	0	15

Mai facem observaţia că numărul $P'(n)$ reprezintă şi numărul soluţiilor cu 0 şi 1 ale ecuaţiei:

$x_1+2x_2+...+nx_n=n$.

În tabelul următor vom prezenta partiţiile cu termeni diferiţi între ei pentru numerele n de la 1 la 12.

	Descopunerile în termeni diferiţi între ei .
n=1	1
2	2
3	3=2+1
4	4=3+1
5	5=4+1=3+2
6	6=5+1=4+2=3+2+1
7	7=6+1=5+2=4+3=4+2+1
8	8=7+1=6+2=5+3=4+3+1=5+2+1
9	9=8+1=7+2=6+3=5+4=6+2+1=5+3+1=4+3+2
10	10=9+1=8+2=7+3=6+4=7+2+1=6+3+1=5+4+1=5+3+2=4+3+2+1
11	11=10+1=9+2=8+3=7+4=6+5=8+2+1=7+3+1=6+4+1=6+3+2=5+4+2=5+3+2+1
12	12=11+1=10+2=9+3=8+4=7+5=9+2+1=8+3+1=7+3+2=7+4+1=6+5+1=6+4+2=5+4+3=1+2+4+5=1+2+3+6

Este evidentă asemănarea între problema partiţiilor în termeni diferiţi între ei şi problema partiţiilor în termeni diferiţi sau egali între ei [1].

Între numerele acestor partiţii se pot scrie două inegalităţi evidente, care rezultă imediat din definiţia acestor numere:

$$P'(n,m) < P(n,m) \tag{9}$$

$$P'(n) < P(n). \tag{10}$$

5 Concluzii

În lucrarea de faţă s-au pus în evidenţă unele aspecte combinatoriale privind ecuaţia partiţiilor unui număr natural n:

$$x_1 + 2x_2 + ... + nx_n = n.$$

Numerele n, x_i sunt naturale (i=1,2,…,n). Ecuaţia de mai sus caracterizează partiţiile unui număr natural n, adică scrierea numărului n sub forma unei sume de termeni diferiţi sau egali.

S-au analizat situaţiile când membrul drept al ecuaţiei este un număr natural m, care poate fi mai mic, mai mare, sau egal cu n. S-a determinat numărul soluţiilor ecuaţiei în fiecare din cele trei situaţii.

De asemenea s-a analizat ecuaţia în condiţiile în care avem $x_i \geq 1$ (i=1,2,…,n). Acest caz corespunde partiţiilor numărului m în care intervin toţi termenii 1,2,...,n.

În final s-au analizat partiţiile unui număr n în m numere diferite între ele. S-au dat tabele cu numerele $P'(n,m), P'(n)$ şi cu descompunerile numărului n în sume de termeni diferii ($n \leq 12$).

Bibliografie

[1] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[2] A. M. Iaglom, I. M. Iaglom, *Probleme neelementare tratate elementar*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1983

[3] V. M. Popa, *Aspecte combinatoriale privind ecuaţia diofantică liniară cu coeficienţi naturali*, Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

[4] V. M. Popa, *Aspecte combinatoriale privind ecuaţia diofantică liniară cu coeficienţi unitari*, Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

[5] I.Tomescu, *Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Formule pentru cazuri particulare ale grupărilor generalizate şi ale ecuaţiei diofantice liniare

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we present some formulas for particular cases of generalized groupings. We also present some solutions number formulas for particular cases of linear diophantine equation.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

În lucrarea de faţă se prezintă unele formule valabile pentru cazuri particulare ale grupărilor generalizate şi ale ecuaţiei diofantice liniare.

Utilizând relaţia de recurenţă II pentru aranjamentele generalizate [1] se deduc formule pentru două cazuri particulare ale aranjamentelor generalizate. De asemenea, se deduce o nouă formulă de recurenţă pentru aranjamentele generalizate.

Utilizând relaţia de recurenţă II pentru combinările generalizate [2] se deduc formule pentru două cazuri particulare ale combinărilor generalizate. De asemenea, se demonstrează formula combinărilor generalizate complementare.

Folosind principiul includerii şi al excluderii se indică o noua metodă şi o nouă formulă pentru calculul combinărilor generalizate, care apoi se particularizează.

Se prezintă în continuare formulele de reducere imediată a ordinului, utile în aplicaţii.

În final se indică unele formule pentru calculul numărului soluţiilor unor ecuaţii diofantice liniare în cazuri particulare.

2 Cazuri particulare ale aranjamentelor generalizate

Vom deduce o formulă pentru calculul numărului aranjamentelor generalizate în cazul particular: $A^{k}_{n(p,1,...,1)}$ unde: $1 \le p \le k$ şi evident $k \le n$. Vom folosi în acest scop, relaţia de recurenţă pentru aranjamentele generalizate [1]:

$$A^{k}_{n(1_1,1_2,...,1_m)} = A^{k}_{n-l_m(1_1,1_2,...,1_{m-1})} + C^{1}_{k} \cdot A^{k-1}_{n-l_m(1_1,1_2,...,1_{m-1})} + C^{2}_{k} \cdot A^{k-2}_{n-l_m(1_1,1_2,...,1_{m-1})} + ... +$$
$$+ C^{l_m}_{k} \cdot A^{k-l_m}_{n-l_m(1_1,1_2,...,1_{m-1})} .$$

Obţinem:

$$A^{k}_{n(p,1,...,1)} = A^{k}_{n(1,...,1,p)} = A^{k}_{n-p(1,1,...,1)} + C^{1}_{k} \cdot A^{k-1}_{n-p(1,1,...,1)} + C^{2}_{k} \cdot A^{k-2}_{n-p(1,1,...,1)} + ... +$$
$$+ C^{p}_{k} \cdot A^{k-p}_{n-p(1,1,...,1)} = A^{k}_{n-p} + C^{1}_{k} \cdot A^{k-1}_{n-p} + C^{2}_{k} \cdot A^{k-2}_{n-p} + ... + C^{p}_{k} \cdot A^{k-p}_{n-p} .$$

În cazul particular $p = 1$ obţinem relaţia cunoscută:

$$A^{k}_{n} = A^{k}_{n-1} + C^{1}_{k} \cdot A^{k-1}_{n-1}.$$

Facem observaţia că numărul aranjamentelor generalizate sau al aranjamentelor simple la care indicele superior este mai mare decât cel inferior se consideră prin convenţie nul.

Vom deduce de asemenea o formulă pentru calculul numărului aranjamentelor generalizate în cazul particular: $A^{k}_{n(k,k,...,k,p)}$ unde: $1 \le p \le k$ şi evident $k \le n$. Vom folosi în acest scop, relaţia de recurenţă pentru aranjamentele generalizate utilizată mai sus.

Obţinem:

$$A^{k}_{n(k,k,...,k,p)} = A^{k}_{n-p(k,k,...,k)} + C^{1}_{k} \cdot A^{k-1}_{n-p(k,k,...,k)} + C^{2}_{k} \cdot A^{k-2}_{n-p(k,k,...,k)} + ... +$$
$$+ C^{p}_{k} \cdot A^{k-p}_{n-p(k,k,...,k)} = a^{k}_{m-1} + C^{1}_{k} \cdot a^{k-1}_{m-1} + C^{2}_{k} \cdot a^{k-2}_{m-1} + ... + C^{p}_{k} \cdot a^{k-p}_{m-1} .$$

În cazul particular $p = k$ obţinem relaţia:

$a^{k}_{m} = a^{k}_{m-1} + C^{1}_{k} \cdot a^{k-1}_{m-1} + C^{2}_{k} \cdot a^{k-2}_{m-1} + ... + C^{k}_{k} \cdot a^{0}_{m-1}$, care se mai poate scrie:

$m^{k} = (m-1)^{k} + C^{1}_{k} \cdot (m-1)^{k-1} + C^{2}_{k} \cdot (m-1)^{k-2} + ... + C^{k}_{k} \cdot (m-1)^{0}$, ceea ce reprezintă o egalitate interesantă.

3 O nouă formulă de recurenţă pentru aranjamente generalizate

Pentru aranjamentele generalizate avem două relaţii de recurenţă (relaţia de recurenţă I şi relaţia de recurenţă II [1]).

Vom deduce în continuare o nouă formulă de recurenţă pentru aranjamentele generalizate.

Pentru aceasta vom folosi formula de complementaritate a grupărilor generalizate [3]:

$$G^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} = G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu, n-k)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}.$$

De asemenea vom folosi şi formula de recurenţă (de dezvoltare) a grupărilor generalizate:

$$G^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} = \sum_R G^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{k(x_1, x_2, ..., x_m)}$$

unde R este mulţimea soluţiilor $(x_1, x_2, ..., x_m)$ în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condiţiile: $0 \le x_i \le l_i$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulţimea R a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are |R| termeni (cardinalul mulţimii R).

Avem:

$$|R| = C^k_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}.$$

Putem scrie:

$$A^k_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = G^{k(1,1,...,1)}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = G^{n(1,1,...,1,n-k)}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = G^{n-1(1,1,...,1,n-k)}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \sum_R G^{n-1(1,1,...,1,n-k)}_{n-1(x_1,x_2,...,x_m)} =$$

$$= \sum_R G^{k-1(1,1,...,1)}_{n-1(x_1,x_2,...,x_m)} = \sum_R A^{k-1}_{n-1(x_1,x_2,...,x_m)}$$

unde R este mulţimea soluţiilor $(x_1, x_2, ..., x_m)$ în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = n\text{-}1$$

cu condiţiile: $0 \le x_i \le l_i$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulţimea R a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are |R| termeni (cardinalul mulţimii R).

Avem:

$$|R| = C^{n-1}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} = m.$$

Am găsit deci o formulă de dezvoltare pentru $A^k_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$ şi anume:

$$A^k_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} = \sum_R A^{k-1}_{n-1(x_1, x_2, ..., x_m)}$$

unde R este mulţimea soluţiilor $(x_1, x_2, ..., x_m)$ în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = n\text{-}1$$

cu condiţiile: $0 \le x_i \le l_i$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulţimea R a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are |R| termeni (cardinalul mulţimii R).

Avem:

$$|R| = C^{n-1}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} = m.$$

<u>Exemplu</u>

Vom aplica formula anterioară pentru:

$$A^3_{7(3,3,1)} = 20.$$

Putem scrie:

$$A^3_{7(3,3,1)} = \sum_R A^2_{6(x_1, x_2, x_3)},$$

unde R este mulţimea soluţiilor (x_1, x_2, x_3) în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

cu condiţiile: $0 \le x_1 \le 3$, $0 \le x_2 \le 3$, $0 \le x_3 \le 1$.

Suma se face pe mulţimea R a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are |R| termeni (cardinalul mulţimii R).

Avem:

$$\left|R\right| = C^{6}_{7(3,3,1)} = 3\,.$$

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este:

$$R = \{(3,3,0),(3,2,1),(2,3,1)\}\,.$$

Putem deci scrie:

$$A^{3}_{7(3,3,1)} = A^{2}_{6(3,3,0)} + A^{2}_{6(3,2,1)} + A^{2}_{6(2,3,1)} = A^{2}_{6(3,3)} + 2\cdot A^{2}_{6(3,2,1)} = G^{6(1,1,4)}_{6(3,3)} + 2\cdot G^{6(1,1,4)}_{6(3,2,1)} =$$
$$= 4 + 2\cdot 8 = 20\,.$$

4 Formula combinărilor generalizate complementare

Aplicând aceeaşi metodă pentru combinări, se obţine formula combinărilor generalizate complementare:

$$C^{k}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)} = G^{k(k)}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)} = G^{n(k,n-k)}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)} = G^{n-k(n-k)}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)} = C^{n-k}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}\,.$$

Această formulă a fost prezentată şi în lucrarea [2].

5 Cazuri particulare de combinări generalizate

Vom deduce o formulă pentru calculul numărului combinărilor generalizate în cazul particular: $C^{k}_{n(p,1,\ldots,1)}$ unde: $1 \le p \le k$ şi evident $k \le n$. Vom folosi în acest scop, relaţia de recurenţă II pentru combinările generalizate [2]:

$$C^{k}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)} = C^{k}_{n-l_m(l_1,l_2,\ldots,l_{m-1})} + C^{k-1}_{n-l_m(l_1,l_2,\ldots,l_{m-1})} + C^{k-2}_{n-l_m(l_1,l_2,\ldots,l_{m-1})} + \ldots + C^{k-l_m}_{n-l_m(l_1,l_2,\ldots,l_{m-1})}$$

Obţinem:

$$C^{k}_{n(p,1,\ldots,1)} = C^{k}_{n(1,\ldots,1,p)} = C^{k}_{n-p(1,1,\ldots,1)} + C^{k-1}_{n-p(1,1,\ldots,1)} + C^{k-2}_{n-p(1,1,\ldots,1)} + \ldots + C^{k-p}_{n-p(1,1,\ldots,1)} =$$
$$= C^{k}_{n-p} + C^{k-1}_{n-p} + C^{k-2}_{n-p} + \ldots + C^{k-p}_{n-p}\,.$$

În cazul particular $p = 1$ obţinem relaţia:

$$C^{k}_{n} = C^{k}_{n-1} + C^{k-1}_{n-1}$$

care este cunoscuta relaţie de recurenţă pentru combinările simple.

Facem observaţia că numărul combinărilor generalizate sau al combinărilor simple la care indicele superior este mai mare decât cel inferior se consideră prin convenţie nul.

Vom deduce de asemenea o formulă pentru calculul numărului combinărilor generalizate în cazul particular: $C^{k}_{n(k,k,...,k,p)}$ unde: $1 \le p \le k$ şi evident $k \le n$. Vom folosi în acest scop, relaţia de recurenţă pentru combinările generalizate utilizată mai sus.

Obţinem:

$$C^{k}_{n(k,k,...,k,p)} = C^{k}_{n-p(k,k,...,k)} + C^{k-1}_{n-p(k,k,...,k)} + C^{k-2}_{n-p(k,k,...,k)} + ... + C^{k-p}_{n-p(k,k,...,k)} =$$

$$= c^{k}_{m-1} + c^{k-1}_{m-1} + c^{k-2}_{m-1} + ... + c^{k-p}_{m-1}.$$

În cazul particular $p = k$ obţinem relaţia:

$$c^{k}_{m} = c^{k}_{m-1} + c^{k-1}_{m-1} + c^{k-2}_{m-1} + ... + c^{0}_{m-1},$$

ceea ce reprezintă o egalitate interesantă.

6 Calculul combinărilor generalizate folosind principiul includerii şi al excluderii

În continuare vom descrie o nouă metodă de calcul pentru combinările generalizate, bazată pe principiul includerii şi al excluderii.

În esenţă, principiul includerii şi al excluderii ne dă numărul de elemente (cardinalul) pentru reuniunea unor mulţimi finite.

Pentru două mulţimi finite A şi B avem:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Pentru trei mulţimi finite A, B şi C avem:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Generalizarea este evidentă şi este lăsată în sarcina cititorului. De altfel, ea se găseşte în orice tratat sau manual de combinatorică.

Pentru introducerea metodei de calcul, vom analiza la început un caz concret.

Vom calcula numărul soluţiilor în numere naturale pentru ecuaţia:

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$, cu condiţiile:

$x_1 \le 3,\ x_2 \le 3,\ x_3 \le 2$.

După cum se ştie, acest număr reprezintă numărul combinărilor generalizate respective.

Putem scrie în cazul nostru:

$$N = C^{4}_{8(3,3,2)}.$$

Folosind principiul includerii şi al excluderii, putem scrie:

$$N = c^{4}_{3} - P = 15 - P.$$

Cu alte cuvinte, numărul combinărilor generalizate (sau numărul soluţiilor ecuaţiei diofantice, cu condiţiile indicate) este egal cu numărul total al soluţiilor ecuaţiei liniare diofantice, fără restricţii, din care trebuie să scădem numărul soluţiilor pentru care cel puţin una din condiţiile impuse nu este respectată. Notăm acest număr cu P. Calculăm acest număr folosind principiul includerii şi al excluderii.

Putem scrie:

$$P = N_1 + N_2 + N_3 - N_{12} - N_{13} - N_{23} + N_{123}.$$

Numerele care intervin în această relaţie au următoarele semnificaţii:

a) N_1 este numărul soluţiilor ecuaţiei pentru care care $x_1 \geq 4$

b) N_2 este numărul soluţiilor ecuaţiei pentru care care $x_2 \geq 4$

c) N_3 este numărul soluţiilor ecuaţiei pentru care care $x_3 \geq 3$

d) N_{12} este numărul soluţiilor ecuaţiei pentru care care $x_1 \geq 4$ şi $x_2 \geq 4$

e) N_{13} este numărul soluţiilor ecuaţiei pentru care care $x_1 \geq 4$ şi $x_3 \geq 3$

f) N_{23} este numărul soluţiilor ecuaţiei pentru care care $x_2 \geq 4$ şi $x_3 \geq 3$

g) N_{123} este numărul soluţiilor ecuaţiei pentru care care $x_1 \geq 4$ şi $x_2 \geq 4$ şi $x_3 \geq 3$.

Aceste numere se pot calcula uşor, având în vedere cele expuse în lucrarea [4]. Este vorba de ecuaţia cu duble limitări ale necunoscutelor (ecuaţia II), cazul particular 2.

Obţinem imediat valorile:

$$N_1 = 1,\ N_2 = 1,\ N_3 = 3,\ N_{12} = 0,\ N_{13} = 0,\ N_{23} = 0,\ N_{123} = 0.$$

Deci, numărul P are valoarea $P = 5$.

Numărul soluţiilor ecuaţiei diofantice liniare, deci numărul combinărilor generalizate rezultă acum foarte uşor:

$$N = C^4_{8(3,3,2)} = 15 - P = 10.$$

Metoda de calcul expusă mai sus se poate utiliza asemănător pentru orice numărare de soluţii ale ecuaţiei diofantice liniare cu limitări superioare ale necunoscutelor, deci pentru calculul combinărilor generalizate.

Generalizarea este urmatoarea.

Considerăm ecuaţia:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$0 \leq x_i \leq l_i,\ i = 1,2,...,m.$$

Ţinând seama de definiţia combinărilor generalizate [2], [4], deducem imediat că numărul soluţiilor ecuaţiei de mai sus care verifică condiţiile indicate este $N = C^k_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$, unde $n = \sum_{i=1}^{m} l_i,\ k \leq n$.

Acest număr se poate scrie astfel:

$$N = c_m^k - P$$

$$P = \sum_{(C_m^1)} c_m^{k-(l_i+1)} - \sum_{(C_m^2)} c_m^{k-(l_i+l_j+2)} + ...$$

În expresia lui P apar sume având C_m^1, C_m^2,... termeni. Indicii superiori de la combinările cu repetiţie trebuie să fie mai mari sau egali cu zero, în caz contrar valoarea simbolului respectiv considerându-se nulă.

Exemplu

Vom calcula prin această metodă numărul: $C_{15(5,4,3,2,1)}^7$. Avem: $N = c_5^7 - P$,

$P = c_5^1 + c_5^2 + c_5^3 + c_5^4 + c_5^5 - (c_5^0 + c_5^0 + c_5^1 + c_5^2) = 5 + 15 + 35 + 70 + 126 - (1 + 1 + 5 + 15) =$
$= 251 - 22 = 229$

Deci: $N = 330 - 229 = 101$.

Principiul includerii şi al excluderii se poate utiliza şi pentru calculul combinărilor barate generalizate. Se poate vedea lucrarea lui I.M.Niven (poziţia N2 din bibliografia generală).

7 O formulă pentru un caz particular al combinărilor generalizate

Din formula anterioară se deduce o formulă pentru calculul numărului combinărilor generalizate în cazul particular în care $l_1 = l_2 = ... = l_m = p$.

Avem:

$$C_{n(p,p,...,p)}^k = c_m^k - C_m^1 c_m^{k-(p+1)} + C_m^2 c_m^{k-2(p+1)} - C_m^3 c_m^{k-3(p+1)} + ... + (-1)^s C_m^s c_m^{k-s(p+1)},$$

unde $s = \left[\frac{k}{p+1}\right]$.

Formula se poate scrie mai concentrat astfel:

$$N = C_{n(p,p,...,p)}^k = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i C_m^i c_m^{k-i(p+1)} .$$

Exemplu

Vom calcula prin această metodă numărul: $C_{15(3,3,3,3,3)}^7$.

Avem: $N = c_5^7 - C_5^1 c_5^3$; $N = 330 - 5 \cdot 35 = 155$.

Cititorul este îndemnat să recalculeze numărul anterior prin alte metode prezentate în lucrarea [2] şi anume cu ajutorul formulelor de recurenţă I şi II pentru combinările generalizate, respectiv cu metoda polinoamelor de tip Newton. Evident, valoarea numărului N calculat cu toate aceste metode trebuie sa fie aceeaşi, adică 155.

8 Formule de reducere imediată a ordinului

Să considerăm grupările generalizate, aranjamentele generalizate şi combinările generalizate: $G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$, $A_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k}$, $C_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k}$, unde la toate cele trei simboluri avem: $k \le n$, iar numărul n se numeşte ordinul simbolului respectiv. Cu cât ordinul este mai mic, cu atât simbolul respectiv este, într-un anumit sens, mai simplu.

Există, în anumite cazuri particulare, pentru fiecare din simbolurile anterioare câte o formulă de reducere imediată a ordinului.

Mai exact, putem scrie:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = G_{n-l_1+k(k,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$$

dacă $l_1 > k$ şi observăm că ordinul se reduce cu $l_1 - k$.

Formula rezultă imediat, din definiţie. Dacă şi $l_2 > k$, putem reduce în continuare ordinul, etc.

De asemenea, putem scrie:

$$A_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k} = A_{n-l_1+k(k,l_2,...,l_m)}^{k}$$

dacă $l_1 > k$ şi observăm că ordinul se reduce cu $l_1 - k$.

Formula rezultă imediat, din definiţie. Dacă şi $l_2 > k$, putem reduce în continuare ordinul, etc.

De asemenea, putem scrie:

$$C_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k} = C_{n-l_1+k(k,l_2,...,l_m)}^{k}$$

dacă $l_1 > k$ şi observăm că ordinul se reduce cu $l_1 - k$.

Formula rezultă imediat, din definiţie. Dacă şi $l_2 > k$, putem reduce în continuare ordinul, etc.

Aceste formule foarte simple (şi cu deducere foarte simplă, direct din definiţie) sunt foarte utile în aplicaţii. Există şi alte formule de reducere a ordinului, mai complicate, care vor fi prezentate într-o lucrare viitoare. De asemenea există o formulă de reducere imediată a ordinului pentru grupările barate generalizate (a se vedea problema 261).

9 Formule pentru cazuri particulare ale ecuaţiei diofantice liniare

Pentru ecuaţia diofantică liniară:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k$$

cu numerele k, a_i, x_i naturale şi $a_i \neq 0$, se cunosc formulele de recurenţă pentru numărul soluţiilor ecuaţiei în numere naturale, fiind deduse în opera matematică a lui Euler.

Problema obţinerii unor formule pentru numărul de soluţii este rezolvată numai în câteva cazuri particulare, pentru valori ale lui m mici şi pentru coeficienţi cu o formă specială, utilizând

în acest scop raţionamente şi metode specifice acestor cazuri particulare, legate de numărul necunoscutelor (mic), de forma specială a coeficienţilor, etc.

Folosirea ulterioară a metodelor propuse este legată de dificultăţi crescânde.

În literatura matematică în limba română pot fi consultate de exemplu lucrările [5],[6],[7] (traduse din limba rusă).

Redăm în continuare pentru exemplificare numai câteva rezultate prezentate în lucrările amintite anterior.

1. Ecuaţia: $x + 2y + 3z = k$

admite un număr de soluţii cu numere naturale egal cu:

$$N = f(k) = \left[\frac{(k+3)^2 + 3}{12} \right].$$

2. Ecuaţia: $x + 2y + 3z + 5t = k$

admite un număr de soluţii cu numere naturale egal cu:

$$N = f(k) = 1 + \left[\frac{k(2k^2 + 33k + 162)}{360} \right].$$

3. Ecuaţia: $x + 2y + 3z + 4t = k$

admite un număr de soluţii cu numere naturale egal cu:

$$N = f(k) = 1 + \left[\frac{k^3 + 15k^2 + 72k - 9kr - 63r}{144} \right]$$

unde r este restul împărţirii lui k la 2.

4. Ecuaţia: $x + 2y + 3z + 7t = k$

admite un număr de soluţii cu numere naturale egal cu:

$$N = f(k) = 1 + \left[\frac{k(2k^2 + 39k + 222)}{504} \right].$$

5. Ecuaţia: $x + 3y + 5z + 7t = k$

admite un număr de soluţii cu numere naturale egal cu:

$$N = f(k) = 1 + \left[\frac{k(k^2 + 24k + 171)}{630} \right].$$

6. Ecuaţia: $x + 2y + 3z + 4t + 5u = k$

admite un număr de soluţii cu numere naturale egal cu:

$$N = f(k) = 1 + \left[\frac{k^4 + 30k^3 + 310k^2 + 1320k - 90kr - 645r}{2880} \right]$$

unde r este restul împărţirii lui k la 2.

Cititorul este îndemnat să verifice numerele N date de formulele de mai sus cu cele obţinute prin metodele indicate în prezenta carte: metoda recursivă şi programul de calculator EDL, ambele aceste două metode fiind absolut generale.

Formulele de mai sus sunt preluate din articolul [6]. Există acolo şi alte formule de acest tip, pe care nu le-am mai reprodus aici. În articolul [5] sunt analizate ecuaţii diofantice liniare cu 3 şi 4 necunoscute, folosind metode din teoria numerelor. În excelenta carte [7] sunt de asemenea prezentate câteva probleme de acest tip, în care se cere determinarea numărului de soluţii ale unei ecuaţii diofantice liniare în numere naturale. Amintim aici problema care solicită răspunsul la întrebarea „în câte moduri poate fi schimbată o rublă?”. Tot din această carte am folosit într-o lucrare anterioară două teoreme ale lui Euler legate de descompunerea numerelor în sume de termeni.

Bibliografie

[1] V. M. Popa, *Aranjamente generalizate,* Educaţia Matematică, vol. I, nr. 2, Sibiu, 2005

[2] V. M. Popa, *Combinări generalizate,* Educaţia Matematică, vol. II, nr. 1-2, Sibiu, 2006

[3] V. M. Popa, *Numărarea injecţiilor între două mulţimi multiple*, Educaţia Matematică, vol. IV, nr. 2, Sibiu, 2008 (în curs de apariţie)

[4] V. M. Popa, *Aspecte combinatoriale privind ecuaţia diofantică liniară cu coeficienţi unitari,* Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

[5] E. T. Avanesov, *Ecuaţii diofantice liniare cu 3 şi 4 necunoscute,* Gazeta Matematică, seria A, pag. 360, 1961

[6] ***, *Generalizarea metodei lui Ermakov,* Gazeta Matematică, seria A, nr.1-2, 1964

[7] A. M. Iaglom, I. M. Iaglom, *Probleme neelementare tratate elementar,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1983

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Metoda grafică pentru cazuri particulare ale grupărilor generalizate şi ale ecuaţiei diofantice liniare

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we present the graphical method for particular cases of generalized groupings. We also present a graphical method for particular cases of diophantine equation solutions number determination.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

În lucrarea de faţă se prezintă o metodă grafică pentru determinarea numărului grupărilor generalizate şi respectiv pentru determinarea numărului soluţiilor unei ecuaţii diofantice liniare. De la început trebuie să specificăm că metoda se poate aplica numai în unele cazuri particulare. Totuşi, datorită frumuseţii ei şi conexiunii neaşteptate cu geometria, considerăm că merită să expunem în continuare această metodă.

Prin această metodă putem determina numărul $C^{k}_{n(l_1,l_2,l_3)}$, respectiv numărul $G^{n(\lambda_1,\lambda_2)}_{n(l_1,l_2,l_3)}$.

De asemenea, numărul soluţiilor ecuaţiei diofantice liniare $x_1 + x_2 + x_3 = k$ cu limitări duble ale necunoscutelor: $b_1 \le x_1 \le l_1, b_2 \le x_2 \le l_2$, $b_3 \le x_3 \le l_3$.

Prin această metodă putem determina numărul soluţiilor ecuaţiei diofantice liniare $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = k$, unde coeficienţii sunt numere naturale strict pozitive iar necunoscutele sunt numere naturale în general cu limitări superioare: $x_1 \le l_1$, $x_2 \le l_2$, $x_3 \le l_3$, unde l_1, l_2, l_3 sunt numere naturale strict pozitive date.

De asemenea, putem determina numărul soluţiilor ecuaţiei diofantice liniare $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = k$, unde coeficienţii sunt numere naturale strict pozitive iar necunoscutele sunt numere naturale în general cu duble limitări: $b_1 \le x_1 \le l_1$, $b_2 \le x_2 \le l_2$, $b_3 \le x_3 \le l_3$, unde l_1, l_2, l_3 sunt numere naturale strict pozitive date iar b_1, b_2, b_3 sunt numere naturale date.

2 Metoda grafică pentru numerele $C^{k}_{n(l_1,l_2,l_3)}$ şi $G^{n(\lambda_1,\lambda_2)}_{n(l_1,l_2,l_3)}$

După cum se ştie, numărul $C^{k}_{n(l_1,l_2,l_3)}$ este egal cu numărul soluţiilor ecuaţiei diofantice liniare: $x_1 + x_2 + x_3 = k$, unde necunoscutele x_i verifică condiţiile: $0 \le x_i \le l_i$, $i = 1,2,3$.

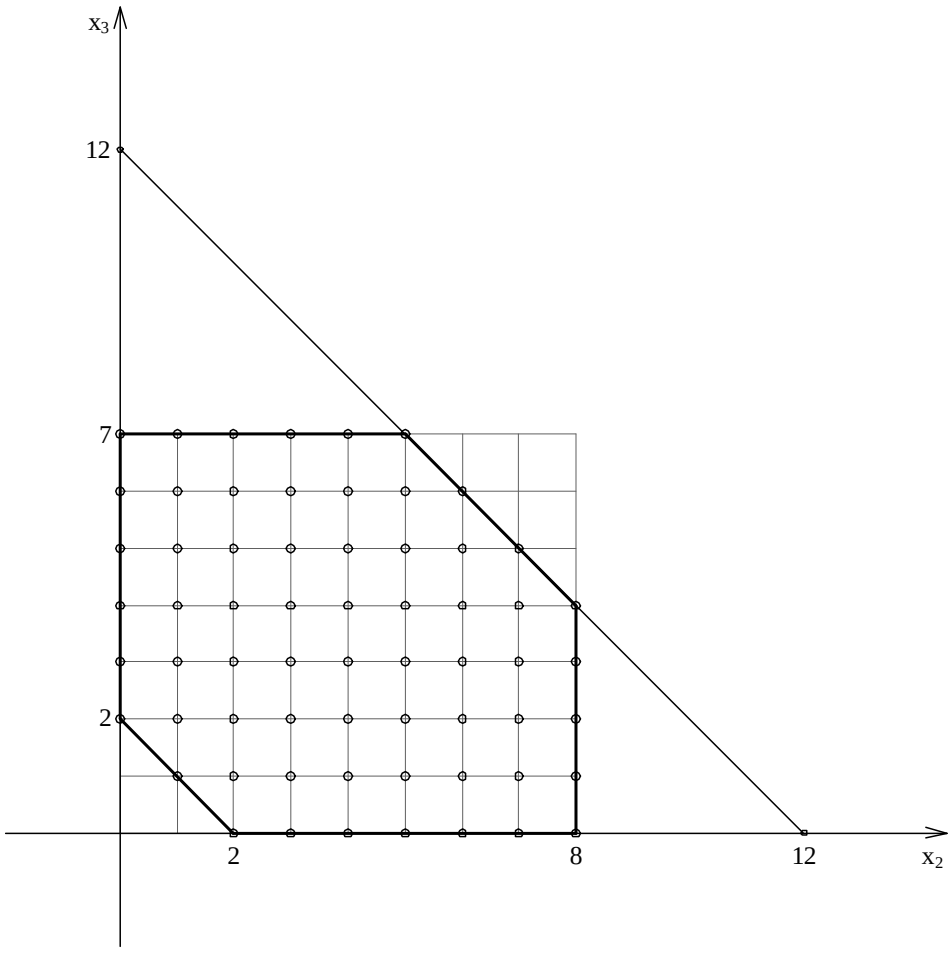
Putem scrie: $x_1 = k - x_2 - x_3$, unde $0 \le x_2 \le l_2$ şi $0 \le x_3 \le l_3$.

Punem şi condiţiile: $0 \le x_1 \le l_1$, adică: $0 \le k - x_2 - x_3 \le l_1$.

Vom determina numărul soluţiilor cu coordonate numere naturale ale sistemului de inecuaţii intersectând semiplanele respective. Ilustrăm metoda printr-un exemplu.

Exemplul 1

Să determinăm numărul $C^{12}_{25(10,8,7)}$, care este egal cu numărul soluţiilor în numere naturale ale ecuaţiei diofantice liniare: $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, unde necunoscutele x_i verifică condiţiile: $0 \le x_1 \le 10, 0 \le x_2 \le 8, 0 \le x_3 \le 7$. Din $0 \le x_1 \le 10$ deducem $0 \le 12 - x_2 - x_3; 2 - x_2 - x_3 \le 0$.



Numărând punctele $M(x_2, x_3)$ pentru care coordonatele naturale satisfac condiţiile date de inegalităţile anterioare (puncte marcate în figura de mai sus), obţinem $N = C^{12}_{25(10,8,7)} = 63$.

3 Metoda grafică pentru ecuaţia diofantică liniară cu coeficienţi unitari şi cu duble limitări ale necunoscutelor

Vom determina numărul soluţiilor ecuaţiei diofantice liniare: $x_1 + x_2 + x_3 = k$, unde necunoscutele x_i verifică condiţiile: $b_i \le x_i \le l_i$, $i = 1,2,3$.

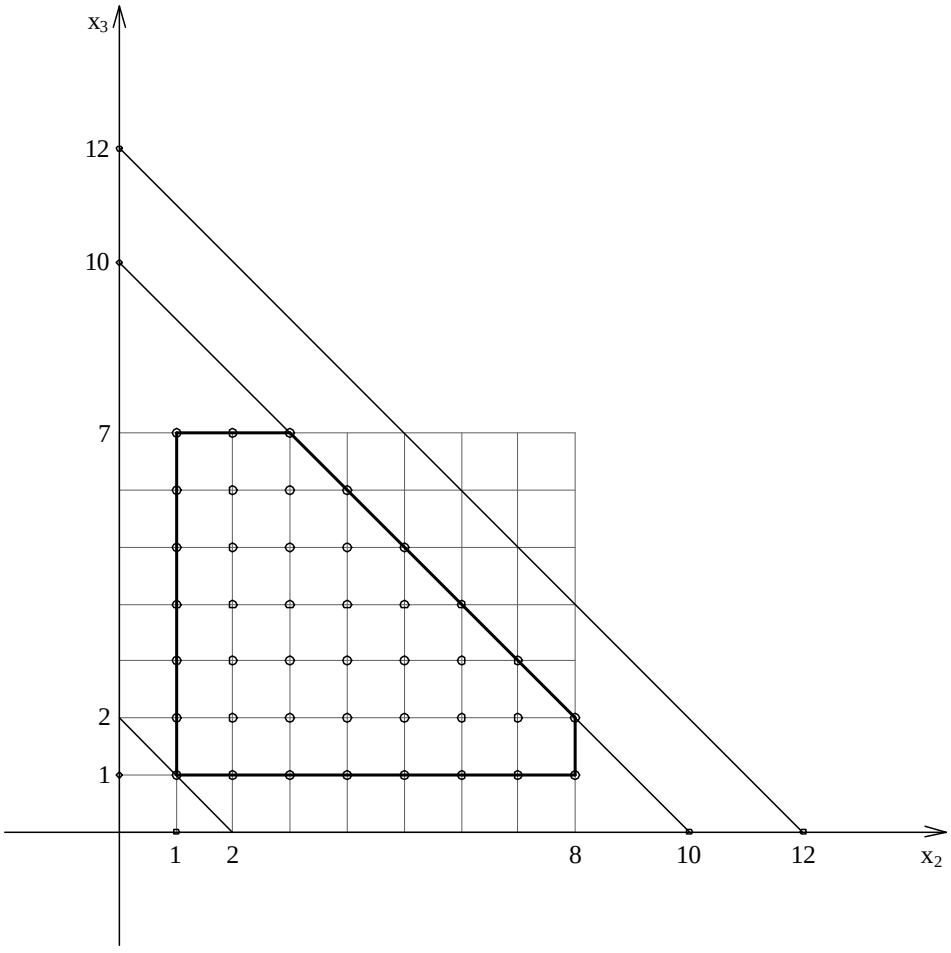
Putem scrie: $x_1 = k - x_2 - x_3$, unde $b_2 \le x_2 \le l_2$ şi $b_3 \le x_3 \le l_3$.

Punem şi condiţiile: $b_1 \le x_1 \le l_1$, adică: $b_1 \le k - x_2 - x_3 \le l_1$.

Vom determina numărul soluţiilor cu coordonate numere naturale ale sistemului de inecuaţii intersectând semiplanele respective. Ilustrăm metoda printr-un exemplu.

Exemplul 2

Să determinăm numărul soluţiilor în numere naturale ale ecuaţiei diofantice liniare: $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, unde necunoscutele x_i verifică condiţiile: $2 \le x_1 \le 10, 1 \le x_2 \le 8, 1 \le x_3 \le 7$. Din $2 \le x_1 \le 10$ deducem $0 \le 10 - x_2 - x_3;\ 2 - x_2 - x_3 \le 0$.



Numărând punctele $M(x_2, x_3)$ pentru care coordonatele naturale satisfac condiţiile date de inegalităţile anterioare (puncte marcate în figura de mai sus), obţinem N = 41.

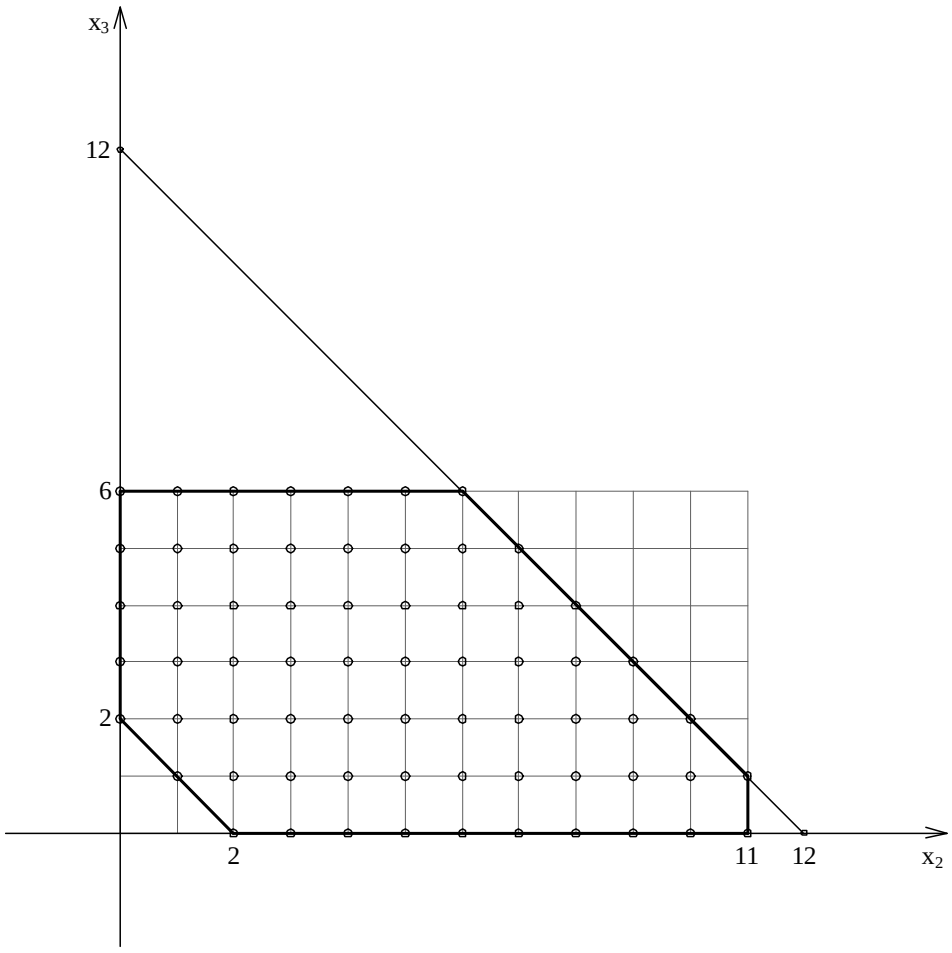
4 Metoda grafică pentru ecuaţia diofantică liniară cu limitări superioare ale necunoscutelor

Vom determina numărul soluţiilor ecuaţiei diofantice liniare $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = k$, unde necunoscutele verifică condiţiile: $x_1 \le l_1$, $x_2 \le l_2$, $x_3 \le l_3$. Metoda de lucru este asemănătoare cu cea expusă anterior. Vom prezenta metoda considerând un exemplu concret.

Exemplul 3

Vom determina numărul soluţiilor ecuaţiei diofantice liniare: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 24$ unde necunoscutele x_i verifică condiţiile: $x_1 \le 20$, $x_2 \le 11$, $0 \le x_3 \le 6$.

Din $x_1 \le 20$ deducem $0 \le 24 - 2x_2 - 2x_3$; $4 - 2x_2 - 2x_3 \le 0$.



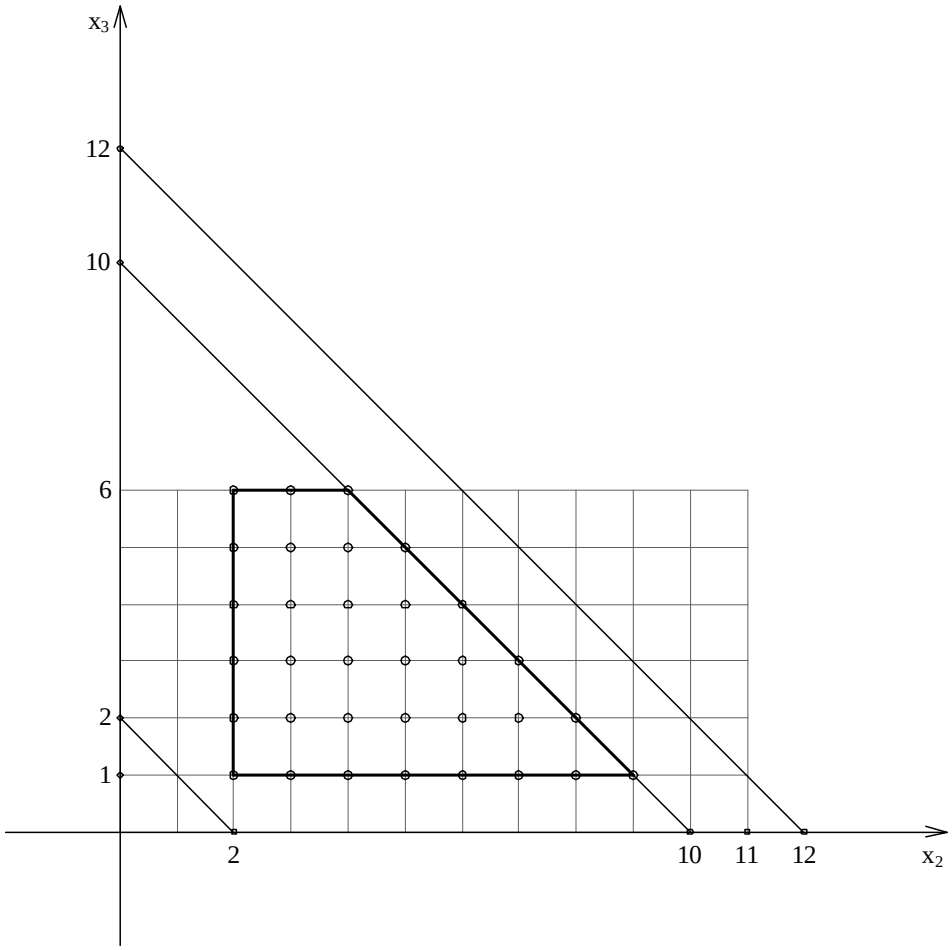
Numărând punctele $M(x_2, x_3)$ pentru care coordonatele satisfac condiţiile date de inegalităţile anterioare (puncte marcate în figura de mai sus), obţinem $N = 66$.

5 Metoda grafică pentru ecuaţia diofantică liniară cu duble limitări ale necunoscutelor

De asemenea putem determina numărul soluţiilor ecuaţiei diofantice liniare $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = k$, unde: $b_1 \le x_1 \le l_1$, $b_2 \le x_2 \le l_2$, $b_3 \le x_3 \le l_3$. Metoda de lucru este asemănătoare cu cea expusă anterior. Prezentăm un exemplu.

Exemplul 4

Vom determina numărul soluţiilor ecuaţiei diofantice liniare: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 24$ unde: $4 \le x_1 \le 20, 2 \le x_2 \le 11, 1 \le x_3 \le 6$. Deducem: $0 \le 20 - 2x_2 - 3x_3; 4 - 2x_2 - 2x_3 \le 0$.



Numărând punctele $M(x_2, x_3)$ pentru care coordonatele satisfac condiţiile date de inegalităţile anterioare (puncte marcate în figura de mai sus), obţinem $N = 33$.

6 Concluzii

Metoda grafică prezentată în lucrarea de faţă se poate utiliza pentru determinarea numărului grupărilor generalizate $G_{n(l_1,l_2,l_3)}^{n(\lambda_1,\lambda_2)}$, de asemenea pentru determinarea numărului combinărilor generalizate $C_{n(l_1,l_2,l_3)}^{k}$ (într-adevăr, după cum se ştie , numelele anterioare sunt egale între ele).

Putem utiliza metoda grafică pentru a determina numărul soluţiilor ecuaţiei diofantice $x_1 + x_2 + x_3 = k$ cu limitări duble ale necunoscutelor: $b_1 \le x_1 \le l_1, b_2 \le x_2 \le l_2, b_3 \le x_3 \le l_3$.

De asemenea, metoda grafică se poate utiliza pentru determinarea numărului soluţiilor cu numere naturale ale ecuaţiei diofantice liniare cu trei necunoscute: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = k$, unde coeficienţii sunt numere naturale strict pozitive iar necunoscutele sunt numere naturale în general cu limitări superioare: $x_1 \le l_1$, $x_2 \le l_2$, $x_3 \le l_3$, unde l_1, l_2, l_3 sunt numere naturale strict pozitive date.

În sfârşit, putem determina numărul soluţiilor cu numere naturale ale ecuaţiei diofantice liniare cu trei necunoscute: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = k$, unde coeficienţii sunt numere naturale strict pozitive iar necunoscutele sunt numere naturale în general cu duble limitări: $b_1 \le x_1 \le l_1$, $b_2 \le x_2 \le l_2$, $b_3 \le x_3 \le l_3$, unde l_1, l_2, l_3 sunt numere naturale strict pozitive date iar b_1, b_2, b_3 sunt numere naturale date.

Bibliografie

[1] V.M.Popa, *Grupări generalizate,* Sibiu, 2009

[2] V.M.Popa, *Cazuri speciale ale grupărilor generalizate,* Sibiu, 2009

[3] V. M. Popa, *Aspecte combinatoriale privind ecuaţia diofantică liniară cu coeficienţi unitari,* Sibiu, 2009

[4] V. M. Popa, *Aspecte combinatoriale privind ecuaţia diofantică liniară cu coeficienţi, naturali,* Sibiu, 2009 (toate cele patru referinţe bibliografice, în prezentul volum)

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Metode pentru calculul numărului grupărilor generalizate în cazul standard

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we present four methods for standard case generalized groupings number calculation. These are the enumeration method, the Newton type polynomials method, the recurrence method and the order reducing method.

We also show the conclusions.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1. Introducere

În unele lucrări anterioare s-a considerat numărul bijecţiilor între două mulţimi multiple [2], [5]. Acest număr reprezintă şi numărul grupărilor generalizate, respectiv al distribuirii obiectelor în căsuţe, în cazul standard k=n [6].

Notăm acest număr astfel: $N = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_u)}$.

În lucrarea de faţă vom prezenta metode pentru calculul acestui număr.

2. Metode de calcul

Autorul prezentei lucrări a elaborat patru metode pentru calculul numărului N prezentat mai sus.

Acestea sunt:

1. Metoda enumerării
2. Metoda polinoamelor de tip Newton
3. Metoda de recurenţă
4. Metoda reducerii ordinului.

3. Metoda enumerării

Această metodă se bazează pe observaţia că numărul N este egal cu numărul soluţiilor sistemului:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \lambda_i; \quad i = 1,2,...,\mu \\ \sum_{i=1}^{\mu} x_{ij} = l_j; \quad j = 1,2,...,m \end{cases} \tag{1}$$

unde $\lambda_i, l_j > 0$ şi $x_{ij} \geq 0$ sunt numere naturale.

Acest sistem are μm necunoscute şi $\mu + m - 1$ ecuaţii independente (datorită condiţiei $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = \sum_{j=1}^{m} l_j = n$). Prin urmare, gradul de nedeterminare al sistemului este:

$$\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1). \tag{2}$$

Se observă că numărul N reprezintă de asemenea numărul matricilor cu μ linii şi m coloane, conţinând numere naturale, la care sumele liniilor, respectiv ale coloanelor sunt impuse:

n	l_1	l_2	K	l_m
λ_1	x_{11}	x_{12}	K	x_{1m}
λ_2	x_{21}	x_{22}	K	x_{2m}
M				
λ_μ	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	K	$x_{\mu m}$

(3)

Metoda enumerării aplicată "manual" constă în construirea efectivă a matricilor de tipul (3) şi numărarea lor. Este evident că pentru n mare această variantă este total nepractică.

Pe baza metodei enumerării s-a realizat un program de calculator (numit programul GG1-NUMAR) care generează sistematic matrici de tipul (3) şi în final dă numărul acestor matrici. Pentru a obţine lista matricilor, utilizăm programul GG1-LISTA.

Vom prezenta în continuare listele matricilor de tipul (3) pentru trei exemple de numere $N = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$. Ordinea în care sunt scrise matricile (care coincide cu ordinea în care sunt ele generate de către programul GG1-LISTA) este ordinea firească, de la stânga la dreapta şi de sus în jos.

1. $N = G_{7(4,2,1)}^{7(4,2,1)} = 12$ (caz $l_1 + \lambda_1 = n + 1$).

Lista matricilor este următoarea.

7	4	2	1
4	1	2	1
2	2	0	0
1	1	0	0

7	4	2	1
4	2	2	0
2	2	0	0
1	0	0	1

7	4	2	1
4	2	1	1
2	2	0	0
1	0	1	0

7	4	2	1
4	2	2	0
2	1	0	1
1	1	0	0

7	4	2	1
4	3	1	0
2	1	0	1
1	0	1	0

7	4	2	1
4	2	1	1
2	1	1	0
1	1	0	0

7	4	2	1
4	3	1	0
2	1	1	0
1	0	0	1

7	4	2	1
4	3	0	1
2	1	1	0
1	0	1	0

7	4	2	1
4	3	1	0
2	0	1	1
1	1	0	0

7	4	2	1
4	4	0	0
2	0	1	1
1	0	1	0

7	4	2	1
4	3	0	1
2	0	2	0
1	1	0	0

7	4	2	1
4	4	0	0
2	0	2	0
1	0	0	1

2. $N = G_{8(3,3,2)}^{8(5,2,1)} = 17$ (caz $l_1 + \lambda_1 = n$).

Lista matricilor este următoarea.

8	3	3	2
5	0	3	2
2	2	0	0
1	1	0	0

8	3	3	2
5	1	3	1
2	2	0	0
1	0	0	1

8	3	3	2
5	1	2	2
2	2	0	0
1	0	1	0

8	3	3	2
5	1	3	1
2	1	0	1
1	1	0	0

8	3	3	2
5	2	3	0
2	1	0	1
1	0	0	1

8	3	3	2
5	2	2	1
2	1	0	1
1	0	1	0

8	3	3	2
5	2	3	0
2	0	0	2
1	1	0	0

8	3	3	2
5	3	2	0
2	0	0	2
1	0	1	0

8	3	3	2
5	1	2	2
2	1	1	0
1	1	0	0

8	3	3	2
5	2	2	1
2	1	1	0
1	0	0	1

8	3	3	2
5	2	1	2
2	1	1	0
1	0	1	0

8	3	3	2
5	2	2	1
2	0	1	1
1	1	0	0

8	3	3	2
5	3	2	0
2	0	1	1
1	0	0	1

8	3	3	2
5	3	1	1
2	0	1	1
1	0	1	0

8	3	3	2
5	2	1	2
2	0	2	0
1	1	0	0

8	3	3	2
5	3	1	1
2	0	2	0
1	0	0	1

8	3	3	2
5	3	0	2
2	0	2	0
1	0	1	0

3. $N = G_{7(3,3,1)}^{7(3,3,1)} = 16$ (caz $l_1 + \lambda_1 = n - 1$).

Lista matricilor este următoarea.

7	3	3	1
3	0	3	0
3	3	0	0
1	0	0	1

7	3	3	1
3	0	2	1
3	3	0	0
1	0	1	0

7	3	3	1
3	0	3	0
3	2	0	1
1	1	0	0

7	3	3	1
3	1	2	0
3	2	0	1
1	0	1	0

7	3	3	1
3	0	2	1
3	2	1	0
1	1	0	0

7	3	3	1
3	1	2	0
3	2	1	0
1	0	0	1

7	3	3	1
3	1	1	1
3	2	1	0
1	0	1	0

7	3	3	1
3	1	2	0
3	1	1	1
1	1	0	0

7	3	3	1
3	2	1	0
3	1	1	1
1	0	1	0

7	3	3	1
3	1	1	1
3	1	2	0
1	1	0	0

7	3	3	1
3	2	1	0
3	1	2	0
1	0	0	1

7	3	3	1
3	2	0	1
3	1	2	0
1	0	1	0

7	3	3	1
3	2	1	0
3	0	2	1
1	1	0	0

7	3	3	1
3	3	0	0
3	0	2	1
1	0	1	0

7	3	3	1
3	2	0	1
3	0	3	0
1	1	0	0

7	3	3	1
3	3	0	0
3	0	3	0
1	0	0	1

4. Metoda polinoamelor de tip Newton

Metoda polinoamelor de tip Newton este expusă în cele ce urmează.

Pentru calculul numărului:

$$N = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$$

putem utiliza algoritmul dedus în [2] şi pe care îl reproducem în continuare.

a) Se calculează polinomul:

$$P = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot ... \cdot P_{\lambda_\mu},$$

unde $P_{\lambda_i} = P_{\lambda_i}(x_1, x_2, ..., x_{\lambda_i})$ este polinomul de tip Newton, de grad λ_i, în λ_i nedeterminate.

Deci, $P = P(x_1, x_2, ..., x_\lambda)$ va avea gradul $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$ şi λ nedeterminate, unde $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$.

b) Se înlocuieşte în P:

$$x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$$
$$.....$$
$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda.$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Polinomul general de tip Newton are forma:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+...+nk_n=n \\ k_1,k_2,...,k_n \geq 0}} \frac{1}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! ... n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}.$$

Numărul de termeni din sumă este P(n), adică numărul de moduri diferite de a scrie pe n ca o sumă de numere naturale, în care ordinea termenilor nu are importanţă (sau numărul partiţiilor numărului natural n).

Aplicând formula generală de mai sus se obţin uşor primele opt polinoame de tip Newton:

$$P_1 = x_1$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right)$$

$$P_3 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3\right)$$

$$P_4 = \frac{1}{24}\left(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4\right)$$

$$P_5 = \frac{1}{120}\left(x_1^5 + 10x_1^3x_2 + 15x_1x_2^2 + 20x_1^2x_3 + 20x_2x_3 + 30x_1x_4 + 24x_5\right)$$

$$P_6 = \frac{1}{720}(x_1^6 + 45x_1^2x_2^2 + 15x_1^4x_2 + 15x_2^3 + 40x_1^3x_3 + 120x_1x_2x_3 + 40x_3^2 + 90x_1^2x_4 + 90x_2x_4 + 144x_1x_5 + 120x_6)$$

$$P_7 = \frac{1}{5040}(x_1^7 + 21x_1^5x_2 + 105x_1^3x_2^2 + 105x_1x_2^3 + 70x_1^4x_3 + 210x_2^2x_3 + 420x_1^2x_2x_3 + 280x_1x_3^2 + 210x_1^3x_4 + 630x_1x_2x_4 + 420x_3x_4 + 504x_1^2x_5 + 504x_2x_5 + 840x_1x_6 + 720x_7)$$

$$P_8 = \frac{1}{40320}(x_1^8 + 28x_1^6x_2 + 210x_1^4x_2^2 + 420x_1^2x_2^3 + 105x_2^4 + 112x_1^5x_3 + 1120x_1^3x_2x_3 + 1680x_1x_2^2x_3 + 1120x_1^2x_3^2 + 1120x_2x_3^2 + 2520x_1^2x_2x_4 + 420x_1^4x_4 + 1260x_2^2x_4 + 3360x_1x_3x_4 + 1260x_4^2 + 4032x_1x_2x_5 + 1344x_1^3x_5 + 2688x_3x_5 + 3360x_1^2x_6 + 3360x_2x_6 + 5760x_1x_7 + 5040x_8)$$

Algoritmul expus mai sus coincide cu metoda de numărare Pólya – de Bruijn aplicată în cazul problemei noastre [1]. Polinoamele P_{λ_i} apar ca polinoame indicatoare de cicluri pentru grupurile simetrice de permutări.

Vom calcula ca exemplu prin metoda polinoamele de tip Newton numărul $N = G_{6(3,2,1)}^{6(4,1,1)}$.

Avem:

$$P = P_4 \cdot P_1^2$$

$$P = \frac{1}{24}\left(x_1^6 + 6x_1^4x_2 + 8x_1^3x_3 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4\right)$$

Înlocuim în P:

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3;$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2;$$

$$x_3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3;$$

$$x_4 = y_1^4 + y_2^4 + y_3^4;$$

$$P=\frac{1}{24}[(y_1+y_2+y_3)^6+6(y_1+y_2+y_3)^4(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+8(y_1+y_2+y_3)^3(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+$$
$$+3(y_1+y_2+y_3)^2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^2+6(y_1+y_2+y_3)^2(y_1^4+y_2^4+y_3^4)]$$

Calculăm coeficientul monomului $y_1^3y_2^3y_3$:

$$N=\frac{1}{24}\left[\frac{6!}{3!2!1!}+6\left(\frac{4!}{1!2!1!}+\frac{4!}{3!0!1!}\right)+8\cdot\frac{3!}{0!2!1!}+3\cdot\frac{2!}{1!0!1!}\cdot 2\right]=8$$

S-a obţinut rezultatul: $N=G_{6(3,2,1)}^{6(4,1,1)}=8$.

5. Metoda de recurenţă

Numărul $N=G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ se poate determina cu ajutorul unor formule de recurenţă. Acestea permit calculul numărului N de ordin n cu ajutorul unor numere N de ordine mai mici.

Formulele de recurenţă se deduc uşor, pornind de la definiţia numărului $N=G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$. Ţinem seama pentru aceasta de interpretarea lui N ca număr al distribuirilor obiectelor în căsuţe. Sau, altfel, putem particulariza formula generală de recurenţă prezentată în lucrarea [6].

Prin ordonarea descrescătoare a indicilor superiori şi inferiori şi utilizarea proprietăţii de simetrie facem ca :

$$\lambda_\mu=\min(l_1,l_2,...,l_m,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m). \tag{4}$$

Putem afirma următoarele.

a) dacă $\lambda_\mu=1$, avem:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}=\sum_R G_{n-1(l_1-t_1,l_2-t_2,...,l_i-t_i,...,l_m-t_m)}^{n-1(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\mu-1})} \tag{5}$$

unde R este mulţimea soluţiilor ecuaţiei:

$$t_1+t_2+...+t_m=1 \tag{6}$$

în numere naturale, cu $0\le t_i\le 1,(i=1,2,...,m)$.

Numărul soluţiilor acestei ecuaţii este:

$$|R|=c_m^1=m \text{ (combinări cu repetiţie).} \tag{7}$$

b) Dacă $\lambda_\mu=2$, avem:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}=\sum_R G_{n-2(l_1-t_1,l_2-t_2,...,l_i-t_i,...,l_m-t_m)}^{n-2(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\mu-1})} \tag{8}$$

unde R este mulţimea soluţiilor ecuaţiei:

$$t_1+t_2+...+t_m=2 \tag{9}$$

în numere naturale, cu $0\le t_i\le 2,(i=1,2,...,m)$.

Numărul soluţiilor acestei ecuaţii este:

$$|R|=c_m^2=\frac{m(m+1)}{2}. \tag{10}$$

c) Dacă $\lambda_\mu=3$, avem:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-3(l_1-t_1,l_2-t_2,...,l_i-t_i,...,l_m-t_m)}^{n-3(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\mu-1})} \tag{11}$$

unde R este mulţimea soluţiilor ecuaţiei:

$$t_1 + t_2 + ... + t_m = 3 \tag{12}$$

în numere naturale, cu $0 \le t_i \le 3, (i = 1,2,...,m)$.

Numărul soluţiilor acestei ecuaţii este:

$$|R| = c_m^3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}. \tag{13}$$

Lista acestor formule de recurenţă poate fi continuată, dar aplicarea lor devine tot mai grea, datorită creşterii lui $|R|$.

Foarte simplă şi avantajoasă este aplicarea primelor două formule de recurenţă, deci pentru $\lambda_\mu = 1$ şi $\lambda_\mu = 2$.

Vom ilustra metoda prin două exemple.

Exemplul 1

Să se calculeze numărul $N = G_{10(3,3,2,2)}^{10(4,3,2,1)}$.

Aplicând formula (5) obţinem:

$$N = G_{9(2,3,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,1,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} = 2 \cdot G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + 2 \cdot G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} =$$
$$= 2 \cdot 109 + 2 \cdot 87 = 392.$$

Exemplul 2

Să se calculeze numărul $N = G_{10(4,2,2,2)}^{10(3,3,2,2)}$.

Aplicând formula (8) obţinem:

$$N = G_{8(2,2,2,2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,0,2,2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,2,0.2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,2,2,0)}^{8(3,3,2)} + G_{8(3,1,2,2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(3,2,1,2)}^{8(3,3,2)} +$$
$$+ G_{8(3,2,2,1)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,1,1,2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,1,2,1)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,2,1,1)}^{8(3,3,2)}$$

$$N = G_{8(2,2,2,2)}^{8(3,3,2)} + 3 \cdot G_{8(4,2,2)}^{8(3,3,2)} + 3 \cdot G_{8(3,2,2,1)}^{8(3,3,2)} + 3 \cdot G_{8(4,2,1,1)}^{8(3,3,2)} =$$
$$= 88 + 3 \cdot 29 + 3 \cdot 69 + 3 \cdot 45 = 517$$

Este evident că aplicarea metodei de recurenţă pentru $N = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ presupune cunoaşterea valorilor unor astfel de numere de ordine inferioare ($n-1$, $n-2$, ...).

6. Metoda reducerii ordinului

Numărul $N = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ se poate determina cu ajutorul unor formule de reducere a ordinului n (se pot vedea în acest sens şi lucrările [4] şi [5]).

Considerăm simbolul general:

$$N = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}. \tag{14}$$

Dacă $l_1 + \lambda_1 > n$, putem afirma că:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = G_{2n-l_1-\lambda_1(n-l_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}^{2n-l_1-\lambda_1(n-\lambda_1,l_2,...,l_m)} \tag{15}$$

şi ordinul este redus. Aceasta este o formulă de reducere imediată a ordinului şi ea rezultă din proprietatea de complementaritate şi din proprietatea de reducere imediată a ordinului, conform definiţiei, pentru grupările generalizate, cazul k<n, după cum se arată mai jos:

$$G_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)} = G_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^{n-\lambda_1(\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)} = G_{2n-l_1-\lambda_1(n-\lambda_1,l_2,\ldots,l_m)}^{n-\lambda_1(\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)} = G_{2n-l_1-\lambda_1(n-\lambda_1,l_2,\ldots,l_m)}^{2n-l_1-\lambda_1(n-l_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)}$$

Să analizăm acum cazurile când $l_1+\lambda_1 \le n$. Să presupunem că $l_1 \ge \lambda_1$. Această condiţie poate fi realizată întotdeauna, folosind proprietatea de simetrie (de dualitate).

Să considerăm matricea X:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & K & x_{1j} & K & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & K & x_{2j} & K & x_{2m} \\ M & & & & & \\ x_{i1} & x_{i2} & K & x_{ij} & K & x_{im} \\ M & & & & & \\ x_{\mu 1} & x_{\mu 2} & K & x_{\mu j} & K & x_{\mu m} \end{bmatrix}$$

Putem scrie matricea X în felul următor:

n	l_1	l_2	Λ	l_m
λ_1	x_{11}	x_{12}	Λ	x_{1m}
λ_2	x_{21}	x_{22}	Λ	x_{2m}
M	M			
λ_μ	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	Λ	$x_{\mu m}$

unde arătăm că sumele laturilor şi coloanelor sunt impuse. Numărul acestor matrici este chiar numărul considerat N.

Separând prima linie şi prima coloană, obţinem matricea redusă M, de dimensiuni $(\mu-1)(m-1)$.

$$M = \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & K & x_{2j} & K & x_{2m} \\ x_{32} & x_{33} & K & x_{3j} & K & x_{3m} \\ M & & & & & \\ x_{i2} & x_{i3} & K & x_{ij} & K & x_{im} \\ M & & & & & \\ x_{\mu 2} & x_{\mu 3} & K & x_{\mu j} & K & x_{\mu m} \end{bmatrix}$$

Această matrice este construită cu numere naturale care îndeplinesc următoarele condiţii:

$$\begin{cases} \sum_{j=2}^{m} x_{ij} \le \lambda_i; \quad i = 2, 3, \ldots, \mu \\ \sum_{i=2}^{\mu} x_{ij} \le l_j; \quad j = 2, 3, \ldots, m \end{cases}$$

unde $\lambda_i, l_j > 0$ şi $x_{ij} \geq 0$ sunt numere naturale. Elementele de pe linia 1 şi coloana 1 ale matricii totale X rezultă bine determinate la fiecare construcţie a matricii M cu condiţiile arătate mai sus. Singura problemă este că pentru x_{11} trebuie să avem grijă să eliminăm valorile întregi strict negative. Cu alte cuvinte, trebuie sa avem $x_{11} \geq 0$, număr natural.

Să notăm cu S suma elementelor matricii reduse M ("valoarea" matricii):

$$S = \sum_{i=2}^{\mu} \sum_{j=2}^{m} x_{ij} . \tag{16}$$

Putem scrie:

$$x_{11} + S + l_1 - x_{11} + \lambda_1 - x_{11} = n$$

deci:

$$x_{11} = S + l_1 + \lambda_1 - n . \tag{17}$$

Impunem condiţiile:

$$0 \leq x_{11} \leq \min(l_1, \lambda_1) = \lambda_1 . \tag{18}$$

Rezultă:

$$n - l_1 - \lambda_1 \leq S \leq n - l_1 . \tag{19}$$

În continuare vom face o analiză funcţie de valorile sumei $l_1 + \lambda_1 \leq n$.

a) Dacă $l_1 + \lambda_1 = n$, avem $x_{11} = S$, deci:

$$0 \leq S \leq n - l_1 = \lambda_1 . \tag{20}$$

Notând cu G_n simbolul general de ordinul n ((14), notaţie prescurtată) şi cu N_ν numărul de moduri în care matricea redusă $(\mu - 1)(m - 1)$ ia valoarea ν, putem scrie:

$$G_n = N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + ... + N_{n-l_1} . \tag{21}$$

b) Dacă $l_1 + \lambda_1 = n - 1$, avem $x_{11} = S - 1$, deci:

$$1 \leq S \leq n - l_1 = \lambda_1 + 1 . \tag{22}$$

Putem scrie:

$$G_n = N_1 + N_2 + ... + N_{n-l_1} . \tag{23}$$

c) Dacă $l_1 + \lambda_1 = n - 2$, avem $x_{11} = S - 2$, deci:

$$2 \leq S \leq n - l_1 = \lambda_1 + 2 . \tag{24}$$

Putem scrie:

$$G_n = N_2 + N_3 + ... + N_{n-l_1} . \tag{25}$$

d) Dacă $l_1 + \lambda_1 = n - 3$, avem $x_{11} = S - 3$, deci:

$$3 \leq S \leq n - l_1 = \lambda_1 + 3 . \tag{26}$$

Putem scrie:

$$G_n = N_3 + N_4 + ... + N_{n-l_1} . \tag{27}$$

e) Dacă $l_1 + \lambda_1 = n - 4$, avem $x_{11} = S - 4$, deci:

$$4 \leq S \leq n - l_1 = \lambda_1 + 4 . \tag{28}$$

Putem scrie:

$$G_n = N_4 + N_5 + ... + N_{n-l_1} . \tag{29}$$

f) Dacă $l_1 + \lambda_1 = n - 5$, avem $x_{11} = S - 5$, deci:

$$5 \le S \le n - l_1 = \lambda_1 + 5. \tag{30}$$

Putem scrie:

$$G_n = N_5 + N_6 + ... + N_{n-l_1}. \tag{31}$$

Fie simbolurile (notaţii simplificate):

$$G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} = G_n$$

$$G^{n-1(\lambda_1-1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n-1(l_1-1, l_2, ..., l_m)} = G_{n-1}$$

$$G^{n-2(\lambda_1-2, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n-2(l_1-2, l_2, ..., l_m)} = G_{n-2}$$

$$G^{n-3(\lambda_1-3, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n-3(l_1-3, l_2, ..., l_m)} = G_{n-3}$$

$$G^{n-4(\lambda_1-4, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n-4(l_1-4, l_2, ..., l_m)} = G_{n-4}$$

$$G^{n-5(\lambda_1-5, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n-5(l_1-5, l_2, ..., l_m)} = G_{n-5}$$

$$G^{n-6(\lambda_1-6, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n-6(l_1-6, l_2, ..., l_m)} = G_{n-6}$$

A) În ipoteza: $l_1 + \lambda_1 = n$,avem:

$$(l_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) = l_1 + \lambda_1 - 2 = n - 2 = (n-1) - 1$$

$$(l_1 - 2) + (\lambda_1 - 2) = l_1 + \lambda_1 - 4 = n - 4 = (n-2) - 2$$

$$(l_1 - 3) + (\lambda_1 - 3) = l_1 + \lambda_1 - 6 = n - 6 = (n-3) - 3$$

$$(l_1 - 4) + (\lambda_1 - 4) = l_1 + \lambda_1 - 8 = n - 8 = (n-4) - 4$$

$$(l_1 - 5) + (\lambda_1 - 5) = l_1 + \lambda_1 - 10 = n - 10 = (n-5) - 5$$

$$(l_1 - 6) + (\lambda_1 - 6) = l_1 + \lambda_1 - 12 = n - 12 = (n-6) - 6$$

Putem scrie:

$$G_n = N_0 + N_1 + ... + N_{n-l_1}$$

$$G_{n-1} = N_1 + N_2 + ... + N_{n-1-(l_1-1)}$$

$$G_{n-2} = N_2 + N_3 + ... + N_{n-2-(l_1-2)}$$

$$G_{n-3} = N_3 + N_4 + ... + N_{n-3-(l_1-3)}$$

$$G_{n-4} = N_4 + N_5 + ... + N_{n-4-(l_1-4)}$$

$$G_{n-5} = N_5 + N_6 + ... + N_{n-5-(l_1-5)}$$

$$G_{n-6} = N_6 + N_7 + ... + N_{n-6-(l_1-6)}$$

Rezultă:

$$G_n = G_{n-1} + N_0 \tag{32}$$

$$G_n = G_{n-2} + N_0 + N_1 \tag{33}$$

$$G_n = G_{n-3} + N_0 + N_1 + N_2 \tag{34}$$

$$G_n = G_{n-4} + N_0 + N_1 + N_2 + N_3 \tag{35}$$

$$G_n = G_{n-5} + N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \tag{36}$$

$$G_n = G_{n-6} + N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5. \tag{37}$$

B) În ipoteza : $l_1 + \lambda_1 = n - 1$, avem:

$$(l_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) = l_1 + \lambda_1 - 2 = n - 3 = (n - 1) - 2$$
$$(l_1 - 2) + (\lambda_1 - 2) = l_1 + \lambda_1 - 4 = n - 5 = (n - 2) - 3$$
$$(l_1 - 3) + (\lambda_1 - 3) = l_1 + \lambda_1 - 6 = n - 7 = (n - 3) - 4$$
$$(l_1 - 4) + (\lambda_1 - 4) = l_1 + \lambda_1 - 8 = n - 9 = (n - 4) - 5$$
$$(l_1 - 5) + (\lambda_1 - 5) = l_1 + \lambda_1 - 10 = n - 11 = (n - 5) - 6$$

Putem scrie:

$$G_n = N_1 + N_2 + ... + N_{n-l_1}$$
$$G_{n-1} = N_2 + N_3 + ... + N_{n-1-(l_1-1)}$$
$$G_{n-2} = N_3 + N_4 + ... + N_{n-2-(l_1-2)}$$
$$G_{n-3} = N_4 + N_5 + ... + N_{n-3-(l_1-3)}$$
$$G_{n-4} = N_5 + N_6 + ... + N_{n-4-(l_1-4)}$$
$$G_{n-5} = N_6 + N_7 + ... + N_{n-5-(l_1-5)}$$

Rezultă:

$$G_n = G_{n-1} + N_1 \tag{38}$$
$$G_n = G_{n-2} + N_1 + N_2 \tag{39}$$
$$G_n = G_{n-3} + N_1 + N_2 + N_3 \tag{40}$$
$$G_n = G_{n-4} + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \tag{41}$$
$$G_n = G_{n-5} + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 . \tag{42}$$

C) În ipoteza : $l_1 + \lambda_1 = n - 2$, avem:

$$(l_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) = l_1 + \lambda_1 - 2 = n - 4 = (n - 1) - 3$$
$$(l_1 - 2) + (\lambda_1 - 2) = l_1 + \lambda_1 - 4 = n - 6 = (n - 2) - 4$$
$$(l_1 - 3) + (\lambda_1 - 3) = l_1 + \lambda_1 - 6 = n - 8 = (n - 3) - 5$$
$$(l_1 - 4) + (\lambda_1 - 4) = l_1 + \lambda_1 - 8 = n - 10 = (n - 4) - 6$$

Putem scrie:

$$G_n = N_2 + N_3 + ... + N_{n-l_1}$$
$$G_{n-1} = N_3 + N_4 + ... + N_{n-1-(l_1-1)}$$
$$G_{n-2} = N_4 + N_5 + ... + N_{n-2-(l_1-2)}$$
$$G_{n-3} = N_5 + N_6 + ... + N_{n-3-(l_1-3)}$$
$$G_{n-4} = N_6 + N_7 + ... + N_{n-4-(l_1-4)}$$

Rezultă:

$$G_n = G_{n-1} + N_2 \tag{43}$$
$$G_n = G_{n-2} + N_2 + N_3 \tag{44}$$
$$G_n = G_{n-3} + N_2 + N_3 + N_4 \tag{45}$$
$$G_n = G_{n-4} + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 . \tag{46}$$

D) În ipoteza : $l_1 + \lambda_1 = n - 3$, avem:

$$(l_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) = l_1 + \lambda_1 - 2 = n - 5 = (n-1) - 4$$

$$(l_1 - 2) + (\lambda_1 - 2) = l_1 + \lambda_1 - 4 = n - 7 = (n-2) - 5$$

$$(l_1 - 3) + (\lambda_1 - 3) = l_1 + \lambda_1 - 6 = n - 9 = (n-3) - 6$$

Putem scrie:

$$G_n = N_3 + N_4 + ... + N_{n-l_1}$$

$$G_{n-1} = N_4 + N_5 + ... + N_{n-1-(l_1-1)}$$

$$G_{n-2} = N_5 + N_6 + ... + N_{n-2-(l_1-2)}$$

$$G_{n-3} = N_6 + N_7 + ... + N_{n-3-(l_1-3)}$$

Rezultă:

$$G_n = G_{n-1} + N_3 \tag{47}$$

$$G_n = G_{n-2} + N_3 + N_4 \tag{48}$$

$$G_n = G_{n-3} + N_3 + N_4 + N_5 . \tag{49}$$

E) In ipoteza: $l_1 + \lambda_1 = n - 4$, avem:

$$(l_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) = l_1 + \lambda_1 - 2 = n - 6 = (n-1) - 5$$

$$(l_1 - 2) + (l_1 - 2) = l_1 + \lambda_1 - 4 = n - 8 = (n-2) - 6$$

Putem scrie:

$$G_n = N_4 + N_5 + ... + N_{n-l_1}$$

$$G_{n-1} = N_5 + N_6 + ... + N_{n-1-(l_1-1)}$$

$$G_{n-2} = N_6 + N_7 + ... + N_{n-2-(l_1-2)}$$

Rezultă:

$$G_n = G_{n-1} + N_4 \tag{50}$$

$$G_n = G_{n-2} + N_4 + N_5 . \tag{51}$$

F) In ipoteza: $l_1 + \lambda_1 = n - 5$, avem:

$$(l_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) = l_1 + \lambda_1 - 2 = n - 7 = (n-1) - 6$$

Putem scrie:

$$G_n = N_5 + N_6 + ... + N_{n-l_1}$$

$$G_{n-1} = N_6 + N_7 + ... + N_{n-1-(l_1-1)}$$

Rezultă:

$$G_n = G_{n-1} + N_5 . \tag{52}$$

Fie N_ν numărul de cazuri în care matricea redusă M ia valoarea ν (reamintim că prin valoare înţelegem aici suma elementelor matricii).

Vom calcula numerele N_ν, $\nu = 0,1,2,3,4,5$.

În simbolul general standard:

$$N = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} \tag{53}$$

aplicăm proprietatea de simetrie, astfel încât să avem $l_1 \geq \lambda_1$ (pentru ca numerele N_ν să se exprime prin grupări cu ordin cât mai mici).

Indicii inferiori şi superiori sunt în ordine descrescătoare:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_\mu \tag{54}$$

$$l_1 \geq l_2 \geq ... \geq l_m \tag{55}$$

În mulţimea de numere $\lambda_2, \lambda_{3,...,\lambda_\mu}$, facem următoarele notaţii:

α_1 = numărul de cifre 1;

α_2 = numărul de cifre 2;

….....

$\alpha_{\nu-1}$ = numărul de cifre $\nu-1$;

α_ν = numărul de cifre ν sau mai mari decât ν.

Putem afirma că: $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu = \mu - 1.$ (56)

Obţinem imediat expresiile:

$$N_0 = 1 \tag{57}$$

$$N_1 = (\mu-1)(m-1) \tag{58}$$

Pentru a obţine expresia lui N_2 ţinem seama de partiţiile lui 2 şi anume:

$2 = 1+1$. Obţinem:

$$N_2 = C^1_{\alpha_2} G^{2(2)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} + C^2_{\alpha_2+\alpha_1} G^{2(1,1)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)}$$

Expresia se mai poate scrie:

$$N_2 = \alpha_2 G^{n-l_1(2,\, n-l_1-2)}_{n-l_1(l_2,\, ...,\, l_m)} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2} G^{n-l_1(1,\, 1,\, n-l_1-2)}_{n-l_1(l_2,\, ...,\, l_m)} \tag{59}$$

Pentru a obţine expresia lui N_3 ţinem seama de partiţiile lui 3 şi anume:

$3 = 2+1 = 1+1+1$. Obţinem:

$$N_3 = C^1_{\alpha_3} G^{3(3)}_{n-l_1(l_{2,...,l_m})} + C^1_{\alpha_3+\alpha_2} C^1_{\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1-1} G^{3(2,1)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} + C^3_{\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1} G^{3(1,1,1)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)}$$

Expresia se mai poate scrie:

$$N_3 = \alpha_3 G^{n-l_1(3,n-l_1-3)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} + (\alpha_3+\alpha_2)(\mu-2) G^{n-l_1(2,1,n-l_1-3)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} + \\ + \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{6} G^{n-l_1(1,1,1,n-l_1-3)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)}. \tag{60}$$

Pentru a obţine expresia lui N_4 ţinem seama de partiţiile lui 4 şi anume:

$4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$. Obţinem:

$$N_4 = C^1_{\alpha_4} G^{4(4)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} + C^1_{\alpha_4+\alpha_3} C^1_{\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1-1} G^{4(3,1)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} + C^2_{\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2} G^{4(2,2)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} + \\ + C^1_{\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2} C^2_{\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1-1} G^{4(2,1,1)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} + C^4_{\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1} G^{4(1,1,1,1)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)}.$$

Expresia se mai poate scrie:

$$N_4 = \alpha_4 G^{n-l_1(4,n-l_1-4)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} + (\alpha_4+\alpha_3)(\mu-2)G^{n-l_1(3,1,n-l_1-4)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} +$$
$$+\frac{(\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2)(\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2-1)}{2}G^{n-l_1(2,2,n-l_1-4)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} +$$
$$+(\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2)\frac{(\mu-2)(\mu-3)}{2}G^{n-l_1(2,1,1,n-l_1-4)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} +$$
$$+\frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)}{24}G^{n-l_1(1,1,1,1,n-l_1-4)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)}. \quad (61)$$

Pentru a obţine expresia lui N_5 ţinem seama de partiţiile lui 5 şi anume:

5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1. Obţinem:

$$N_5 = C^1_{\alpha_5} G^{5(5)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} + C^1_{\alpha_5+\alpha_4} C^1_{\alpha_5+\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1-1} G^{5(4,1)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} +$$
$$+C^1_{\alpha_5+\alpha_4+\alpha_3} C^1_{\alpha_5+\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2-1} G^{5(3,2)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} + C^1_{\alpha_5+\alpha_4+\alpha_3} C^2_{\alpha_5+\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1-1} G^{5(3,1,1)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} +$$
$$+C^2_{\alpha_5+\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2} C^1_{\alpha_5+\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1-2} G^{5(2,2,1)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} + C^1_{\alpha_5+\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2} C^3_{\alpha_5+\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1-1} G^{5(2,1,1,1)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} +$$
$$+C^5_{\alpha_5+\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1} G^{5(1,1,1,1,1)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)}.$$

Expresia se mai poate scrie:

$$N_5 = \alpha_5 G^{n-l_1(5,n-l_1-5)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} + (\alpha_5+\alpha_4)(\mu-2)G^{n-l_1(4,1,n-l_1-5)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} +$$
$$+(\alpha_5+\alpha_4+\alpha_3)(\alpha_5+\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2-1)G^{n-l_1(3,2,n-l_1-5)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} +$$
$$+(\alpha_5+\alpha_4+\alpha_3)\frac{(\mu-2)(\mu-3)}{2}G^{n-l_1(3,1,1,n-l_1-5)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} +$$
$$+\frac{(\alpha_5+\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2)(\alpha_5+\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2-1)}{2}(\mu-3)G^{n-l_1(2,2,1,n-l_1-5)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} +$$
$$+(\alpha_5+\alpha_4+\alpha_3+\alpha_2)\frac{(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)}{6}G^{n-l_1(2,1,1,1,n-l_1-5)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)} +$$
$$+\frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)(\mu-5)}{120}G^{n-l_1(1,1,1,1,1,n-l_1-5)}_{n-l_1(l_2,...,l_m)}. \quad (62)$$

Metoda reducerii ordinului constă în aplicarea uneia dintre relaţiile: (32), (33), ..., (52) şi a expresiilor pentru N_ν (57), (58),..., (62).

Vom ilustra metoda prin câteva exemple.

Exemplul 1

Să se calculeze numărul $N = G^{10(4,3,2,1)}_{10(6,2,1,1)}$.

Aplicând formulele (32) şi (57) avem:

$$N = G^{9(3,3,2,1)}_{9(5,2,2,1)} + N_0 = 105 + 1 = 106$$

Exemplul 2

Să se calculeze numărul $N = G^{10(4,3,2,1)}_{10(5,2,2,1)}$.

Aplicând formulele (38) şi (58) avem:

$$N = G^{9(3,3,2,1)}_{9(4,2,2,1)} + N_1 = 188 + 9 = 197$$

Exemplul 3

Să se calculeze numărul $N = G^{10(4,3,2,1)}_{10(4,2,2,2)}$.

Aplicând formula (43) avem:

$$N = G_{9(3,2,2,2)}^{9(3,3,2,1)} + N_2$$

Pentru a calcula numărul N_2, aplicăm formula (59), unde $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2$.

$$N_2 = 2 \cdot G_{6(2,2,2)}^{6(2,4)} + \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot G_{6(2,2,2)}^{6(1,1,4)} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 9 = 39$$

Obţinem:

N=295+39=334.

Exemplul 4

Să se calculeze numărul $N = G_{10(4,2,2,2)}^{10(3,3,2,2)}$.

Aplicând formula (47) avem:

$$N = G_{9(3,2,2,2)}^{9(2,3,2,2)} + N_3$$

Pentru a calcula numărul N_3, aplicăm formula (60), unde $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 1$.

$$N_3 = G_{6(2,2,2)}^{6(3,3)} + 3 \cdot 2 \cdot G_{6(2,2,2)}^{6(2,1,3)} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6} \cdot G_{6(2,2,2)}^{6(1,1,1,3)} = 7 + 6 \cdot 15 + 24 = 121$$

Obţinem:

N=396+121=517.

Acest număr a fost calculat anterior prin metoda recurenţei, rezultatul obţinut fiind evident acelaşi.

Ca şi la metoda de recurenţă, metoda reducerii ordinului pentru calculul numărului $N = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ presupune cunoaşterea valorilor unor astfel de numere de ordine inferioare.

7. Concluzii

Numerele $N = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ sunt cu atât mai “simple” (mai mici şi mai uşor de calculat) cu atât ordinul n este mai mic. Din acest motiv, tabelele conţinând aceste numere s-au calculat în ordinea crescătoare a ordinului, adică începând cu n = 1, continuând cu n = 2 ş.a.m.d. până la n = 10 (a se vedea lucrarea [3]). Dintre metodele “manuale” de calcul, prezentate mai sus, deosebit de practice sunt formulele de recurenţă pentru $\lambda_\mu = 1$ şi $\lambda_\mu = 2$ şi formulele de reducere a ordinului pentru $l_1 + \lambda_1 > n$; $l_1 + \lambda_1 = n$; $l_1 + \lambda_1 = n - 1$. Deci, 5 formulele de calcul simple cu care se pot calcula din aproape în aproape orice tabel, bazîndu-ne pe cele existente (anterioare). Totuşi un astfel de calcul ,,manual” al primelor 10 tabele cu numerele $G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ necesită cca 40 de ore de calcul.

Din acest motiv, preferăm să utilizăm calculatorul pentru calculul numerelor $N = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$. Programul de calculator GG1-NUMAR, bazat pe metoda enumerării, scris în limbajul C şi rulat pe un calculator IBM-Pentium, 1.6 GHz, 1 GB memorie RAM şi 130 GB pentru HDD permite efectuarea aceluiaşi calcul în cca 5 ore (aici este evident inclus şi timpul necesar introducerii datelor). Programul de calculator GG1-LISTA, bazat tot pe metoda enumerării ne oferă posibilitatea obţinerii listei matricilor de tip (3) asociate numerelor

$N = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$. Este de fapt singura posibilitate raţională de realizare a acestei liste, deoarece este evident că obţinerea ei „manuală” este extrem de dificilă.

Dar marele avantaj al utilizării programului de calculator este posibilitatea calculării unor numere $G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ pentru un n oarecare, când nu dispunem de tabelele cu numerele $G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ pentru n- 1, n - 2 ... De asemenea, comparaţia cu metoda polinoamelor de tip Newton evidenţiază avantajul absolut, incontestabil, al utilizării programului de calculator.

Ca exerciţiu, propunem cititorului să verifice prin calcul, utilizând metodele expuse anterior, următoarele exemple numerice:

$G_{8(3,2,1,1,1)}^{8(2,2,2,1,1)} = 618$ $G_{9(3,2,2,1,1)}^{9(3,2,2,1,1)} = 1173$ $G_{9(2,2,2,1,1,1)}^{9(3,3,1,1,1)} = 1980$

$G_{10(2,2,2,2,2)}^{10(3,3,2,2)} = 1830$ $G_{10(5,2,2,1)}^{10(2,2,2,1,1,1,1)} = 1875$ $G_{11(5,3,2,1)}^{11(3,2,2,2,1,1)} = 2078.$

Bibliografie

[1] I.Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[2] V.M.Popa, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81

[3] V.M.Popa, *Contribuţii la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicaţii*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj-Napoca, 1999

[4] V.M.Popa, *The Order Reducing Method for Discreet Unbalanced Loads Number Determination*, Acta Universitatis Cibiniensis, volumul XLII, Seria Tehnică, H. Inginerie Electrică şi Electronică (nivel internaţional), Sibiu, 2001

[5] V.M.Popa, *Matematică aplicată*, Sibiu, 2005

[6] V.M.Popa, *Grupări generalizate*, Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Programe de calculator cu caracter combinatorial

Vasile Mircea Popa

Abstract

This paper presents five computer software combinatorial programs regarding the generalized groupings in standard case, generalized groupings, generalized barred groupings, generalized elementary groupings and linear diophantine equation. This programs generate the solutions of respective problems and can supply the number of solutions or the list of solutions.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A99

1 Introducere

Se prezintă în continuare cinci programe de calculator cu caracter combinatorial privind grupările generalizate în cazul standard, grupările generalizate, grupările barate generalizate, grupările elementare generalizate, şi ecuaţia diofantică liniară. Aceste programe generează soluţiile problemelor respective şi pot furniza numărul de soluţii sau lista soluţiilor.

2 Programul de calculator GG1

Numărul $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$ reprezintă, după cum se ştie, numărul bijecţiilor între două mulţimi multiple, dar şi numărul grupărilor generalizate şi al distribuirilor obiectelor în căsuţe, în formulări pe care nu le mai detaliem aici.

Acest număr reprezintă în acelaşi timp numărul de soluţii cu numere naturale ale sistemului de ecuaţii:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \lambda_i; \quad \sum_{i=1}^{\mu} x_{ij} = l_j; \quad \lambda_i, l_j > 0; \quad x_{ij} \geq 0. \tag{1}$$

unde $\lambda_i, l_j > 0$; $x_{ij} \geq 0$ sunt numere naturale.

Sistemul are μm necunoscute şi $\mu + m - 1$ ecuaţii independente (datorită condiţiei $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = \sum_{j=1}^{m} l_j = n$). Prin urmare, gradul de nedeterminare al sistemului (1) este:

$$\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1).$$

Notăm acest număr astfel: $N = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$.

Observăm că numărul N reprezintă şi numărul matricilor cu μ linii şi m coloane formate cu numere naturale, în care sumele liniilor şi coloanelor sunt impuse:

n	l_1	l_2	K	l_m
λ_1	x_{11}	x_{12}	Λ	x_{1m}
λ_2	x_{21}	x_{22}	Λ	x_{2m}
M	M	M	M	M
λ_μ	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	Λ	$x_{\mu m}$

(2)

Putem calcula numărul N prin metoda enumerării aplicată matricilor de mai sus.

Metoda enumerării aplicată "manual" constă în construirea efectivă şi sistematică a matricilor de tipul (2) şi numărarea lor. Este evident că pentru n mare această variantă este total nepractică.

În continuare vom considera un caz particular şi anume vom determina prin metoda enumerării numărul $G_{7(3,2,2)}^{7(4,3)} = 8$.

Construind sistematic toate matricile posibile de tipul (2) cu datele numerice respective ($n = 7, m = 3, \mu = 2, l_1 = 3, l_2 = 2, l_3 = 2, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3$), obţinem:

7	3	2	2
4	0	2	2
3	3	0	0

7	3	2	2
4	1	2	1
3	2	0	1

7	3	2	2
4	2	2	0
3	1	0	2

7	3	2	2
4	1	1	2
3	2	1	0

7	3	2	2
4	2	1	1
3	1	1	1

7	3	2	2
4	3	1	0
3	0	1	2

7	3	2	2
4	2	0	2
3	1	2	0

7	3	2	2
4	3	0	1
3	0	2	1

Prin urmare, am obţinut prin metoda enumerării aplicată în acest caz: $G_{7(3,2,2)}^{7(4,3)} = 8$.

Pe baza metodei enumerării s-a realizat un program de calculator (numit programul GG1) care generează sistematic matrici de tipul (2) şi în final dă numărul acestor matrici. Programul de calculator va fi prezentat în continuare.

Considerăm matricile (2) în care sumele laturilor şi coloanelor sunt impuse. Numărul acestor matrici este chiar N.

n	l_1	l_2	K	l_m
λ_1	x_{11}	x_{12}	Λ	x_{1m}
λ_2	x_{21}	x_{22}	Λ	x_{2m}
M	M	M	M	M
λ_μ	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	Λ	$x_{\mu m}$

(3)

Separăm linia întâi şi coloana întâi. Elementele de pe această linie şi această coloană rezultă bine determinate (şi anume, numere naturale), prin calcul, la fiecare completare a matricii rămase de dimensiuni $(\mu-1)(m-1)$ cu numere naturale supuse la anumite restricţii. Această matrice ramasă, de dimesiuni $(\mu-1)(m-1)$ o numim matrice redusă.

Să notăm cu S suma elementelor acestei matrici reduse (“valoarea” matricii reduse):

$$S = \sum_{i=2}^{\mu}\sum_{j=2}^{m} x_{ij} \tag{4}$$

Putem scrie:

$$x_{11} + S + l_1 - x_{11} + \lambda_1 - x_{11} = n \text{ , deci: } x_{11} = S + l_1 + \lambda_1 - n .$$

Pentru a avea: $x_{11} \geq 0$ trebuie să avem $S \geq n - l_1 - \lambda_1$. (5)

Programul de calculator GG1-NUMAR generează sistematic matrici reduse de tipul arătat mai sus şi în final dă numărul acestor matrici. Problema se reduce la determinarea matricilor reduse de dimensiuni μ-1 şi m-1, în care variabilele x_{ij} iau valori naturale cuprinse între 0 şi o valoare maximă iar suma lor este mai mare sau egală decât numărul n - l_1 - λ_1 (a se vedea relaţia 5).

Putem scrie:

$$0 \leq x_{ij} \leq \min\left(\lambda_i - x_{i2} - x_{i3} - K - x_{i,j-1}; l_j - x_{2j} - x_{3j} - K - x_{i-1,j}\right) \tag{6}$$

$$S = \sum_{i=2}^{\mu}\sum_{j=2}^{m} x_{ij} \geq n - l_1 - \lambda_1 \tag{7}$$

cu referire a matricea:

$$M = \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & K & x_{2j} & K & x_{2m} \\ x_{32} & x_{33} & K & x_{3j} & K & x_{3m} \\ M & & & & & \\ x_{i2} & x_{i3} & K & x_{ij} & K & x_{im} \\ M & & & & & \\ x_{\mu 2} & x_{\mu 3} & K & x_{\mu j} & K & x_{\mu m} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Programul de calculator GG1 generează sistematic toate matricile de tipul (8) în care variabilele x_{ij} verifică relaţiile (6) şi (7). Fiecare dintre cele (μ - 1)(m - 1) variabile ia valori între 0 şi valoarea maximă respectivă şi anume $x_{\mu m}$ variază cel mai rapid iar x_{22} cel mai lent (se parcurg în sens invers liniile matricii, iar acestea se parcurg de jos în sus).

Numărul matricilor reduse de tipul (8) coincide cu numărul matricilor (2) şi este deci chiar $N = G^{n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}$.

Programul GG1-NUMAR permite obţinerea numerelor $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$ în timpi variind de la o fracţiune de secundă la câteva minute, în cazul valorilor mari (de ordinul milioanelor).

Programul a fost scris în C şi în Mathcad. Propunem cititorului ca un exerciţiu de programare, să scrie un astfel de program, după principiul expus mai sus.

Varianta de program GG1-LISTA realizează în plus şi obţinerea listei de matrici de tipul (2).

Pentru fiecare matrice redusă generată, se calculează şi numerele:

$$x_{i1} = \lambda_i - \sum_{k=2}^{m} x_{ik} \quad (i = 2,3,..., \mu), \tag{9}$$

$$x_{1j} = l_j - \sum_{k=2}^{\mu} x_{kj} \quad (j = 2,3,..., m), \tag{10}$$

$$x_{11} = S + l_1 + \lambda_1 - n, \text{ cu condiţia } x_{11} \geq 0, \text{ deci: } S \geq n - l_1 - \lambda_1. \tag{11}$$

Aceste numere se adaugă matricilor reduse şi astfel obţinem matricile complete de tipul (2).

Şi varianta de program GG1-LISTA a fost scrisă în C şi în Mathcad.

Utilizând programul de calculator GG1, s-au obţinut tabelele cu numerele $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$ (n = 1, 2,…, 10). Numărul n este notat în colţul din stânga-sus al fiecărui tabel. Indicii inferiori sunt marcaţi în partea stângă a tabelelor, sub forma (l_1, l_2, …, l_m). Indicii superiori sunt marcaţi în partea superioară a tabelelor, sub forma (λ_1, λ_2,…, λ_μ). La intersecţia liniei şi a coloanei respective se citeşte numărul $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$.

Tabelele sunt exhaustive şi prezintă simetrie faţă de diagonala principală, datorită proprietăţii de simetrie (sau de dualitate).

Numerele $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$ sunt cu atât mai “simple” (mai mici şi mai uşor de calculat) cu atât ordinul n este mai mic. Din acest motiv, tabelele s-au calculat în ordinea prezentată, adică începând cu n = 1, continuând cu n = 2 ş.a.m.d. până la n = 10. Dintre metodele “manuale” de calcul, deosebit de practice sunt formulele de recurenţă pentru $\lambda_\mu = 1$ şi $\lambda_\mu = 2$ şi formulele de reducere a ordinului pentru $l_1 + \lambda_1 > n$; $l_1 + \lambda_1 = n$; $l_1 + \lambda_1 = n - 1$. Deci, 5 formulele de calcul simple cu care se pot calcula din aproape în aproape orice tabel, bazîndu-ne pe cele existente (anterioare). Totuşi un astfel de calcul ,,manual” al primelor 10 tabele cu numerele $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$ necesită cca 40 de ore de calcul.

Programul de calculator GG1, scris în limbajul C şi rulat pe un calculator IBM-Pentium, 1.6 GHz, 1 GB memorie RAM şi 130 GB pentru HDD permite efectuarea aceluiaşi calcul în cca 5 ore (aici este evident inclus şi timpul necesar introducerii datelor).

Dar marele avantaj al utilizării programului de calculator este posibilitatea calculării unor numere $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$ pentru un n oarecare, când nu dispunem de tabelele cu numerele $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$ pentru n- 1, n - 2 ... De asemenea, comparaţia cu metoda polinoamelor de tip Newton evidenţiază avantajul absolut, incontestabil, al utilizării programului de calculator.

3 Programul de calculator GG2

Programul de calcularor GG2-NUMAR realizează calculul numărului $G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$.

Numărul $G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ reprezintă, după cum se ştie, numărul injecţiilor între două mulţimi multiple, dar şi numărul grupărilor generalizate şi al distribuirilor obiectelor în căsuţe, în formulări pe care nu le mai detaliem aici.

Pentru aceasta, considerăm matricea:

k, n	l_1	l_2	K	l_m
λ_1	x_{11}	x_{12}	Λ	x_{1m}
λ_2	x_{21}	x_{22}	Λ	x_{2m}
M	M	M	M	M
λ_μ	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	Λ	$x_{\mu m}$

(12)

Generăm matricea redusă (din dreapta) după procedeul de la programul GG1. Valarea ei o notăm cu S.

Trebuie să avem:

$$s = x_{11} + x_{21} + ... + x_{\mu 1} \le l_1 .$$

Dar, avem: $s + S = k$. Deci, $k - S \le l_1$, sau: $S \ge k - l_1$.

Prin urmare, trebuie să avem îndeplinită această condiţie: $S \ge k - l_1$. (13)

Programul de calculator GG2-NUMAR generează matricile reduse arătate mai sus, cu condiţia indicată şi numără aceste matrici. Se obţine astfel numărul $N = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$.

Varianta de program GG2-LISTA realizează în plus şi obţinerea listei de matrici de tipul (12).

Pentru fiecare matrice redusă generată, se calculează şi numerele:

$$x_{i1} = \lambda_i - \sum_{k=2}^{m} x_{ik} \quad (i = 1,2,...,\mu) . \tag{14}$$

Aceste numere se adaugă matricilor reduse şi astfel obţinem matricile complete de tipul (12).

Programele de calculator GG2-NUMAR şi GG2-LISTA au fost scrise în C şi în Mathcad.

4 Programul de calculator GG3

Programul de calcularor GG3-NUMAR realizează calculul numărului $\overline{G}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$.

Numărul $\overline{G}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ reprezintă, după cum se ştie, numărul grupărilor barate

generalizate şi al distribuirilor corespunzătoare a obiectelor în căsuţe, în formulări pe care nu le mai detaliem aici.

Pentru aceasta, procedăm ca la programul GG2 dar facem în plus şi o "filtrare". Trebuie să avem:

$$\begin{aligned} & x_{12} + x_{22} + ... + x_{\mu 2} \geq 1 \\ & ..... \\ & x_{1m} + x_{2m} + ... + x_{\mu m} \geq 1 \end{aligned} \tag{15}$$

(deci m-1 condiţii).

De asemenea:

$$x_{11} + x_{21} + ... + x_{\mu m} = s \geq 1. \tag{16}$$

Deci, $k - S \geq 1$, sau: $S \leq k - 1$. Trebuie să avem şi această condiţie. (17)

Deci, în total m condiţii suplimentare faţă de programul GG2.

Programul de calculator GG3-NUMAR generează matricile reduse arătate mai sus, cu condiţiile indicate şi numără aceste matrici. Se obţine astfel numărul $N = \overline{G}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$.

Varianta de program GG3-LISTA realizează în plus şi obţinerea listei de matrici de tipul (12).

Pentru fiecare matrice redusă generată, se calculează şi numerele:

$$x_{i1} = \lambda_i - \sum_{k=2}^{m} x_{ik} \ (i = 1,2,...,\mu). \tag{18}$$

Aceste numere se adaugă matricilor reduse şi astfel obţinem matricile complete de tipul (12).

Programele de calculator GG3-NUMAR şi GG3-LISTA au fost scrise în C şi în Mathcad.

5 Programul de calculator GG4

Programul de calculator GG4-NUMAR realizează calculul numărului $H^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$.

Numărul $H^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$ reprezintă, după cum se ştie, numărul grupărilor elementare generalizate şi al distribuirilor corespunzătoare a obiectelor în căsuţe, în formulări pe care nu le mai detaliem aici.

Se procedează ca la programul GG1-NUMAR, dar se impun în plus şi condiţiile $x_{ij} \leq 1$ pentru toate numerele din matricea completă. Aceasta va fi o matrice booleană (conţine numai numerele 0 şi 1).

Pentru programul GG4-LISTA se procedează ca la programul GG1-LISTA dar se impun în plus şi condiţiile $x_{ij} \leq 1$ pentru toate numerele din matricea completă.

Programele de calculator GG4-NUMAR şi GG4-LISTA au fost scrise în C şi în Mathcad, ca şi celelalte programe anterioare.

6 Programul de calculator EDL

Programul de calculator EDL-NUMAR realizează calculul numărului soluţiilor ecuaţiei diofantice liniare cu coeficienţi naturali şi cu limitări superioare ale necunoscutelor ecuaţiei.

Considerăm ecuaţia:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k \tag{19}$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$0 \le x_i \le l_i,\ i = 1,2,...,m. \tag{20}$$

Programul EDL-NUMAR generează m-uple de tipul $(x_1, x_2, ..., x_m)$ şi le înlocuieşte în ecuaţia (1), numârandu-le pe cele catre verifică ecuaţia.

Problema se reduce la determinarea m-uplelor în care variabilele x_i iau valori naturale cuprinse între 0 şi o valoare maximă iar combinaţia lor liniară cu coeficienţii ecuaţiei este egală cu k.

Putem scrie:

$$0 \le x_i \le \min\left(\left[\frac{k - \sum_{j=1}^{i-1} a_j x_j}{a_j}\right], l_j\right), \text{ pentru indicii i=2,3,...,m şi:} \tag{21}$$

$$0 \le x_1 \le \min\left(\left[\frac{k}{a_1}\right], l_1\right), \text{ pentru indicele 1.} \tag{22}$$

Programul de calculator EDL generază sistematic toate m-uplele în care variabilele x_i verifică relaţiile (21) şi (22). Fiecare dintre cele m variabile ia valori între 0 şi valoarea maximă respectivă şi anume x_m variază cel mai rapid iar x_1 cel mai lent (se parcurg în sens invers variabilele m-uplului).

Numărul m-uplelor cu condiţiile arătate mai sus coincide cu numărul soluţiilor ecuaţiei diofantice liniare.

Varianta de program EDL-LISTA realizează în plus şi obţinerea listei soluţiilor ecuaţiei diofantice liniare.

Programele de calculator EDL-NUMAR şi EDL-LISTA au fost scrise în C şi în Mathcad, ca şi celelalte programe anterioare.

Au fost de asemenea realizate variantele de programe EDL-NUMAR-LIM.INF. şi EDL-LISTA-LIM.INF. pentru ecuaţia diofantică liniară:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k \tag{23}$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$b_i \le x_i \le l_i,\ i = 1,2,...,m. \tag{24}$$

Şi în cazul programelor de calculator EDL-NUMAR şi EDL-NUMAR-LIM.INF. pentru determinarea numărului soluţiilor unei ecuaţii diofantice liniare, putem afirma că acestea sunt net superioare, din punct de vedere al timpului de calcul, oricăror metode de calcul "manual". În ce priveşte obţinerea listei soluţiilor unei ecuaţii diofantice liniare, putem afirma chiar mai mult, în sensul că obţinerea "manuală" a unei astfel de liste se poate face numai în cazul când ea conţine numai un număr mic de poziţii (de ordinul unităţilor). Pentru o listă cu un număr de poziţii de ordinul zecilor, sau eventual mai mare, singura soluţie rezonabilă este utilizarea programelor de calculator EDL-LISTA şi EDL-LISTA-LIM.INF.

În încheierea acestor consideraţii, adresăm din nou invitaţia cititorului de a scrie, ca un exerciţiu de programare, programele de calculator descrise mai sus. Rulând aceste programe, se pot verifica diversele aplicaţii numerice care se găsesc în acest volum. Utilizarea programelor de calculator prezentate mai sus (GG1, GG2, GG3, GG4, EDL) este un exemplu de îmbinare între matematică (combinatorică), informatică (soft) şi tehnica electronică de calcul (hard). De altfel, după cum se ştie, calculatorul electronic se utilizează deja de câteva decenii în matematica aplicată, dar şi în cea teoretică (a se vedea de exemplu problema celor patru culori, rezolvată cu ajutorul calculatorului electronic de către Appel şi Haken, în 1976).

Bibliografie

[1] V.M.Popa, *Contribuţii la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicaţii*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj-Napoca, 1999

[2] V.M.Popa, *Metode pentru calculul numărului grupărilor generalizate în cazul standard*, Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

[3] V.M.Popa, *Analiza asistată de calculator a receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate*, Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

[4] Knuth, D. E., *Tratat de programarea calculatoarelor - Algoritmi fundamentali*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974

[5] O.Pătrăşcoiu, G.Marian, N.Mitroi, *Elemente de grafuri şi combinatorică.Metode, algoritmi şi programe,* Editura All, Bucureşti, 1994

[6] Cornelia Ivaşc, Mona Prună, Bazele informaticii (Grafuri şi Elemente de Combinatorică), Editura Petrion, Bucureşti, 1995

[7] Rodica Cherciu ş.a., *Informatică, probleme propuse şi rezolvate*, Editura Niculescu, Bucureşti, 2002

Universitatea „Lucian Blaga" Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth"
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

PROBLEME

Problemele 1-10

Să se calculeze numărul aranjamentelor generalizate următoare.

1. $A^{3}_{6(3,2,1)}$
2. $A^{3}_{7(3,3,1)}$
3. $A^{4}_{8(3,2,2,1)}$
4. $A^{4}_{9(4,2,2,1)}$
5. $A^{5}_{10(3,3,2,1,1)}$
6. $A^{5}_{11(3,3,2,2,1)}$
7. $A^{6}_{12(4,3,2,2,1)}$
8. $A^{6}_{13(4,3,3,2,1)}$
9. $A^{7}_{14(4,4,3,2,1)}$
10. $A^{7}_{15(5,4,3,2,1)}$

Problemele 11-12

Să se obţină lista aranjamentelor generalizate următoare.

11. $A^{3}_{6(3,2,1)}$
12. $A^{3}_{7(3,3,1)}$

Problemele 13-14

Să se obţină lista distribuirilor obiectelor în căsuţe, corespunzătoare aranjamentelor generalizate următoare.

13. $A^{3}_{6(3,2,1)}$
14. $A^{3}_{7(3,3,1)}$

Problemele 15-24

Să se calculeze numărul combinărilor generalizate următoare.

15. $C^{3}_{6(3,2,1)}$
16. $C^{3}_{7(3,3,1)}$
17. $C^{4}_{8(3,2,2,1)}$
18. $C^{4}_{9(4,2,2,1)}$
19. $C^{5}_{10(3,3,2,1,1)}$
20. $C^{5}_{11(3,3,2,2,1)}$
21. $C^{6}_{12(4,3,2,2,1)}$
22. $C^{6}_{13(4,3,3,2,1)}$
23. $C^{7}_{14(4,4,3,2,1)}$
24. $C^{7}_{15(5,4,3,2,1)}$

Problemele 25-26
Să se obţină lista combinărilor generalizate următoare.
25. $C^3_{6(3,2,1)}$
26. $C^3_{7(3,3,1)}$

Problemele 27-28
Să se obţină lista distribuirilor obiectelor în căsuţe, corespunzătoare combinărilor generalizate următoare.
27. $C^3_{6(3,2,1)}$
28. $C^3_{7(3,3,1)}$

Problema 29
Fie X şi Y două mulţimi finite cu k, respectiv m elemente, $k \geq m$. Dacă $f_{k,m}$ desemnează numărul funcţiilor de la X la Y iar $s_{k,i}$ desemnează numărul aplicaţiilor surjective de la X la o submulţime cu i elemente a lui Y, să se stabilească egalitatea:
$f_{k,m} = \sum_{i=1}^{m} C_m^i s_{k,i}$.

Problema 30
Să se arate că numărul bijecţiilor între două mulţimi multiple de tipul $n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$ şi $n(1,1,...,1)$ este dat de următoarea formulă:
$B_{n(1,1,...,1)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_n^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$.

Problema 31
Să se arate că numărul injecţiilor între două mulţimi multiple de tipul $k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$ şi $n(1,1,...,1)$, cu $k \leq n$, este dat de următoarea formulă:
$I_{n(1,1,...,1)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_n^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$.

Problema 32
Să se arate că numărul surjecţiilor între două mulţimi multiple de tipul $k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$ şi $n(1,1,...,1)$, cu $k \geq n$, este dat de următoarea formulă:
$S_{n(1,1,...,1)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = \overline{g}_n^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$.

Problema 33
Să se arate că numărul funcţiilor între două mulţimi multiple de tipul $k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$ şi $n(1,1,...,1)$ este dat de următoarea formulă:
$F_{n(1,1,...,1)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = g_n^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$.

Problemele 34-37
Să se calculeze numărul bijecţiilor între mulţimile multiple indicate în simbolul respectiv.
34. $B_{6(2,2,1,1)}^{6(2,2,1,1)}$

35. $B_{8(3,2,2,1)}^{8(4,2,1,1)}$
36. $B_{6(1,1,1,1,1,1)}^{6(2,2,1,1)}$
37. $B_{8(1,1,1,1,1,1,1,1)}^{8(4,2,1,1)}$

Problemele 38-41
Să se calculeze numărul injecţiilor între mulţimile multiple indicate în simbolul respectiv.
38. $I_{6(2,2,1,1)}^{5(2,2,1)}$
39. $I_{8(3,2,2,1)}^{7(4,2,1)}$
40. $I_{6(1,1,1,1,1,1)}^{4(2,1,1)}$
41. $I_{8(1,1,1,1,1,1,1,1)}^{4(2,1,1)}$

Problemele 42-45
Să se calculeze numărul surjecţiilor între mulţimile multiple indicate în simbolul respectiv.
42. $S_{4(2,1,1)}^{5(2,1,1,1)}$
43. $S_{4(2,1,1)}^{5(1,1,1,1,1)}$
44. $S_{4(1,1,1,1)}^{5(2,1,1,1)}$
45. $S_{4(1,1,1,1)}^{6(2,2,1,1)}$

Problemele 46-49
Să se calculeze numărul funcţiilor între mulţimile multiple indicate în simbolul respectiv.
46. $F_{4(2,1,1)}^{5(2,1,1,1)}$
47. $F_{4(2,1,1)}^{5(1,1,1,1,1)}$
48. $F_{4(1,1,1,1)}^{5(2,1,1,1)}$
49. $F_{6(1,1,1,1,1,1)}^{5(2,2,1)}$

Problemele 50-51
Să se calculeze numărul mulţimilor parţial multiple şi parţial ordonate indicate în continuare.
50. Mulţimi parţial multiple de tipul 6(3,2,1) şi parţial ordonate de tipul 6(2,2,2).
51. Mulţimi parţial multiple de tipul 7(3,3,1) şi parţial ordonate de tipul 7(3,2,2).

Problemele 52-53
Să se obţină lista mulţimilor parţial multiple şi parţial ordonate indicate în continuare.
52. Mulţimi parţial multiple de tipul 6(3,2,1) şi parţial ordonate de tipul 6(2,2,2).
53. Mulţimi parţial multiple de tipul 7(3,3,1) şi parţial ordonate de tipul 7(3,2,2).

Problemele 54-63
Să se calculeze numărul următoarelor grupări generalizate (cazul standard, k=n).
54. $G_{6(3,2,1)}^{6(2,2,2)}$
55. $G_{7(3,3,1)}^{7(3,2,2)}$

56. $G_{8(3,2,2,1)}^{8(3,2,2,1)}$

57. $G_{9(4,2,2,1)}^{9(3,2,2,1,1)}$

58. $G_{10(3,3,2,1,1)}^{10(3,3,2,2)}$

59. $G_{11(3,3,2,2,1)}^{11(4,3,2,1,1)}$

60. $G_{12(4,3,2,2,1)}^{12(3,3,3,2,1)}$

61. $G_{13(4,3,3,2,1)}^{13(3,3,3,3,1)}$

62. $G_{14(4,4,3,2,1)}^{14(3,3,3,3,2)}$

63. $G_{15(5,4,3,2,1)}^{15(3,3,3,3,2,1)}$

Problemele 64-65

Să se obţină lista următoarelor grupări generalizate (cazul standard, k=n).

64. $G_{6(3,2,1)}^{6(2,2,2)}$

65. $G_{7(3,3,1)}^{7(3,2,2)}$

Problemele 66-67

Să se obţină lista distribuirilor obiectelor în căsuţe, corespunzătoare grupărilor generalizate următoare (cazul standard, k=n).

66. $G_{6(3,2,1)}^{6(2,2,2)}$

67. $G_{7(3,3,1)}^{7(3,2,2)}$

Problema 68

Să se calculeze numărul submulţimilor parţial ordonate de tipul 4(2,2) ale mulţimii parţial multiple de tipul 6(3,2,1).

Problema 69

Să se calculeze numărul submulţimilor parţial ordonate de tipul 5(3,2) ale mulţimii parţial multiple de tipul 7(3,3,1).

Problema 70

Să se obţină lista submulţimilor parţial ordonate de tipul 4(2,2) ale mulţimii parţial multiple de tipul 6(3,2,1).

Problema 71

Să se obţină lista submulţimilor parţial ordonate de tipul 5(3,2) ale mulţimii parţial multiple de tipul 7(3,3,1).

Problemele 72-81

Să se calculeze numărul grupărilor generalizate următoare.

72. $G_{6(3,2,1)}^{4(2,2)}$

73. $G_{7(3,3,1)}^{5(3,2)}$

74. $G_{8(3,2,2,1)}^{6(3,2,1)}$

75. $G_{9(4,2,2,1)}^{7(3,2,1,1)}$

76. $G_{10(3,3,2,1,1)}^{8(3,3,2)}$

77. $G_{11(3,3,2,2,1)}^{9(4,3,1,1)}$

78. $G_{12(4,3,2,2,1)}^{9(3,3,2,1)}$

79. $G_{13(4,3,3,2,1)}^{10(3,3,3,1)}$

80. $G_{14(4,4,3,2,1)}^{11(3,3,3,2)}$

81. $G_{15(5,4,3,2,1)}^{12(3,3,3,2,1)}$

Problemele 82-83

Să se obţină lista grupărilor generalizate următoare.

82. $G_{6(3,2,1)}^{4(2,2)}$

83. $G_{7(3,3,1)}^{5(3,2)}$

Problemele 84-85

Să se obţină lista distribuirilor obiectelor în căsuţe, corespunzătoare grupărilor generalizate următoare.

84. $G_{6(3,2,1)}^{4(2,2)}$

85. $G_{7(3,3,1)}^{5(3,2)}$

Problema 86

Să se demonstreze relaţia:

$$G_{3r(r,r,r)}^{3r(r,r,r)} = \frac{(r+1)(r+2)(r^2+3r+4)}{8},$$

unde r este un număr natural mai mare sau egal ca unu.

Problema 87

Să se demonstreze relaţia:

$$G_{6r(3r,3r)}^{6r(2r,2r,2r)} = 3r^2+3r+1,$$

unde r este un număr natural mai mare sau egal ca unu.

Problema 88

Să se demonstreze relaţia:

$$G_{8r(4r,4r)}^{8r(2r,2r,2r,2r)} = \frac{1}{3}(2r+1)(8r^2+8r+3),$$

unde r este un număr natural mai mare sau egal ca unu.

Problema 89

Să se demonstreze relaţia:

$$G_{24r+8(6r+2,6r+2,6r+2,6r+2)}^{24r+8(12r+5,12r+3)} = 8(2r+1)(3r+1)(3r+2),$$

unde r este un număr natural.

Problema 90

Să se demonstreze proprietatea de dualitate (de simetrie) pentru simbolul general standard al grupărilor generalizate:

$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = G_{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}^{n(l_1,l_2,...,l_m)}$.

Problema 91

Se dau n obiecte distincte.

a) În câte feluri se pot împărţi aceste obiecte în trei categorii A_1, A_2, A_3 astfel încât în fiecare categorie să intre un număr anumit l_i de obiecte (i=1,2,3; $l_1 + l_2 + l_3 = n$)?
b) Aceeaşi întrebare pentru numărul de categorii egal cu m.
c) Dovediţi identitatea:

$$\frac{n!}{l_1!l_2!...l_m!} = \frac{(n-1)!}{(l_1-1)!l_2!...l_m!} + \frac{(n-1)!}{l_1!(l_2-1)!...l_m!} + ... + \frac{(n-1)!}{l_1!l_2!...(l_m-1)!}$$

cu $l_1 + l_2 + ... + l_m = n$.

Problema 92

Să se demonstreze egalitatea:

$$\sum_{\substack{x_1+x_2+...x_m=k \\ x_1\geq 0,...,x_n\geq 0}} \frac{1}{x_1!x_2!...x_m!} = \frac{m^k}{k!}$$

unde $x_1, x_2, ..., x_m, k$ sunt numere naturale iar m este număr natural strict pozitiv; însumarea se face pentru toate soluţiile $(x_1, x_2, ..., x_m)$ ale ecuaţiei diofantice liniare scrise sub semnul sigma.

Problemele 93-102

Să se calculeze numărul grupărilor barate generalizate următoare.

93. $\overline{G}_{6(3,2,1)}^{4(2,2)}$
94. $\overline{G}_{7(3,3,1)}^{5(3,2)}$
95. $\overline{G}_{8(3,2,2,1)}^{6(3,2,1)}$
96. $\overline{G}_{9(4,2,2,1)}^{7(3,2,1,1)}$
97. $\overline{G}_{10(3,3,2,1,1)}^{8(3,3,2)}$
98. $\overline{G}_{11(3,3,2,2,1)}^{8(4,3,1,1)}$
99. $\overline{G}_{12(4,3,2,2,1)}^{9(3,3,2,1)}$
100. $\overline{G}_{13(4,3,3,2,1)}^{10(3,3,3,1)}$
101. $\overline{G}_{14(4,4,3,2,1)}^{11(3,3,3,2)}$
102. $\overline{G}_{15(5,4,3,2,1)}^{12(3,3,3,2,1)}$

Să se verifice pentru valorile calculate mai sus, următoarea inegalitate:

$\overline{G}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} < G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$

care rezultă imediat din definiţia simbolurilor implicate în această relaţie.

Problemele 103-104
Să se obţină lista grupărilor barate generalizate următoare.
103. $\overline{G}_{6(3,2,1)}^{4(2,2)}$
104. $\overline{G}_{7(3,3,1)}^{5(3,2)}$

Problemele 105-106
Să se obţină lista distribuirilor obiectelor în căsuţe, corespunzătoare grupărilor barate generalizate următoare.
105. $\overline{G}_{6(3,2,1)}^{4(2,2)}$
106. $\overline{G}_{7(3,3,1)}^{5(3,2)}$

Problema 107
În câte moduri se pot distribui k obiecte diferite în m=p+q căsuţe distincte şi neordonate, astfel încât p căsuţe să primească cel puţin câte un obiect?
Cazuri particulare: a) p=0; b) p=m.

Problema 108
În câte moduri se pot distribui k obiecte identice în m=p+q căsuţe distincte şi neordonate, astfel încât p căsuţe să primească cel puţin câte un obiect?
Cazuri particulare: a) p=0; b) p=m.

Problema 109
Să se demonstreze formula:
$\overline{a}_m^k = m!S(k,m)$,
unde S(k,m) sunt numerele lui Stirling de speţa a II-a.

Problema 110
Să se demonstreze formula aranjamentelor barate cu repetiţie:
$\overline{a}_m^k = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}C_m^i a_i^k$,
unde $k \geq m$, folosind formula grupărilor barate cu repetiţie generalizate.

Problema 111
Să se demonstreze egalitatea:
$\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}C_m^i i^m = m!$

Problema 112
Să se demonstreze relaţia:
$$\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}C_m^i c_i^{\lambda_1}c_i^{\lambda_2}...c_i^{\lambda_\mu} = \frac{m!}{\lambda_1!\lambda_2!...\lambda_\mu!}$$
unde $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_\mu = m$.

Problema 113
Să se demonstreze formula combinărilor barate cu repetiţie:

$\overline{c}_m^k = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i c_i^k$,

unde $k \geq m$, folosind formula grupărilor barate cu repetiţie generalizate.

Problema 114

Să se demonstreze egalitatea:

$\sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i C_{i+k-1}^{i-1} = C_{k-1}^{m-1}$.

Problema 115

Să se demonstreze egalitatea:

$\sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i C_{i+m-1}^{i-1} = 1$.

Problema 116

Să se arate că numărul de scrieri ale întregului k sub forma:

$k = x_1 + x_2 + ... + x_m$

unde x_1, x_2, …, x_m sunt numere întregi mai mari sau egale cu 2, două scrieri deosebindu-se şi prin ordinea termenilor, este egal cu:

$C_{k-1}^{m-1} - C_m^1 C_{k-2}^{m-2} + C_m^2 C_{k-3}^{m-3} - ... + (-1)^{m-1} m$.

Ce devine această expresie pentru k=2m?

Problemele 117-126

Să se calculeze numărul aranjamentelor barate generalizate următoare.

117. $\overline{A}_{6(3,2,1)}^5$

118. $\overline{A}_{7(3,3,1)}^5$

119. $\overline{A}_{8(3,2,2,1)}^6$

120. $\overline{A}_{9(4,2,2,1)}^7$

121. $\overline{A}_{10(3,3,2,1,1)}^7$

122. $\overline{A}_{11(3,3,2,2,1)}^7$

123. $\overline{A}_{12(4,3,2,2,1)}^8$

124. $\overline{A}_{13(4,3,3,2,1)}^8$

125. $\overline{A}_{14(4,4,3,2,1)}^8$

126. $\overline{A}_{15(5,4,3,2,1)}^9$

Să se verifice pentru valorile calculate mai sus, următoarea inegalitate:

$\overline{A}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^k < A_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^k$

care rezultă imediat din definiţia simbolurilor implicate în această relaţie.

Problemele 127-128

Să se obţină lista aranjamentelor barate generalizate următoare.

127. $\overline{A}_{5(3,2)}^4$

128. $\overline{A}^{5}_{6(3,2,1)}$

Problemele 129-130
Să se obţină lista distribuirilor obiectelor în căsuţe, corespunzătoare aranjamentelor generalizate următoare.
129. $\overline{A}^{4}_{5(3,2)}$
130. $\overline{A}^{5}_{6(3,2,1)}$

Problemele 131-140
Să se calculeze numărul combinărilor barate generalizate următoare.
131. $\overline{C}^{5}_{6(3,2,1)}$
132. $\overline{C}^{5}_{7(3,3,1)}$
133. $\overline{C}^{6}_{8(3,2,2,1)}$
134. $\overline{C}^{7}_{9(4,2,2,1)}$
135. $\overline{C}^{7}_{10(3,3,2,1,1)}$
136. $\overline{C}^{7}_{11(3,3,2,2,1)}$
137. $\overline{C}^{8}_{12(4,3,2,2,1)}$
138. $\overline{C}^{8}_{13(4,3,3,2,1)}$
139. $\overline{C}^{8}_{14(4,4,3,2,1)}$
140. $\overline{C}^{9}_{15(5,4,3,2,1)}$
Să se verifice pentru valorile calculate mai sus, următoarea inegalitate:
$\overline{C}^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} < C^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$
care rezultă imediat din definiţia simbolurilor implicate în această relaţie.

Problemele 141-142
Să se obţină lista combinărilor barate generalizate următoare.
141. $\overline{C}^{8}_{12(4,3,2,2,1)}$
142. $\overline{C}^{8}_{13(4,3,3,2,1)}$

Problemele 143-144
Să se obţină lista distribuirilor obiectelor în căsuţe, corespunzătoare combinărilor generalizate următoare.
143. $\overline{C}^{8}_{12(4,3,2,2,1)}$
144. $\overline{C}^{8}_{13(4,3,3,2,1)}$

Problemele 145-154
Să se calculeze numărul grupărilor elementare generalizate următoare.
145. $H^{6(2,2,2)}_{6(3,2,1)}$

146. $H_{7(3,3,1)}^{7(3,2,2)}$

147. $H_{8(3,2,2,1)}^{8(3,2,2,1)}$

148. $H_{9(4,2,2,1)}^{9(3,2,2,1,1)}$

149. $H_{10(3,3,2,1,1)}^{10(3,3,2,2)}$

150. $H_{11(3,3,2,2,1)}^{11(4,3,2,1,1)}$

151. $H_{12(4,3,2,2,1)}^{12(3,3,3,2,1)}$

152. $H_{13(4,3,3,2,1)}^{13(3,3,3,3,1)}$

153. $H_{14(4,4,3,2,1)}^{14(3,3,3,3,2)}$

154. $H_{15(5,4,3,2,1)}^{15(3,3,3,3,2,1)}$

Să se verifice pentru valorile calculate mai sus, următoarea inegalitate:

$$H_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} < G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$$

care rezultă imediat din definiţia simbolurilor implicate în această relaţie.

Problemele 155-156

Să se obţină lista grupărilor elementare generalizate următoare.

155. $H_{6(3,2,1)}^{6(2,2,2)}$

156. $H_{8(3,2,2,1)}^{8(4,2,1,1)}$

Problemele 157-158

Să se obţină lista distribuirilor obiectelor în căsuţe, corespunzătoare grupărilor elementare generalizate următoare.

157. $H_{6(3,2,1)}^{6(2,2,2)}$

158. $H_{8(3,2,2,1)}^{8(4,2,1,1)}$

Problema 159

Să se arate că polinoamele lui Newton se pot exprima cu ajutorul unui determinant, prin formula următoare:

$$Q_k = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & x_1 & 2 & \dots & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \\ x_k & x_{k-1} & x_{k-2} & \dots & x_1 \end{vmatrix}$$

unde k=1,2,…

Problema 160

În câte feluri se pot împărţi k mere unei clase de m elevi în aşa fel ca fiecare elev să primească cel puţin b mere? Evident, avem $k \geq mb$.

Problema 161
Să se demonstreze că un polinom omogen cu m nedeterminate şi gradul n are în scrierea canonică cel mult c_m^n termeni.

Problema 162
Să se demonstreze că un polinom neomogen cu m nedeterminate şi gradul n are în scrierea canonică cel mult c_{m+1}^n termeni.

Problema 163
Să se demonstreze că un polinom omogen elementar cu m nedeterminate şi gradul n are în scrierea canonică cel mult C_m^n termeni, $n \le m$.

Problema 164
Să se demonstreze că un polinom neomogen elementar cu m nedeterminate şi gradul n are în scrierea canonică cel mult $C_m^0 + C_m^1 + ... + C_m^n$ termeni, $n \le m$.

Problema 165
Să se demonstreze formula:
$C_{n(k,k,...,k,p)}^k = c_{m-1}^k + c_{m-1}^{k-1} + c_{m-1}^{k-2} + ... + c_{m-1}^{k-p}$,
cu $1 \le p \le k$, folosind consideraţii legate de ecuaţia diofantică liniară ataşată membrului stâng al egalităţii.

Problema 166
Să se demonstreze formula:
$C_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^k = (l_2+1)(l_3+1)...(l_m+1)$
pentru cazul particular când n este număr par, $k = \frac{n}{2}, l_1 = \frac{n}{2}, l_2 + l_3 + ... + l_m = \frac{n}{2}$.

Problemele 167-170
Să se calculeze numărul combinărilor generalizate următoare, observând cazul special al partiţiei indicelui inferior.
167. $C_{14(7,2,2,2,1)}^7$
168. $C_{16(8,3,2,2,1)}^8$
169. $C_{18(9,4,2,2,1)}^9$
170. $C_{20(10,5,2,2,1)}^{10}$

Problemele 171-176
Să se determine numărul soluţiilor următoarelor ecuaţii diofantice cu coeficienţi unitari, cu condiţiile indicate.
171. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$, unde :
$0 \le x_1 \le 3, 0 \le x_2 \le 2, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 1$
172. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$, unde :
$0 \le x_1 \le 4, 0 \le x_2 \le 3, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 1$

173. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$, unde :
$0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1, 0 \le x_5 \le 1, 0 \le x_6 \le 1$

174. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3$, unde :
$0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1, 0 \le x_5 \le 1, 0 \le x_6 \le 1$

175. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$, unde :
$0 \le x_1 \le 3, 0 \le x_2 \le 3, 0 \le x_3 \le 3, 0 \le x_4 \le 3$

176. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$, unde :
$0 \le x_1 \le 4, 0 \le x_2 \le 4, 0 \le x_3 \le 4, 0 \le x_4 \le 4$

Problemele 177-184

Să se determine numărul soluţiilor următoarelor ecuaţii diofantice cu coeficienţi unitari, cu condiţiile indicate.

177. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, unde :
$2 \le x_1 \le 5, 2 \le x_2 \le 4, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 2$

178. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, unde :
$2 \le x_1 \le 6, 2 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 4, 1 \le x_4 \le 3$

179. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, unde :
$1 \le x_1 \le 5, 1 \le x_2 \le 4, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 2$

180. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, unde :
$1 \le x_1 \le 6, 1 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 4, 1 \le x_4 \le 3$

181. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, unde :
$2 \le x_1 \le 5, 2 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 4, 1 \le x_4 \le 4$

182. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, unde :
$2 \le x_1 \le 6, 2 \le x_2 \le 6, 1 \le x_3 \le 5, 1 \le x_4 \le 5$

183. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, unde :
$1 \le x_1 \le 6, 1 \le x_2 \le 6, 1 \le x_3 \le 6, 1 \le x_4 \le 6$

184. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, unde :
$1 \le x_1 \le 7, 1 \le x_2 \le 7, 1 \le x_3 \le 7, 1 \le x_4 \le 7$

Problemele 185-190

Să se determine numărul soluţiilor următoarelor ecuaţii diofantice cu coeficienţi naturali, cu condiţiile indicate.

185. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 8$, unde :
$0 \le x_1 \le 5, 0 \le x_2 \le 3, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 2$

186. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$, unde :
$0 \le x_1 \le 6, 0 \le x_2 \le 5, 0 \le x_3 \le 4, 0 \le x_4 \le 3$

187. $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 4$, unde :
$0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1, 0 \le x_5 \le 1, 0 \le x_6 \le 1$

188. $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 5$, unde :
$0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1, 0 \le x_5 \le 1, 0 \le x_6 \le 1$

189. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 8$, unde :
$0 \le x_1 \le 8, 0 \le x_2 \le 4, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 2$

190. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$, unde :
$0 \le x_1 \le 9, 0 \le x_2 \le 4, 0 \le x_3 \le 3, 0 \le x_4 \le 3$

Problemele 191-198

Să se determine numărul soluţiilor următoarelor ecuaţii diofantice cu coeficienţi naturali, cu condiţiile indicate.

191. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20$, unde :
$2 \le x_1 \le 7, 2 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 3$

192. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 24$, unde :
$2 \le x_1 \le 7, 2 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 4, 1 \le x_4 \le 3$

193. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20$, unde :
$1 \le x_1 \le 7, 1 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 3$

194. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 24$, unde :
$1 \le x_1 \le 7, 1 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 4, 1 \le x_4 \le 3$

195. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20$, unde :
$2 \le x_1 \le 10, 2 \le x_2 \le 6, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 3$

196. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 24$, unde :
$2 \le x_1 \le 14, 2 \le x_2 \le 8, 1 \le x_3 \le 5, 1 \le x_4 \le 5$

197. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20$, unde :
$1 \le x_1 \le 10, 1 \le x_2 \le 6, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 3$

198. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 24$, unde :
$1 \le x_1 \le 14, 1 \le x_2 \le 8, 1 \le x_3 \le 5, 1 \le x_4 \le 5$

Problemele 199-201

Să se obţină lista soluţiilor următoarelor ecuaţii diofantice cu coeficienţi unitari, cu condiţiile indicate.

199. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$, unde :
$0 \le x_1 \le 3, 0 \le x_2 \le 2, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 1$

200. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$, unde :
$0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1, 0 \le x_5 \le 1, 0 \le x_6 \le 1$

201. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$, unde :
$0 \le x_1 \le 3, 0 \le x_2 \le 3, 0 \le x_3 \le 3, 0 \le x_4 \le 3$

Problemele 202-205

Să se obţină lista soluţiilor următoarelor ecuaţii diofantice cu coeficienţi unitari, cu condiţiile indicate.

202. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, unde :
$2 \le x_1 \le 5, 2 \le x_2 \le 4, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 2$

203. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, unde :
$1 \le x_1 \le 5, 1 \le x_2 \le 4, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 2$

204. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, unde :
$2 \le x_1 \le 5, 2 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 4, 1 \le x_4 \le 4$

205. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, unde :
$1 \le x_1 \le 6, 1 \le x_2 \le 6, 1 \le x_3 \le 6, 1 \le x_4 \le 6$

Problemele 206-208

Să se obţină lista soluţiilor următoarelor ecuaţii diofantice cu coeficienţi naturali, cu condiţiile indicate.

206. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 8$, unde :
$0 \le x_1 \le 5, 0 \le x_2 \le 3, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 2$

207. $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 4$, unde :
$0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1, 0 \le x_5 \le 1, 0 \le x_6 \le 1$

208. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 8$, unde :
$0 \le x_1 \le 8, 0 \le x_2 \le 4, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 2$

Problemele 209-212

Să se obţină lista soluţiilor următoarelor ecuaţii diofantice cu coeficienţi naturali, cu condiţiile indicate.

209. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20$, unde :
$2 \le x_1 \le 7, 2 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 3$

210. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20$, unde :
$1 \le x_1 \le 7, 1 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 3$

211. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20$, unde :
$2 \le x_1 \le 10, 2 \le x_2 \le 6, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 3$

212. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20$, unde :
$1 \le x_1 \le 10, 1 \le x_2 \le 6, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 3$

Problemele 213-216

Să se calculeze numărul soluţiilor cu numere naturale ale ecuaţiei diofantice liniare următoare, folosind metoda funcţiei generatoare.

213. $x_1 + x_2 + 3x_3 = 10$

214. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20$

215. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 20$

216. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20$

Problema 217

Să se demonstreze relaţia:

$$G^{k+2(2,1,1,\ldots,1)}_{k+2(2,1,1,\ldots,1)} = \frac{1}{4}(k^2 + 3k + 4)k!$$

unde numărul indicilor unitari inferiori cât şi superiori este egal cu k.

Problema 218
La un concurs de matematică se acordă n premii la n elevi, fiecare premiu constând din câte o carte. În câte moduri se poate face atribuirea premiilor, ştiind că organizatorii au la dispoziţie o carte în n exemplare şi alte 2n+1 cărţi în câte un singur exemplar?

Problemele 219-222
Să se calculeze numărul aranjamentelor generalizate următoare, observând cazul special al partiţiei indicelui inferior.

219. $A^{6}_{10(5,1,1,1,1,1)}$

220. $A^{6}_{11(6,1,1,1,1,1)}$

221. $A^{3}_{13(3,3,3,3,1)}$

222. $A^{3}_{14(3,3,3,3,2)}$

Problemele 223-226
Să se calculeze numărul combinărilor generalizate următoare, observând cazul special al partiţiei indicelui inferior.

223. $C^{3}_{7(3,1,1,1,1)}$

224. $C^{4}_{8(4,1,1,1,1)}$

225. $C^{2}_{9(2,2,2,2,1)}$

226. $C^{3}_{13(3,3,3,3,1)}$

Problemele 227-230
Să se calculeze numărul combinărilor generalizate următoare, folosind principiul includerii şi al excluderii.

227. $C^{3}_{7(3,3,1)}$

228. $C^{3}_{8(3,3,2)}$

229. $C^{4}_{9(4,2,2,1)}$

230. $C^{5}_{10(3,3,2,1,1)}$

Problemele 231-234
Să se calculeze numărul combinărilor generalizate următoare, folosind formula specifică cazului particular în care partiţia lui n este în părţi egale.

231. $C^{4}_{10(2,2,2,2,2)}$

232. $C^{5}_{12(3,3,3,3)}$

233. $C^{6}_{15(3,3,3,3,3)}$

234. $C^{7}_{20(4,4,4,4,4)}$

Problemele 235-240
Să se calculeze numărul soluţiilor cu numere naturale ale ecuaţiilor diofantice liniare următoare, folosind formule analitice specifice cazului particular respectiv.

235. $x + 2y + 3z = 20$
236. $x + 2y + 3z + 5t = 20$
237. $x + 2y + 3z + 4t = 24$
238. $x + 2y + 3z + 7t = 28$
239. $x + 3y + 5z + 7t = 40$
240. $x + 2y + 3z + 4t + 5u = 20$

Problemele 241-243
Să se determine prin metoda grafică numărul următoarelor combinări generalizate.
241. $C^{13}_{27(11,9,7)}$
242. $C^{14}_{28(12,9,7)}$
243. $C^{15}_{30(12,10,8)}$

Problemele 244-246
Să se determine prin metoda grafică numărul soluţiilor următoarelor ecuaţii diofantice cu coeficienţi unitari, cu condiţiile indicate.
244. $x_1 + x_2 + x_3 = 13$, cu condiţiile: $2 \le x_1 \le 11, 1 \le x_2 \le 9, 1 \le x_3 \le 7$
245. $x_1 + x_2 + x_3 = 14$, cu condiţiile: $2 \le x_1 \le 12, 2 \le x_2 \le 9, 1 \le x_3 \le 7$
246. $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, cu condiţiile: $3 \le x_1 \le 12, 2 \le x_2 \le 10, 1 \le x_3 \le 8$

Problemele 247-249
Să se determine prin metoda grafică numărul soluţiilor următoarelor ecuaţii diofantice cu coeficienţi naturali, cu condiţiile indicate.
247. $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 26$, cu condiţiile: $0 \le x_1 \le 20, 0 \le x_2 \le 11, 0 \le x_3 \le 6$
248. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24$, cu condiţiile: $0 \le x_1 \le 18, 0 \le x_2 \le 11, 0 \le x_3 \le 6$
249. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30$, cu condiţiile: $0 \le x_1 \le 24, 0 \le x_2 \le 10, 0 \le x_3 \le 5$

Problemele 250-252
Să se determine prin metoda grafică numărul soluţiilor următoarelor ecuaţii diofantice cu coeficienţi naturali, cu condiţiile indicate.
250. $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 26$, cu condiţiile: $4 \le x_1 \le 20, 2 \le x_2 \le 11, 1 \le x_3 \le 6$
251. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24$, cu condiţiile: $6 \le x_1 \le 18, 2 \le x_2 \le 11, 1 \le x_3 \le 6$
252. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30$, cu condiţiile: $6 \le x_1 \le 24, 2 \le x_2 \le 10, 2 \le x_3 \le 5$

Problema 253
Considerăm ecuaţia diofantică liniară:
$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k$
unde coeficienţii $a_1, a_2, ..., a_m$ sunt numere naturale strict pozitive iar k este număr natural.
Să se arate că numărul soluţiilor cu numere naturale ale acestei ecuaţii este finit.

Problema 254
Fie X şi Y două mulţimi finite cu k, respectiv m elemente, $k \ge m$. Dacă $c_{k,m}$ desemnează numărul funcţiilor crescătoare de la X la Y iar $\bar{c}_{k,i}$ desemnează numărul aplicaţiilor surjective crescătoare de la X la o submulţime cu i elemente a lui Y, să se stabilească egalitatea:

$$c_{k,m} = \sum_{i=1}^{m} C_m^i \bar{c}_{k,i} .$$

Problema 255
Să se demonstreze relaţia:
$$g_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_{i=1}^{m} C_m^i \bar{g}_i^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} , \; k \geq m .$$

Problema 256
Să se demonstreze relaţiile:
a) $\bar{A}^m_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = m!$
b) $\bar{A}^n_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \dfrac{n!}{l_1!l_2!...l_m!} .$

Problema 257
Să se demonstreze relaţiile:
a) $\bar{C}^m_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = 1$
b) $\bar{C}^n_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = 1 .$

Problema 258
Să se demonstreze formula combinărilor barate generalizate complementare:
$$\bar{C}^k_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \bar{C}^{n-k+m}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} .$$

Problema 259
Să se demonstreze formula combinărilor barate cu repetiţie complementare:
$$\bar{c}_m^k = \bar{c}_{k-m+1}^k .$$

Problema 260
Să se demonstreze formula combinărilor cu repetiţie complementare:
$$c_m^k = c_{k+1}^{m-1} .$$

Problema 261
Să se demonstreze formula de reducere imediată a ordinului pentru grupările barate generalizate:
$$\bar{G}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \bar{G}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}_{n-l_1+k-m+1(k-m+1,l_2,...,l_m)}$$
dacă $l_1 > k - m + 1$. Observăm că ordinul se reduce cu $l_1 - k + m - 1$. După cum se ştie, trebuie să avem $k \leq n$ şi $k \geq m$.

SOLUTII

Problemele 1-10

Pentru a calcula numărul aranjamentelor generalizate, folosim una din metodele expuse în acest volum, din care utilizarea programului de calculator GG2-NUMAR este cea mai rapidă. Calculând numărul aranjamentelor generalizate propuse, se obţin următoarele valori.

1. $A^{3}_{6(3,2,1)} = 19$
2. $A^{3}_{7(3,3,1)} = 20$
3. $A^{4}_{8(3,2,2,1)} = 162$
4. $A^{4}_{9(4,2,2,1)} = 163$
5. $A^{5}_{10(3,3,2,1,1)} = 1390$
6. $A^{5}_{11(3,3,2,2,1)} = 1920$
7. $A^{6}_{12(4,3,2,2,1)} = 7325$
8. $A^{6}_{13(4,3,3,2,1)} = 8385$
9. $A^{7}_{14(4,4,3,2,1)} = 33320$
10. $A^{7}_{15(5,4,3,2,1)} = 33635$

Problemele 11-12 şi 13-14

Lista aranjamentelor generalizate şi lista distribuirilor obiectelor în căsuţe, corespunzătoare aranjamentelor generalizate, se pot obţine cu ajutorul programului de calculator GG2-LISTA. Listele cu grupări (I), respectiv cu distribuiri (II), sunt redate în continuare.

11-13. Pentru: $A^{3}_{6(3,2,1)} = 19$

Lista I	Lista II		
Obiecte:111223	Obiecte: ABC		
111	ABC		
112	AB	C	
113	AB		C
121	AC	B	
122	A	BC	
123	A	B	C
131	AC		B
132	A	C	B
211	BC	A	
212	B	AC	
213	B	A	C
221	C	AB	
223		AB	C
231	C	A	B
232		AC	B
311	BC		A
312	B	C	A
321	C	B	A
322		BC	A

12-14. Pentru: $A^{3}_{7(3,3,1)} = 20$

Lista I	Lista II		
Obiecte:1112223	Obiecte: ABC		
111	AAA		
112	AB	C	
113	AB		C
121	AC	B	
122	A	BC	
123	A	B	C
131	AC		B
132	A	C	B
211	BC	A	
212	B	AC	
213	B	A	C
221	C	AB	
222		ABC	
223		AB	C
231	C	A	B
232		AC	B
311	BC		A
312	B	C	A
321	C	B	A
322		BC	A

Problemele 15-24

Pentru a calcula numărul combinărilor generalizate, folosim una din metodele expuse în acest volum, din care utilizarea programului de calculator GG2-NUMAR este cea mai rapidă. Calculând numărul combinărilor generalizate propuse, se obţin următoarele valori.

15. $C^{3}_{6(3,2,1)} = 6$
16. $C^{3}_{7(3,3,1)} = 7$
17. $C^{4}_{8(3,2,2,1)} = 16$
18. $C^{4}_{9(4,2,2,1)} = 17$
19. $C^{5}_{10(3,3,2,1,1)} = 38$
20. $C^{5}_{11(3,3,2,2,1)} = 53$
21. $C^{6}_{12(4,3,2,2,1)} = 62$
22. $C^{6}_{13(4,3,3,2,1)} = 77$
23. $C^{7}_{14(4,4,3,2,1)} = 92$
24. $C^{7}_{15(5,4,3,2,1)} = 101$

Problemele 25-26 şi 27-28

Lista combinărilor generalizate şi lista distribuirilor obiectelor în căsuţe, corespunzătoare combinărilor generalizate, se pot obţine cu ajutorul programului de calculator GG2-LISTA. Listele cu grupări (I), respectiv cu distribuiri (II), sunt redate în continuare.

25-27. Pentru: $C^3_{6(3,2,1)} = 6$

Lista I	Lista II		
Obiecte:111223	Obiecte: AAA		
111	AAA		
112	AA	A	
113	AA		A
122	A	AA	
123	A	A	A
223		AA	A

26-28. Pentru: $C^3_{7(3,3,1)} = 7$

Lista I	Lista II		
Obiecte:1112223	Obiecte: AAA		
111	AAA		
112	AA	A	
113	AA		A
122	A	AA	
123	A	A	A
222		AAA	
223		AA	A

Problema 29

În problemă se consideră X şi Y două mulţimi finite cu k, respectiv m elemente, $k \geq m$. Dacă $f_{k,m}$ desemnează numărul funcţiilor de la X la Y iar $s_{k,i}$ desemnează numărul aplicaţiilor surjective de la X la o submulţime cu i elemente a lui Y, trebuie să stabilim egalitatea:

$$f_{k,m} = \sum_{i=1}^{m} C_m^i s_{k,i} .$$

Pentru aceasta, observăm că numărul de surjecţii care au ca imagine o submulţime cu i elemente din Y este: $C_m^i s_{k,i}$. Numărul funcţiilor de la X la Y va fi dat de suma acestor numere, pentru i=1,2,…,m. Egalitatea cerută în problemă este astfel demonstrată.

Observaţii.

a) Egalitatea se mai poate scrie, folosind alte notaţii pentru numărul de funcţii, în felul următor:

$$F_m^k = \sum_{i=1}^{m} C_m^i S_i^k .$$

b) Egalitatea se mai poate scrie, folosind noţiunile de aranjamente cu repetiţie şi aranjamente barate cu repetiţie, în felul următor:

$$a_m^k = \sum_{i=1}^{m} C_m^i \bar{a}_i^k .$$

c) Relaţia se mai poate demonstra folosind formula:

$$\bar{a}_m^{-k} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i a_i^k$$

şi formulele de inversiune binomiale (a se vedea I.Tomescu, [14]).
Problema se găseşte în lucrarea [9] (problema 24**, pag.26). Enunţul şi notaţiile au fost adaptate.

Problema 30
Pentru a demonstra formula:

$$B_{n(1,1,\ldots,1)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)} = G_n^{n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)},$$

ţinem seama de definiţia bijecţiilor între două mulţimi multiple şi de problema distribuirii obiectelor în căsuţe în cazul particular respectiv. Rezultă egalitatea cerută.

Problema 31
Pentru a demonstra formula:

$$I_{n(1,1,\ldots,1)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)} = G_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)},$$

ţinem seama de definiţia injecţiilor între două mulţimi multiple şi de problema distribuirii obiectelor în căsuţe în cazul particular respectiv. Rezultă egalitatea cerută.

Problema 32
Pentru a demonstra formula:

$$S_{n(1,1,\ldots,1)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)} = \bar{g}_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)},$$

ţinem seama de definiţia surjecţiilor între două mulţimi multiple şi de problema distribuirii obiectelor în căsuţe în cazul particular respectiv. Rezultă egalitatea cerută.

Problema 33
Pentru a demonstra formula:

$$F_{n(1,1,\ldots,1)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)} = g_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)},$$

ţinem seama de definiţia funcţiilor între două mulţimi multiple şi de problema distribuirii obiectelor în căsuţe în cazul particular respectiv. Rezultă egalitatea cerută.

Problemele 34-37
Calculând numărul bijecţiilor între mulţimile multiple indicate în simbolul respectiv, se obţin următoarele valori.

34. $B_{6(2,2,1,1)}^{6(2,2,1,1)} = 58$
35. $B_{8(3,2,2,1)}^{8(4,2,1,1)} = 96$
36. $B_{6(1,1,1,1,1,1)}^{6(2,2,1,1)} = 180$
37. $B_{8(1,1,1,1,1,1,1,1)}^{8(4,2,1,1)} = 840$

Problemele 38-41
Calculând numărul injecţiilor între mulţimile multiple indicate în simbolul respectiv, se obţin următoarele valori.

38. $I_{6(2,2,1,1)}^{5(2,2,1)} = 58$

39. $I_{8(3,2,2,1)}^{7(4,2,1)} = 96$

40. $I_{6(1,1,1,1,1,1)}^{4(2,1,1)} = 180$

41. $I_{8(1,1,1,1,1,1,1,1)}^{4(2,1,1)} = 840$

Problemele 42-45

Calculând numărul surjecţiilor între mulţimile multiple indicate în simbolul respectiv, se obţin următoarele valori.

42. $S_{4(2,1,1)}^{5(2,1,1,1)} = 69$

43. $S_{4(2,1,1)}^{5(1,1,1,1,1)} = 120$

44. $S_{4(1,1,1,1)}^{5(2,1,1,1)} = 132$

45. $S_{4(1,1,1,1)}^{6(2,2,1,1)} = 516$

Problemele 46-49

Calculând numărul funcţiilor între mulţimile multiple indicate în simbolul respectiv, se obţin următoarele valori.

46. $F_{4(2,1,1)}^{5(2,1,1,1)} = 336$

47. $F_{4(2,1,1)}^{5(1,1,1,1,1)} = 528$

48. $F_{4(1,1,1,1)}^{5(2,1,1,1)} = 640$

49. $F_{6(1,1,1,1,1,1)}^{5(2,2,1)} = 2646$

Problemele 50-51

Calculând numărul mulţimilor parţial multiple şi parţial ordonate indicate în problema respectivă, se obţin următoarele rezultate.

50. Mulţimi parţial multiple de tipul 6(3,2,1) şi parţial ordonate de tipul 6(2,2,2).

Numărul acestor mulţimi este: $N = G_{6(3,2,1)}^{6(2,2,2)} = 15$.

51. Mulţimi parţial multiple de tipul 7(3,3,1) şi parţial ordonate de tipul 7(3,2,2).

Numărul acestor mulţimi este: $N = G_{7(3,3,1)}^{7(3,2,2)} = 19$.

Problemele 52-53

Listele cu mulţimile parţial multiple şi parţial ordonate sunt redate în continuare.

52. Mulţimi parţial multiple de tipul 6(3,2,1) şi parţial ordonate de tipul 6(2,2,2).
Elementele mulţimii sunt:111223. Lista este:
111223; 111322; 112213; 112312; 121123; 121213; 121312; 122311; 131122; 131212; 132211; 221113; 221311; 231112; 231211.

53. Mulţimi parţial multiple de tipul 7(3,3,1) şi parţial ordonate de tipul 7(3,2,2).
Elementele mulţimii sunt:1112223. Lista este:
1112223; 1112322; 1121223; 1121322; 1122213; 1122312; 1131222; 1132212; 1221123; 1221213; 1221312; 1222311; 1231122; 1231212; 1232211; 2221113; 2221311; 2231112; 2231211.

Problemele 54-63

Pentru a calcula numărul grupărilor generalizate (cazul standard, k=n), folosim una din metodele expuse în acest volum, din care utilizarea programului de calculator GG1-NUMAR este cea mai rapidă.

Calculând numărul grupărilor generalizate propuse (cazul standard, k=n) se obţin următoarele valori.

54. $G_{6(3,2,1)}^{6(2,2,2)} = 15$

55. $G_{7(3,3,1)}^{7(3,2,2)} = 19$

56. $G_{8(3,2,2,1)}^{8(3,2,2,1)} = 154$

57. $G_{9(4,2,2,1)}^{9(3,2,2,1,1)} = 403$

58. $G_{10(3,3,2,1,1)}^{10(3,3,2,2)} = 1044$

59. $G_{11(3,3,2,2,1)}^{11(4,3,2,1,1)} = 3342$

60. $G_{12(4,3,2,2,1)}^{12(3,3,3,2,1)} = 8154$

61. $G_{13(4,3,3,2,1)}^{13(3,3,3,3,1)} = 15876$

62. $G_{14(4,4,3,2,1)}^{14(3,3,3,3,2)} = 35458$

63. $G_{15(5,4,3,2,1)}^{15(3,3,3,3,2,1)} = 121050$

Problemele 64-65 şi 66-67

Lista grupărilor generalizate (cazul standard, k=n) şi lista distribuirilor obiectelor în căsuţe, corespunzătoare grupărilor generalizate respective, se pot obţine cu ajutorul programului de calculator GG1-LISTA. Listele cu grupări (I), respectiv cu distribuiri (II), sunt redate în continuare.

64-66. Pentru: $G_{6(3,2,1)}^{6(2,2,2)} = 15$

Lista I	Lista II		
Obiecte:111223	Obiecte: AABBCC		
111223	AAB	BC	C
111322	AAB	CC	B
112213	AAC	BB	C
112312	AAC	BC	B
121123	ABB	AC	C
121213	ABC	AB	C
121312	ABC	ABC	B
122311	ACC	AB	B
131122	ABB	CC	A
131212	ABC	BC	A
132211	ACC	BB	A
221113	BBC	AA	C
221311	BCC	AA	B
231112	BBC	AC	A
231211	BCC	AB	A

65-67. Pentru: $G_{7(3,3,1)}^{7(3,2,2)} = 19$ cele două liste se întocmesc asemănător.

Problema 68
Calculând numărul submulţimilor parţial ordonate de tipul 4(2,2) ale mulţimii parţial multiple de tipul 6(3,2,1) indicate în problema respectivă, se obţine următorul rezultat.
Numărul acestor submulţimi este: $N = G_{6(3,2,1)}^{4(2,2)} = 15$.

Problema 69
Calculând numărul submulţimilor parţial ordonate de tipul 5(3,2) ale mulţimii parţial multiple de tipul 7(3,3,1) indicate în problema respectivă, se obţine următorul rezultat.
Numărul acestor submulţimi este: $N = G_{7(3,3,1)}^{5(3,2)} = 19$.

Problema 70
Lista submulţimilor parţial ordonate de tipul 4(2,2) ale mulţimii parţial multiple de tipul 6(3,2,1) este redată în continuare.
Elementele mulţimii sunt: 111223. Lista este:
1112; 1113; 1122; 1123; 1211; 1212; 1213; 1223; 1311; 1312; 1322; 2211; 2213; 2311; 2312

Problema 71
Lista submulţimilor parţial ordonate de tipul 5(3,2) ale mulţimii parţial multiple de tipul 7(3,3,1) este redată în continuare.
Elementele mulţimii sunt: 1112223. Lista este:
11122; 11123; 11212; 11213; 11222; 11223; 11312; 11322; 12211; 12212; 12213; 12223; 12311; 12312; 12322; 22211; 22213; 22311; 22312

Problemele 72-81
Pentru a calcula numărul grupărilor generalizate, folosim una din metodele expuse în acest volum, din care utilizarea programului de calculator GG2-NUMAR este cea mai rapidă.
Calculând numărul grupărilor generalizate propuse, se obţin următoarele valori.

72. $G_{6(3,2,1)}^{4(2,2)} = 15$

73. $G_{7(3,3,1)}^{5(3,2)} = 19$

74. $G_{8(3,2,2,1)}^{6(3,2,1)} = 154$

75. $G_{9(4,2,2,1)}^{7(3,2,1,1)} = 403$

76. $G_{10(3,3,2,1,1)}^{8(3,3,2)} = 1044$

77. $G_{11(3,3,2,2,1)}^{9(4,3,1,1)} = 3342$

78. $G_{12(4,3,2,2,1)}^{9(3,3,2,1)} = 8154$

79. $G_{13(4,3,3,2,1)}^{10(3,3,3,1)} = 15876$

80. $G_{14(4,4,3,2,1)}^{11(3,3,3,2)} = 35458$

81. $G_{15(5,4,3,2,1)}^{12(3,3,3,2,1)} = 121050$

Problemele 82-83 şi 84-85

Lista grupărilor generalizate şi lista distribuirilor obiectelor în căsuţe, corespunzătoare grupărilor generalizate respective, se pot obţine cu ajutorul programului de calculator GG2-LISTA. Listele cu grupări (I), respectiv cu distribuiri (II), sunt redate în continuare.

82-84. Pentru: $G_{6(3,2,1)}^{4(2,2)} = 15$

Lista I	Lista II		
Obiecte:111223	Obiecte: AABB		
1112	AAB	B	
1113	AAB		B
1122	AA	BB	
1123	AA	B	B
1211	ABB	A	
1212	AB	AB	
1213	AB	A	B
1223	A	AB	B
1311	ABB		A
1312	AB	B	A
1322	A	BB	A
2211	BB	AA	
2213	B	AA	B
2311	BB	A	A
2312	B	AB	A

83-85. Pentru: $G_{7(3,3,1)}^{5(3,2)} = 19$ cele două liste se întocmesc asemănător.

Problema 86

Relaţia propusă pentru demonstrare:

$$G_{3r(r,r,r)}^{3r(r,r,r)} = \frac{(r+1)(r+2)(r^2+3r+4)}{8},$$

unde r este un număr natural mai mare sau egal ca unu, este o relaţie cunoscută (MacMahon, 1916). Pentru demonstraţie, cititorul este îndrumat spre lucrările [1] (problema 143), [12] (problema 10.32, pag.62), [15] (problema 13, pag.45), [16] (problema 2.7, pag.18). Enunţul şi notaţiile au fost adaptate.

Problema 87

Pentru a demonstra relaţia:

$$G_{6r(3r,3r)}^{6r(2r,2r,2r)} = 3r^2 + 3r + 1,$$

unde r este un număr natural mai mare sau egal ca unu, folosim formula de calcul a combinărilor generalizate în cazul particular când partiţia lui n este în părţi egale. Problema se găseşte în lucrarea [1] (problema 139). Enunţul şi notaţiile au fost adaptate.

Problema 88

Pentru a demonstra relaţia:

$$G_{8r(4r,4r)}^{8r(2r,2r,2r,2r)} = \frac{1}{3}(2r+1)(8r^2+8r+3),$$

unde r este un număr natural mai mare sau egal ca unu, folosim formula de calcul a combinărilor generalizate în cazul particular când partiţia lui n este în părţi egale. Problema se găseşte în lucrarea [1] (problema 140). Enunţul şi notaţiile au fost adaptate.

Problema 89

Pentru a demonstra relaţia:

$$G_{24r+8(6r+2,6r+2,6r+2,6r+2)}^{24r+8(12r+5,12r+3)} = 8(2r+1)(3r+1)(3r+2).$$

unde r este un număr natural, folosim formula de calcul a combinărilor generalizate în cazul particular când partiţia lui n este în părţi egale.

Problema 90

Proprietatea de dualitate (de simetrie) pentru simbolul general standard al grupărilor generalizate:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = G_{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}^{n(l_1,l_2,...,l_m)},$$

se demonstrează asemănător ca proprietatea identică de la grupările elementare generalizate. Să considerăm la început un caz particular:

$$G_{7(5,1,1)}^{7(4,3)} = G_{7(4,3)}^{7(5,1,1)} = 4$$

Scriem una dintre distribuirile posibile, corespunzător membrului stâng al egalităţii:

A	A	A	B	B	A	B	(obiecte)
1	1	1	1	1	2	3	(căsuţe)

(1)

Putem interverti rolul literelor cu al cifrelor şi presupune că 1,2,3 indică categoriile de obiecte iar A, B căsuţele. Rearanjăm perechile:

1	1	1	2	1	1	3
A	A	A	A	B	B	B

(2)

Exact aceleaşi perechi apar in (1) şi (2) numai că au fost inversate rândurile. Dar (2) poate fi interpretat ca reprezentând o distribuţie formată cu 5 obiecte de clasa 1,un obiect de clasa 2 şi un obiect de clasa 3 în căsuţele A şi B respectiv de capacitate 4 şi 3. Dar aceasta este una dintre distribuţiile corespunzătoare membrului drept al egalităţii de demonstrat. Rezultă o corespondenţă biunivocă între cele două mulţimi de distribuiri care vor avea deci acelaşi număr de elemente şi egalitatea din enunţ este demonstrată, deoarece procedeul expus rămâne evident valabil pe cazul general.

Problema 91

Problema se rezolvă foarte uşor folosind noţiunile de aranjamente generalizate şi permutări generalizate.

a) Considerăm problema distribuirii obiectelor în căsuţe pentru cazul particular m=3 şi k=n.

Putem scrie: $A_{n(l_1,l_2,l_3)}^{n} = P_{n(l_1,l_2,l_3)}$.

Numărul de distribuiri posibile este: $N = P_{n(l_1,l_2,l_3)} = \frac{n!}{l_1!l_2!l_3!}$.

b) Asemănător, avem:

$$N = P_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \frac{n!}{l_1!l_2!...l_m!}.$$

c) Folosim formula de recurenţă pentru aranjamentele generalizate $A^{k}_{n(l_1,\,l_2,\,...,\,l_m)}$ şi anume:

$$A^{k}_{n(l_1,\,l_2,\,...,\,l_m)} = \sum_{R} A^{k-1}_{n-1(x_1,\,x_2,\,...,\,x_m)}$$

unde R este mulţimea soluţiilor $(x_1, x_2, ..., x_m)$ în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = n\text{-}1$$

cu condiţiile: $0 \le x_i \le l_i$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulţimea R a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are |R| termeni (cardinalul mulţimii R).

Avem:

$$\left|R\right| = C^{n-1}_{n(l_1,\,l_2,\,...,\,l_m)} = m\,.$$

Particularizăm această formulă pentru k=n.

Obţinem:

$$A^{n}_{n(l_1,\,l_2,\,...,\,l_m)} = \sum_{R} A^{n-1}_{n-1(x_1,\,x_2,\,...,\,x_m)}$$

unde R este mulţimea soluţiilor $(x_1, x_2, ..., x_m)$ în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = n\text{-}1$$

cu condiţiile: $0 \le x_i \le l_i$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulţimea R a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are |R| termeni (cardinalul mulţimii R).

Avem:

$$\left|R\right| = C^{n-1}_{n(l_1,\,l_2,\,...,\,l_m)} = m\,.$$

Relaţia se poate scrie între permutări generalizate:

$$P_{n(l_1,\,l_2,\,...,\,l_m)} = P_{n-1(l_1-1,l_2,...,l_m)} + P_{n-1(l_1,l_2-1,...,l_m)} + ... + P_{n-1(l_1,l_2,...,l_m-1)}$$

Deci:

$$\frac{n!}{l_1!l_2!...l_m!} = \frac{(n-1)!}{(l_1-1)!l_2!...l_m!} + \frac{(n-1)!}{l_1!(l_2-1)!...l_m!} + ... + \frac{(n-1)!}{l_1!l_2!...(l_m-1)!}$$

cu $l_1 + l_2 + ... + l_m = n$.

Relaţia este astfel demonstrată, folosind consideraţii combinatoriale.

Identitatea se poate demonstra şi altfel, amplificând fracţiile din membrul drept cu l_1, $l_2, ..., l_m$. Dar, această demonstraţie nu evidenţiază caracterul combinatorial al identităţii.

Problema se găseşte în lucrarea [3]. Notaţiile au fost adaptate.

Problema 92

În problemă se cere să se demonstreze egalitatea:

$$\sum_{\substack{x_1+x_2+...x_m=k \\ x_1\ge 0,...,x_n\ge 0}} \frac{1}{x_1!x_2!...x_m!} = \frac{m^k}{k!}$$

unde $x_1, x_2, ..., x_m, k$ sunt numere naturale iar m este număr natural strict pozitiv. Însumarea se face pentru toate soluţiile $(x_1, x_2, ..., x_m)$ ale ecuaţiei diofantice liniare scrise sub semnul sigma. Egalitatea este demonstrată în prezentul volum în articolul “Cazuri speciale ale grupărilor generalizate”, prin particularizarea relaţiei de recurenţă a grupărilor generalizate.

Problema se găseşte în lucrarea [8]. Notaţiile au fost adaptate.

Problemele 93-102

Pentru a calcula numărul grupărilor barate generalizate, folosim una din metodele expuse în acest volum, din care utilizarea programului de calculator GG3-NUMAR este cea mai rapidă. Calculând numărul grupărilor barate generalizate propuse, se obţin următoarele valori.

93. $\overline{G}^{4(2,2)}_{6(3,2,1)} = 8$

94. $\overline{G}^{5(3,2)}_{7(3,3,1)} = 13$

95. $\overline{G}^{6(3,2,1)}_{8(3,2,2,1)} = 91$

96. $\overline{G}^{7(3,2,1,1)}_{9(4,2,2,1)} = 264$

97. $\overline{G}^{8(3,3,2)}_{10(3,3,2,1,1)} = 571$

98. $\overline{G}^{8(4,3,1,1)}_{11(3,3,2,2,1)} = 2720$

99. $\overline{G}^{9(3,3,2,1)}_{12(4,3,2,2,1)} = 4919$

100. $\overline{G}^{10(3,3,3,1)}_{13(4,3,3,2,1)} = 10728$

101. $\overline{G}^{11(3,3,3,2)}_{14(4,4,3,2,1)} = 25528$

102. $\overline{G}^{12(3,3,3,2,1)}_{15(5,4,3,2,1)} = 90779$

Ţinând seama de valorile grupărilor generalizate calculate la problemele 72-81, se observă că inegalitatea amintită în enunţul problemei se verifică. De exemplu, pentru primele două valori putem scrie:

$\overline{G}^{4(2,2)}_{6(3,2,1)} = 8 < G^{4(2,2)}_{6(3,2,1)} = 15$

$\overline{G}^{5(3,2)}_{7(3,3,1)} = 13 < G^{5(3,2)}_{7(3,3,1)} = 19.$

Problemele 103-104 şi 105-106

Lista grupărilor barate generalizate şi lista distribuirilor obiectelor în căsuţe, corespunzătoare grupărilor barate generalizate respective, se pot obţine cu ajutorul programului de calculator GG3-LISTA. Listele cu grupări (I), respectiv cu distribuiri (II), sunt redate în continuare.

103-105. Pentru: $\overline{G}^{4(2,2)}_{6(3,2,1)} = 8$

Lista I	Lista II		
Obiecte:111223	Obiecte: AABB		
1123	AA	B	B
1213	AB	A	B
1223	A	AB	B
1312	AB	B	A
1322	A	BB	A
2213	B	AA	B
2311	BB	A	A
2312	B	AB	A

104-106. Pentru: $\overline{G}^{5(3,2)}_{7(3,3,1)} = 13$ cele două liste se întocmesc asemănător.

Problema 107

În problemă se cere să se determine în câte moduri se pot distribui k obiecte diferite în m=p+q căsuţe distincte şi neordonate, astfel încât p căsuţe să primească cel puţin câte un obiect. Cazuri particulare: a) p=0; b) p=m.

Numărul cerut în problemă se poate determina folosind principiul includerii şi al excluderii. Se obţine:

$$N = C_p^0 m^k - C_p^1 (m-1)^k + C_p^2 (m-2)^k - ... + (-1)^p C_p^p (m-p)^k$$

În cazul particular a avem p=0, deci q=m şi obţinem $N = a_m^k$ (aranjamente cu repetiţie).

În cazul particular b avem p=m, deci q=0 şi obţinem $N = \bar{a}_m^k,\ k \geq m$ (aranjamente barate cu repetiţie).Problema se găseşte în lucrările [1] (problema 135), [12] (problema 10.37, pag.63), [15] (problema 8, pag.43), [16] (problema 2.10, pag.18). Enunţul şi notaţiile au fost adaptate.

Problema 108

În problemă se cere să se determine în câte moduri se pot distribui k obiecte identice în m=p+q căsuţe distincte şi neordonate, astfel încât p căsuţe să primească cel puţin câte un obiect. Cazuri particulare: a) p=0; b) p=m.

Numărul cerut în problemă este egal cu numărul soluţiilor ecuaţiei diofantice liniare următoare, cu condiţiile indicate.

$$x_1 + x_2 + ... + x_p + x_{p+1} + ... + x_m = k$$

cu $x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 1, ..., x_p \geq 1,\ x_{p+1} \geq 0, ..., x_m \geq 0$.

Facem substituţiile:

$$y_1 = x_1 - 1,\ y_2 = x_2 - 1, \ldots, y_p = x_p - 1,\ y_{p+1} = x_{p+1}, \ldots, y_m = x_m.$$

Obţinem ecuaţia:

$$y_1 + y_2 + ... + y_m = k - p$$

cu $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, ..., y_m \geq 0$.

Ecuaţia în x şi ecuaţia în y au acelaşi număr de soluţii şi anume:

$$N = c_m^{k-p},\ k \geq p.$$

Acesta este numărul solicitat în problemă.

În cazul particular a avem p=0, deci q=m şi obţinem $N = c_m^k$ (combinări cu repetiţie).

În cazul particular b avem p=m, deci q=0 şi obţinem $N = c_m^{k-m} = \bar{c}_m^k,\ k \geq m$ (combinări barate cu repetiţie).

Problema 109

În problemă se cere să se demonstreze formula:

$$\bar{a}_m^k = m!S(k,m)$$

unde S(k,m) sunt numerele lui Stirling de speţa a II-a. Aceasta este o problemă clasică (a se vedea de exemplu lucrările [14] (pag.51) şi [16] (problema 3.4, pag.21).

Problema 110

Trebuie să demonstrăm formula aranjamentelor barate cu repetiţie:

$$\bar{a}_m^k = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i a_i^k$$

unde $k \geq m$, folosind formula grupărilor barate cu repetiţie generalizate.

Formula de calcul a grupărilor barate cu repetiţie generalizate este:

$$\bar{g}_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i c_i^{\lambda_1} c_i^{\lambda_2} ... c_i^{\lambda_\mu} \; ; \; k \geq m .$$

Dar, avem relaţia:

$$\bar{a}_m^k = \bar{g}_m^{k(l,l,...,l)} \; ; \; \mu = k \; ; \; k \geq m .$$

Obţinem:

$$\bar{a}_m^k = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i (c_i^1)^k = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i i^k = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i a_i^k$$ şi problema este rezolvată.

Problema 111

În problemă se cere să se demonstreze egalitatea:

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i i^m = m!$$

Pentru a demonstra această egalitate, folosim formula din problema anterioară în care facem k=m. Dar: $\bar{a}_m^m = \bar{p}_m = m!$ şi problema este rezolvată.

Problema 112

Trebuie să demonstrăm relaţia:

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i c_i^{\lambda_1} c_i^{\lambda_2} ... c_i^{\lambda_\mu} = \frac{m!}{\lambda_1! \lambda_2! ... \lambda_\mu !}$$

unde $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_\mu = m$.

Formula de calcul a grupărilor barate cu repetiţie generalizate este:

$$\bar{g}_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i c_i^{\lambda_1} c_i^{\lambda_2} ... c_i^{\lambda_\mu} \; ; \; k \geq m ; \; \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_\mu = k .$$

Folosim de asemenea şi relaţia de generalizare:

$\bar{g}_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \bar{G}_{n(k-m+1,k-m+1,...,k-m+1)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$, cu: $m(k-m+1) = n$.

În cazul particular k=m obţinem:

$$\bar{g}_m^{m(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \bar{G}_{m(1,1,...,1)}^{m(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = G_{m(1,1,...,1)}^{m(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \frac{m!}{\lambda_1! \lambda_2! ... \lambda_\mu !} .$$

Astfel, relaţia este demonstrată.

Problema 113

Trebuie să demonstram formula combinărilor barate cu repetiţie:

$$\bar{c}_m^k = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i c_i^k$$

unde $k \geq m$, folosind formula grupărilor barate cu repetiţie generalizate.

Formula de calcul a grupărilor barate cu repetiţie generalizate este:

$$\bar{g}_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i} C_m^i c_i^{\lambda_1} c_i^{\lambda_2} ... c_i^{\lambda_\mu} \;;\; k \geq m .$$

Dar, avem relaţia:

$$\bar{c}_m^k = \bar{g}_m^{k(\lambda_1)} ;\; \mu = 1 ;\; k \geq m .$$

Obţinem:

$$\bar{c}_m^k = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i} C_m^i c_i^{\lambda_1} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i} C_m^i c_i^k$$ şi problema este rezolvată.

Problema 114

În problemă se cere să se demonstreze egalitatea:

$$\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i} C_m^i C_{i+k-1}^{i-1} = C_{k-1}^{m-1} .$$

Pentru a demonstra această egalitate, folosim formula din problema anterioară precum şi următoarele formule cunoscute:

$$\bar{c}_m^k = C_{k-1}^{m-1},\; k \geq m ;\; c_i^k = C_{i+k-1}^k = C_{i+k-1}^{i-1} .$$

Problema 115

Pentru a demonstra egalitatea:

$$\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i} C_m^i C_{i+m-1}^{i-1} = 1$$

cerută în problemă, folosim egalitatea de la problema precedentă în care facem k=m.

Problema 116

În problemă se cere să se arate că numărul de scrieri ale întregului k sub forma:

$$k = x_1 + x_2 + ... + x_m$$

unde x_1, x_2, …, x_m sunt numere întregi mai mari sau egale cu 2, două scrieri deosebindu-se şi prin ordinea termenilor, este egal cu:

$$C_{k-1}^{m-1} - C_m^1 C_{k-2}^{m-2} + C_m^2 C_{k-3}^{m-3} - ... + (-1)^{m-1} m .$$

Ce devine această expresie pentru k=2m?

Pentru a rezolva problema, considerăm ecuaţia:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 2$,..., $x_m \geq 2$.

Aceasta este o ecuaţie diofantică liniară cu coeficienţi unitari, cu duble limitări ale necunoscutelor, cazul particular 2 (limitări superioare naturale, maxim posibile).

Numărul de soluţii ale ecuaţiei (care este şi numărul solicitat în problemă) este dat de relaţia cunoscută:

$$N = c_m^{k-n'}$$

unde $n' = b_1 + b_2 + ... + b_m = 2m$ .Obţinem:

$$N = c_m^{k-2m} = C_{k-m-1}^{k-2m} .$$

Numărul de soluţii ale ecuaţiei se mai poate exprima şi în alt mod.

În ecuaţia:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 2$,..., $x_m \geq 2$

facem substituţiile:
$y_1 = x_1 - 1,\ y_2 = x_2 - 1, \ldots, y_m = x_m - 1.$
Rezultă ecuaţia:
$y_1 + y_2 + \ldots + y_m = k - m$
cu $y_1 \geq 1,\ y_2 \geq 1, \ldots, y_m \geq 1.$
Ecuaţia în x şi ecuaţia în y au acelaşi număr de soluţii şi anume:
$N = \bar{c}_m^{k-m}$.
Folosim în continuare formula demonstrată la o problemă anterioară:
$\bar{c}_m^k = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i c_i^k = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i C_{i+k-1}^{i-1}$.
Deducem:
$N = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i C_{i+k-m-1}^{i-1}$, care este chiar expresia cerută in problemă.
În cazul particular k=2m obţinem N=1.
Problema se găseşte în lucrarea [6] şi în lucrarea [13] (problema OIM 12, pag.281). Notaţiile au fost adaptate.

Problemele 117-126
Pentru a calcula numărul aranjamentelor barate generalizate, folosim una din metodele expuse în acest volum, din care utilizarea programului de calculator GG3-NUMAR este cea mai rapidă.
Calculând numărul aranjamentelor barate generalizate propuse, se obţin următoarele valori.
117. $\bar{A}^5_{6(3,2,1)} = 50$
118. $\bar{A}^5_{7(3,3,1)} = 70$
119. $\bar{A}^6_{8(3,2,2,1)} = 660$
120. $\bar{A}^7_{9(4,2,2,1)} = 1680$
121. $\bar{A}^7_{10(3,3,2,1,1)} = 5460$
122. $\bar{A}^7_{11(3,3,2,2,1)} = 9240$
123. $\bar{A}^8_{12(4,3,2,2,1)} = 42000$
124. $\bar{A}^8_{13(4,3,3,2,1)} = 52000$
125. $\bar{A}^8_{14(4,4,3,2,1)} = 53760$
126. $\bar{A}^9_{15(5,4,3,2,1)} = 237384$
Calculând valorile aranjamentelor generalizate cu aceiaşi indici ca ai aranjamentelor barate generalizate de mai sus, se observă că inegalitatea amintită în enunţul problemei se verifică. De exemplu, pentru primele două valori putem scrie:
$\bar{A}^5_{6(3,2,1)} = 50 < A^5_{6(3,2,1)} = 60$
$\bar{A}^5_{7(3,3,1)} = 70 < A^5_{7(3,3,1)} = 90$

Problemele 127-128 şi 129-130
Lista aranjamentelor barate generalizate şi lista distribuirilor obiectelor în căsuţe, corespunzătoare aranjamentelor barate generalizate respective, se pot obţine cu ajutorul programului de calculator GG3-LISTA. Listele cu grupări (I), respectiv cu distribuiri (II), sunt redate în continuare.

127-129. Pentru: $\overline{A}^{4}_{5(3,2)} = 10$

Lista I	Lista II	
Obiecte:11122	Obiecte: ABCD	
1112	ABC	D
1121	ABD	C
1122	AB	CD
1211	ACD	B
1212	AC	BD
1221	AD	BC
2111	BCD	A
2112	BC	AD
2121	BD	AC
2211	CD	AB

128-130. Pentru: $\overline{A}^{5}_{6(3,2,1)} = 50$ cele două liste se întocmesc asemănător.

Problemele 131-140

Pentru a calcula numărul combinărilor barate generalizate, folosim una din metodele expuse în acest volum, din care utilizarea programului de calculator GG3-NUMAR este cea mai rapidă.

Calculând numărul combinărilor barate generalizate propuse, se obţin următoarele valori.

131. $\overline{C}^{5}_{6(3,2,1)} = 2$

132. $\overline{C}^{5}_{7(3,3,1)} = 3$

133. $\overline{C}^{6}_{8(3,2,2,1)} = 4$

134. $\overline{C}^{7}_{9(4,2,2,1)} = 4$

135. $\overline{C}^{7}_{10(3,3,2,1,1)} = 5$

136. $\overline{C}^{7}_{11(3,3,2,2,1)} = 8$

137. $\overline{C}^{8}_{12(4,3,2,2,1)} = 11$

138. $\overline{C}^{8}_{13(4,3,3,2,1)} = 14$

139. $\overline{C}^{8}_{14(4,4,3,2,1)} = 15$

140. $\overline{C}^{9}_{15(5,4,3,2,1)} = 20$

Calculând valorile combinărilor generalizate cu aceiaşi indici ca ai combinărilor barate generalizate de mai sus, se observă că inegalitatea amintită în enunţul problemei se verifică. De exemplu, pentru primele două valori putem scrie:

$\overline{C}^{5}_{6(3,2,1)} = 2 < C^{5}_{6(3,2,1)} = 3$

$\overline{C}^{5}_{7(3,3,1)} = 3 < C^{5}_{7(3,3,1)} = 5$

Problemele 141-142 şi 143-144

Lista combinărilor barate generalizate şi lista distribuirilor obiectelor în căsuţe, corespunzătoare combinarilor barate generalizate respective, se pot obţine cu ajutorul programului de calculator GG3-LISTA. Listele cu grupări (I), respectiv cu distribuiri (II), sunt redate în continuare.

141-143. Pentru: $\overline{C}^{8}_{12(4,3,2,2,1)} = 11$

Lista I	Lista II				
Obiecte:111122233445	Obiecte: AAAAAAAA				
11112345	AAAA	A	A	A	A
11122345	AAA	AA	A	A	A
11123345	AAA	A	AA	A	A
11123445	AAA	A	A	AA	A
11222345	AA	AAA	A	A	A
11223345	AA	AA	AA	A	A
11223445	AA	AA	A	AA	A
11233445	AA	A	AA	AA	A
12223345	A	AAA	AA	A	A
12223445	A	AAA	A	AA	A
12233445	A	AA	AA	AA	A

142-144. Pentru: $\overline{C}^{8}_{13(4,3,3,2,1)} = 14$ cele două liste se întocmesc asemănător.

Problemele 145-154

Pentru a calcula numărul grupărilor elementare generalizate, folosim una din metodele expuse în acest volum, din care utilizarea programului de calculator GG4-NUMAR este cea mai rapidă.

Calculând numărul grupărilor elementare generalizate propuse, se obţin următoarele valori.

145. $H^{6(2,2,2)}_{6(3,2,1)} = 3$

146. $H^{7(3,2,2)}_{7(3,3,1)} = 1$

147. $H^{8(3,2,2,1)}_{8(3,2,2,1)} = 24$

148. $H^{9(3,2,2,1,1)}_{9(4,2,2,1)} = 36$

149. $H^{10(3,3,2,2)}_{10(3,3,2,1,1)} = 80$

150. $H^{11(4,3,2,1,1)}_{11(3,3,2,2,1)} = 148$

151. $H^{12(3,3,3,2,1)}_{12(4,3,2,2,1)} = 237$

152. $H^{13(3,3,3,3,1)}_{13(4,3,3,2,1)} = 244$

153. $H^{14(3,3,3,3,2)}_{14(4,4,3,2,1)} = 306$

154. $H^{15(3,3,3,3,2,1)}_{15(5,4,3,2,1)} = 590$

Ţinând seama de valorile grupărilor generalizate (cazul standard, k=n) calculate la problemele 54-63, se observă că inegalitatea amintită în enunţul problemei se verifică. De exemplu, pentru primele două valori putem scrie:

$$H_{6(3,2,1)}^{6(2,2,2)} = 3 < G_{6(3,2,1)}^{6(2,2,2)} = 15$$

$$H_{7(3,3,1)}^{7(3,2,2)} = 1 < G_{7(3,3,1)}^{7(3,2,2)} = 19 .$$

Problemele 155-156 si 157-158

Lista grupărilor elementare generalizate şi lista distribuirilor obiectelor în căsuţe, corespunzătoare grupărilor elementare generalizate respective, se pot obţine cu ajutorul programului de calculator GG4-LISTA. Listele cu grupări (I), respectiv cu distribuiri (II), sunt redate în continuare.

155-157. Pentru: $H_{6(3,2,1)}^{6(2,2,2)} = 3$

Lista I	Lista II		
Obiecte:111223	Obiecte: AABBCC		
121213	ABC	AB	C
121312	ABC	AC	B
131212	ABC	BC	A

Pentru problema grupării obiectelor în acest caz al grupărilor elementare generalizate, facem observaţia că “zonele” de lungimi 2, 2, 2 conţin numai obiecte diferite între ele.

156-158. Pentru: $H_{8(3,2,2,1)}^{8(4,2,1,1)} = 5$

Lista I	Lista II			
Obiecte:11122334	Obiecte: AAAABBCD			
12341213	ABC	AB	AD	A
12341231	ABD	AB	AC	A
12341312	ABC	AD	AB	A
12341321	ABD	AC	AB	A
12342311	ACD	AB	AB	A

Problema 159

Aceasta este o problemă clasică de algebră (a se vedea de exemplu lucrarea [2] (problema 803) pentru enunţ, dar şi pentru rezolvare). Vom calcula aici numai primele 4 cazuri particulare.

Vom utiliza formula:

$$Q_k = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & x_1 & 2 & \dots & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \\ x_k & x_{k-1} & x_{k-2} & \dots & x_1 \end{vmatrix}$$

unde k=1,2,3,4.

$$Q_1 = \frac{1}{1!}|x_1| = x_1$$

$$Q_2 = \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2)$$

$$Q_3 = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & x_1 & 2 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(x_1^3 - 3x_1x_2 + 2x_3)$$

$$Q_4 = \frac{1}{4!}\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 2 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & 3 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{24}(x_1^4 - 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 - 6x_4)$$

S-au regăsit valorile cunoscute pentru primele 4 polinoame ale lui Newton.

Problema 160

Numărul de împărţiri este dat de numărul de soluţii ale ecuaţiei diofantice liniare:

$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$

astfel încât $x_i \geq b$, i=1,2,…,m.

Avem o ecuaţie diofantică liniară cu coeficienţi unitari, cu duble limitări ale necunoscutelor, cazul particular 2 (limitări superioare naturale, maxim posibile).

Se ştie că numărul soluţiilor este în acest caz dat de relaţia:

$N = c_m^{k-n'}$, unde $n' = b_1 + b_2 + ... + b_m = mb$, avand $b_1 = b_2 = ... = b_m = b$ limitările inferioare ale necunoscutelor.

Deci: $N = c_m^{k-mb}$.

Evident, trebuie sa avem $k \geq mb$.

Problema se găseşte în lucrarea [4] şi în lucrarea [13] (problema CO 33, pag.203). Notaţiile au fost adaptate.

Problema 161

Trebuie să demonstrăm că un polinom omogen cu m nedeterminate şi gradul n are în scrierea canonică cel mult c_m^n termeni.

Partea literală a unui monom al polinomului este de forma: $a_1^{x_1}a_2^{x_2}...a_m^{x_m}$ unde exponenţii x_i sunt numere naturale cu $0 \leq x_i \leq n$, $i = 1,2,...,m$ şi care verifică ecuaţia diofantică liniară:

$x_1 + x_2 + ... + x_m = n$.

Numărul maxim de termeni al polinomului, în scriere canonică, este egal cu numărul de soluţii ale acestei ecuaţii, cu condiţiile indicate. Dar se ştie că acest număr este $N = c_m^n$ şi astfel problema este rezolvată. Problema este clasică şi se găseşte de exemplu în lucrarea [10] (pag.35). Notaţiile au fost adaptate.

Exemplu.

Pentru m=3 şi n=2 avem următorul polinom, în care pentru simplificare considerăm toţi coeficienţii monoamelor egali cu 1.

$P = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$

Numărul de termeni ai polinomului este $N = c_3^2 = C_4^2 = 6$.

Problema 162

Trebuie să demonstrăm că un polinom neomogen cu m nedeterminate şi gradul n are în scrierea canonică cel mult c_{m+1}^{n} termeni.

Partea literală a unui monom al polinomului este de forma: $a_1^{x_1}a_2^{x_2}...a_m^{x_m}$ unde exponenţii x_i sunt numere naturale cu $0 \le x_i \le k$, $i = 1,2,...,m$ şi care verifică pe rând ecuaţiile diofantice liniare: $x_1 + x_2 + ... + x_m = k$, unde k ia valorile 0,1,...,n.

Numărul maxim de termeni al polinomului, în scriere canonică, este egal cu numărul de soluţii ale acestor ecuaţii, cu condiţiile indicate. Dar acest număr este $N = c_m^0 + c_m^1 + ... + c_m^n = c_{m+1}^n$ şi astfel problema este rezolvată. Problema este clasică şi se găseşte de exemplu în lucrarea [10] (pag.36). Notaţiile au fost adaptate.

Exemplu.

Pentru m=3 şi n=2 avem următorul polinom, în care pentru simplificare considerăm toţi coeficienţii monoamelor egali cu 1.

$P = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1 + a_2 + a_3 + 1$

Numărul de termeni ai polinomului este $N = c_4^2 = C_5^2 = 10$.

Problema 163

Trebuie să demonstrăm că un polinom omogen elementar cu m nedeterminate şi gradul n are în scrierea canonică cel mult C_m^n termeni, $n \le m$.

Partea literală a unui monom al polinomului este de forma: $a_1^{x_1}a_2^{x_2}...a_m^{x_m}$ unde exponenţii x_i sunt numere naturale cu $0 \le x_i \le 1$, $i = 1,2,...,m$ şi care verifică ecuaţia diofantică liniară: $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$.

Numărul maxim de termeni al polinomului, în scriere canonică, este egal cu numărul de soluţii ale acestei ecuaţii, cu condiţiile indicate. Dar se ştie că acest număr este $N = C_m^n$ şi astfel problema este rezolvată.

Exemplu.

Pentru m=3 şi n=2 avem următorul polinom, în care pentru simplificare considerăm toţi coeficienţii monoamelor egali cu 1.

$P = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$

Numărul de termeni ai polinomului este $N = C_3^2 = 3$.

Problema 164

Trebuie să demonstrăm că un polinom neomogen elementar cu m nedeterminate şi gradul n are în scrierea canonică cel mult $C_m^0 + C_m^1 + ... + C_m^n$ termeni, $n \le m$.

Partea literală a unui monom al polinomului este de forma: $a_1^{x_1}a_2^{x_2}...a_m^{x_m}$ unde exponenţii x_i sunt numere naturale cu $0 \le x_i \le 1$, $i = 1,2,...,m$ şi care verifică pe rând ecuaţiile diofantice liniare: $x_1 + x_2 + ... + x_m = k$, unde k ia valorile 0,1,...,n.

Numărul maxim de termeni al polinomului, în scriere canonică, este egal cu numărul de soluţii ale acestor ecuaţii, cu condiţiile indicate. Dar acest număr este $N = C_m^0 + C_m^1 + ... + C_m^n$ şi astfel problema este rezolvată.

Exemplu.
Pentru m=3 şi n=2 avem următorul polinom, în care pentru simplificare considerăm toţi coeficienţii monoamelor egali cu 1.
$P = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1 + a_2 + a_3 + 1$
Numărul de termeni ai polinomului este $N = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 = 7$.

Problema 165
Trebuie să demonstrăm formula:
$C^k_{n(k,k,...,k,p)} = c^k_{m-1} + c^{k-1}_{m-1} + c^{k-2}_{m-1} + ... + c^{k-p}_{m-1}$
cu $1 \le p \le k$, folosind consideraţii legate de ecuaţia diofantică liniară ataşată membrului stâng al egalităţii. Considerăm ecuaţia:
$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$
unde $x_1, x_2, ..., x_{m-1}$ iau valorile 0,1,…,k şi x_m ia valorile 0,1,…,p $(p \le k)$.
Numărul soluţiilor acestei ecuaţii se ştie că este $N = C^k_{n(k,k,...,k,p)}$.
Pe de altă parte, dacă x_m ia pe rând valorile 0,1,...p ,numărul soluţiilor ecuaţiei va fi:
$N = c^k_{m-1} + c^{k-1}_{m-1} + c^{k-2}_{m-1} + ... + c^{k-p}_{m-1}$.
Obţinem egalitatea cerută în enunţ.
În cazul particular $p = k$ rezultă egalitatea:
$c^k_m = c^k_{m-1} + c^{k-1}_{m-1} + c^{k-2}_{m-1} + ... + c^1_{m-1} + c^0_{m-1}$
Facem observaţia că formula demonstrată mai sus a fost obţinută pe altă cale, mai exact folosind relaţia de recurenţă pentru combinările generalizate, în articolul "Formule pentru cazuri particulare ale grupărilor generalizate şi ale ecuaţiei diofantice liniare".

Problema 166
Trebuie să demonstrăm formula:
$C^k_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = (l_2 + 1)(l_3 + 1)...(l_m + 1)$
pentru cazul particular când n este număr par, $k = \frac{n}{2}, l_1 = \frac{n}{2}, l_2 + l_3 + ... + l_m = \frac{n}{2}$.
Considerăm ecuaţia:
$x_1 + x_2 + x_3 ... + x_m = k$,
cu $0 \le x_i \le l_i, i = 1,2,...,m$, pentru valorile particulare din problema noastră.
Observăm că x_2 ia valori între $0...l_2$, x_3 ia valori între $0...l_3, \ldots, x_m$ ia valori între $0...l_m$.
De fiecare dată x_1 rezultă bine determinat şi $0 \le x_1 \le \frac{n}{2}$.
Deci, avem: $N = (l_2 + 1)(l_3 + 1)...(l_m + 1)$ (am aplicat regula produsului).

Problemele 167-170
Calculând numărul combinarilor generalizate propuse, se obţin următoarele valori. Putem folosi formula de la problema precedentă.
167. $C^7_{14(7,2,2,2,1)} = 54$
168. $C^8_{16(8,3,2,2,1)} = 72$

169. $C^{9}_{18(9,4,2,2,1)} = 90$

170. $C^{10}_{20(10,5,2,2,1)} = 108$

Problemele 171-176

Pentru a calcula numărul soluţiilor ecuaţiilor diofantice cu coeficienţi unitari, cu condiţiile indicate, folosim una din metodele expuse în acest volum, din care utilizarea programului de calculator EDL-NUMAR este cea mai rapidă.

Calculând numărul soluţiilor ecuaţiilor diofantice cu coeficienţi unitari, cu condiţiile indicate, se obţin următoarele valori.

171. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$, unde :
$0 \le x_1 \le 3, 0 \le x_2 \le 2, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 1$

Se obţine N=14. Mai putem scrie: $N = C^{3}_{8(3,2,2,1)} = 14$.

172. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$, unde :
$0 \le x_1 \le 4, 0 \le x_2 \le 3, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 1$

Se obţine N=20. Mai putem scrie: $N = C^{4}_{10(4,3,2,1)} = 20$.

173. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$, unde :
$0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1, 0 \le x_5 \le 1, 0 \le x_6 \le 1$

Se obţine N=15. Mai putem scrie: $N = C^{2}_{6} = 15$.

174. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3$, unde :
$0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1, 0 \le x_5 \le 1, 0 \le x_6 \le 1$

Se obţine N=20. Mai putem scrie: $N = C^{3}_{6} = 20$.

175. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$, unde :
$0 \le x_1 \le 3, 0 \le x_2 \le 3, 0 \le x_3 \le 3, 0 \le x_4 \le 3$

Se obţine N=20. Mai putem scrie: $N = c^{3}_{4} = 20$.

176. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$, unde :
$0 \le x_1 \le 4, 0 \le x_2 \le 4, 0 \le x_3 \le 4, 0 \le x_4 \le 4$

Se obţine N=35. Mai putem scrie: $N = c^{4}_{4} = 35$.

Problemele 177-184

Pentru a calcula numărul soluţiilor ecuaţiilor diofantice cu coeficienţi unitari, cu condiţiile indicate, folosim una din metodele expuse în acest volum, din care utilizarea programului de calculator EDL-NUMAR-LIM.INF. este cea mai rapidă.

Calculând numărul soluţiilor ecuaţiilor diofantice cu coeficienţi unitari, cu condiţiile indicate, se obţin următoarele valori.

177. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, unde :
$2 \le x_1 \le 5, 2 \le x_2 \le 4, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 2$

Se obţine N=14. Mai putem scrie: $N = C^{3}_{8(3,2,2,1)} = 14$.

178. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, unde :
$2 \le x_1 \le 6, 2 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 4, 1 \le x_4 \le 3$

Se obţine N=29. Mai putem scrie: $N = C^4_{12(4,3,3,2)} = 29$.

179. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, unde :
$1 \le x_1 \le 5, 1 \le x_2 \le 4, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 2$

Se obţine N=22. Mai putem scrie: $N = \overline{C}^9_{14(5,4,3,2)} = 22$.

180. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, unde :
$1 \le x_1 \le 6, 1 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 4, 1 \le x_4 \le 3$

Se obţine N=49. Mai putem scrie: $N = \overline{C}^{10}_{18(6,5,4,3)} = 49$.

181. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, unde :
$2 \le x_1 \le 5, 2 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 4, 1 \le x_4 \le 4$

Se obţine N=20. Mai putem scrie: $N = c^3_4 = 20$.

182. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, unde :
$2 \le x_1 \le 6, 2 \le x_2 \le 6, 1 \le x_3 \le 5, 1 \le x_4 \le 5$

Se obţine N=35. Mai putem scrie: $N = c^4_4 = 35$.

183. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, unde :
$1 \le x_1 \le 6, 1 \le x_2 \le 6, 1 \le x_3 \le 6, 1 \le x_4 \le 6$

Se obţine N=56. Mai putem scrie: $N = \overline{c}^9_4 = 56$.

184. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, unde :
$1 \le x_1 \le 7, 1 \le x_2 \le 7, 1 \le x_3 \le 7, 1 \le x_4 \le 7$

Se obţine N=84. Mai putem scrie: $N = \overline{c}^{10}_4 = 84$.

Problemele 185-190

Pentru a calcula numărul soluţiilor ecuaţiilor diofantice cu coeficienţi naturali, cu condiţiile indicate, folosim una din metodele expuse în acest volum, din care utilizarea programului de calculator EDL-NUMAR este cea mai rapidă.

Calculând numărul soluţiilor ecuaţiilor diofantice cu coeficienţi naturali, cu condiţiile indicate, se obţin următoarele valori.

185. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 8$, unde :
$0 \le x_1 \le 5, 0 \le x_2 \le 3, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 2$

Se obţine N=14.

186. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$, unde :
$0 \le x_1 \le 6, 0 \le x_2 \le 5, 0 \le x_3 \le 4, 0 \le x_4 \le 3$

Se obţine N=21.

187. $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 4$, unde :
$0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1, 0 \le x_5 \le 1, 0 \le x_6 \le 1$

Se obţine N=12.

188. $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 5$, unde :
$0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1, 0 \le x_5 \le 1, 0 \le x_6 \le 1$

Se obţine N=12.

189. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 8$, unde :
$0 \le x_1 \le 8, 0 \le x_2 \le 4, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 2$

Se obţine N=17.

190. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$, unde :
$0 \le x_1 \le 9, 0 \le x_2 \le 4, 0 \le x_3 \le 3, 0 \le x_4 \le 3$

Se obţine N=23.

Problemele 191-198

Pentru a calcula numărul soluţiilor ecuaţiilor diofantice cu coeficienţi naturali, cu condiţiile indicate, folosim una din metodele expuse în acest volum, din care utilizarea programului de calculator EDL-NUMAR-LIM.INF. este cea mai rapidă.

Calculând numărul soluţiilor ecuaţiilor diofantice cu coeficienţi naturali, cu condiţiile indicate, se obţin următoarele valori.

191. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20$, unde :
$2 \le x_1 \le 7, 2 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 3$

Se obţine N=14.

192. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 24$, unde :
$2 \le x_1 \le 7, 2 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 4, 1 \le x_4 \le 3$

Se obţine N=21.

193. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20$, unde :
$1 \le x_1 \le 7, 1 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 3$

Se obţine N=23.

194. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 24$, unde :
$1 \le x_1 \le 7, 1 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 4, 1 \le x_4 \le 3$

Se obţine N=30.

195. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20$, unde :
$2 \le x_1 \le 10, 2 \le x_2 \le 6, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 3$

Se obţine N=17.

196. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 24$, unde :
$2 \le x_1 \le 14, 2 \le x_2 \le 8, 1 \le x_3 \le 5, 1 \le x_4 \le 5$

Se obţine N=42.

197. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20$, unde :
$1 \le x_1 \le 10, 1 \le x_2 \le 6, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 3$

Se obţine N=28.

198. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 24$, unde :
$1 \le x_1 \le 14, 1 \le x_2 \le 8, 1 \le x_3 \le 5, 1 \le x_4 \le 5$

Se obţine N=66.

Problemele 199-201

Lista soluţiilor ecuaţiilor diofantice cu coeficienţi unitari, cu condiţiile indicate, se poate obţine cu ajutorul programului de calculator EDL-LISTA.

199. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$, unde :
$0 \le x_1 \le 3, 0 \le x_2 \le 2, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 1$

Lista soluţiilor ecuaţiei este redată în continuare.

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	2	1
0	1	1	1
0	1	2	0
0	2	0	1
0	2	1	0
1	0	1	1
1	0	2	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	2	0	0
2	0	0	1
2	0	1	0
2	1	0	0
3	0	0	0

200. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$, unde :
$0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1, 0 \le x_5 \le 1, 0 \le x_6 \le 1$

Lista soluţiilor ecuaţiei se obţine asemănător.

201. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$, unde :
$0 \le x_1 \le 3, 0 \le x_2 \le 3, 0 \le x_3 \le 3, 0 \le x_4 \le 3$

Lista soluţiilor ecuaţiei se obţine asemănător.

Problemele 202-205

Lista soluţiilor ecuaţiilor diofantice cu coeficienţi unitari, cu condiţiile indicate, se poate obţine cu ajutorul programului de calculator EDL-LISTA-LIM.INF.

202. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, unde :
$2 \le x_1 \le 5, 2 \le x_2 \le 4, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 2$

Lista soluţiilor ecuaţiei este redată în continuare.

x_1	x_2	x_3	x_4
2	2	3	2
2	3	2	2
2	3	3	1
2	4	1	2
2	4	2	1

3	2	2	2
3	2	3	1
3	3	1	2
3	3	2	1
3	4	1	1
4	2	1	2
4	2	2	1
4	3	1	1
5	2	1	1

203. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, unde :
$1 \le x_1 \le 5, 1 \le x_2 \le 4, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 2$

Lista soluţiilor ecuaţiei se obţine asemănător.

204. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, unde :
$2 \le x_1 \le 5, 2 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 4, 1 \le x_4 \le 4$

Lista soluţiilor ecuaţiei se obţine asemănător.

205. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, unde :
$1 \le x_1 \le 6, 1 \le x_2 \le 6, 1 \le x_3 \le 6, 1 \le x_4 \le 6$

Lista soluţiilor ecuaţiei se obţine asemănător.

Problemele 206-208

Lista soluţiilor ecuaţiilor diofantice cu coeficienţi naturali, cu condiţiile indicate, se poate obţine cu ajutorul programului de calculator EDL-LISTA.

206. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 8$, unde :
$0 \le x_1 \le 5, 0 \le x_2 \le 3, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 2$

Lista soluţiilor ecuaţiei este redată în continuare.

x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	0	2
0	1	1	1
0	1	2	0
1	2	0	1
1	2	1	0
2	0	0	2
2	0	1	1
2	0	2	0
2	3	0	0
3	1	0	1
3	1	1	0
4	2	0	0
5	0	0	1
5	0	1	0

207. $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 4$, unde :
$0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1, 0 \le x_5 \le 1, 0 \le x_6 \le 1$

Lista soluţiilor ecuaţiei se obţine asemănător.

208. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 8$, unde :
$0 \le x_1 \le 8, 0 \le x_2 \le 4, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 2$

Lista soluţiilor ecuaţiei se obţine asemănător.

Problemele 209-212

Lista soluţiilor ecuaţiilor diofantice cu coeficienţi naturali, cu condiţiile indicate, se poate obţine cu ajutorul programului de calculator EDL-LISTA-LIM.INF.

209. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20$, unde :
$2 \le x_1 \le 7, 2 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 3$

x_1	x_2	x_3	x_4
2	3	1	3
2	3	2	2
2	3	3	1
3	4	1	2
3	4	2	1
4	2	1	3
4	2	2	2
4	2	3	1
4	5	1	1
5	3	1	2
5	3	2	1
6	4	1	1
7	2	1	2
7	2	2	1

210. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20$, unde :
$1 \le x_1 \le 7, 1 \le x_2 \le 5, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 3$

Lista soluţiilor ecuaţiei se obţine asemănător.

211. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20$, unde :
$2 \le x_1 \le 10, 2 \le x_2 \le 6, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 3$

Lista soluţiilor ecuaţiei se obţine asemănător.

212. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20$, unde :
$1 \le x_1 \le 10, 1 \le x_2 \le 6, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 3$

Lista soluţiilor ecuaţiei se obţine asemănător.

Problemele 213-216

Calculând numărul soluţiilor ecuaţiilor diofantice cu coeficienţi naturali, folosind metoda funcţiei generatoare, se obţin următoarele valori.

213. $x_1 + x_2 + 3x_3 = 10$

Se obţine N=26.

214. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20$

Se obţine N=44.

215. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 20$

Se obţine N=91.

216. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20$

Se obţine N=108.

Problema 217

Trebuie să demonstrăm relaţia:

$$G_{k+2(2,1,1,\ldots,1)}^{k+2(2,1,1,\ldots,1)} = \frac{1}{4}(k^2 + 3k + 4)k!$$

unde numărul indicilor unitari inferiori cât şi superiori este egal cu k.

Putem scrie:

$$G_{k+2(2,1,1,\ldots,1)}^{k+2(2,1,1,\ldots,1)} = G_{k+2(2,1,1,\ldots,1)}^{k(1,1,\ldots,1)} = A_{k+2(2,1,1,\ldots,1)}^{k} = A_{k(1,1,\ldots,1)}^{k} + C_k^1 A_{k(1,1,\ldots,1)}^{k-1} + C_k^2 A_{k(1,1,\ldots,1)}^{k-2} =$$

$$= A_k^k + C_k^1 A_k^{k-1} + C_k^2 A_k^{k-2} = \frac{1}{4}(k^2 + 3k + 4)k!$$

şi astfel relaţia este demonstrată. Problema se găseşte în lucrarea [11] (capitolul 8). Notaţiile au fost adaptate.

Problema 218

Considerând mulţimea multiplă a carţilor, fiecare submulţime multiplă ordonată cu n elemente a mulţimii carţilor defineşte o atribuire de premii. Prin urmare, numărul de moduri în care se poate face atribuirea premiilor va fi:

$$N = A_{3n+1(n,1,1,\ldots,1)}^{n}.$$

Folosind formula cunoscută pentru acest caz particular al aranjamentelor generalizate, putem scrie:

$$N = A_{2n+1}^{n} + C_n^1 A_{2n+1}^{n-1} + C_n^2 A_{2n+1}^{n-2} + \ldots + C_n^n A_{2n+1}^{0}.$$

Mai concentrat, putem scrie:

$$N = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A_{2n+1}^{n-k}.$$

De exemplu, pentru n=1 se obţine N=4, pentru n=2 se obţine N=31, pentru n=3 se obţine N=358. Problema se găseşte în lucrarea [7]. Notaţiile au fost adaptate.

Problemele 219-222

Calculând numărul aranjamentelor generalizate propuse, se obţin următoarele valori.Se pot folosi formulele de calcul prezentate în articolul “Formule pentru cazuri particulare ale grupărilor generalizate şi ale ecuaţiei diofantice liniare”.

219. $A_{10(5,1,1,1,1,1)}^{6} = 4050$

220. $A_{11(6,1,1,1,1,1)}^{6} = 4051$

221. $A_{13(3,3,3,3,1)}^{3} = 112$

222. $A_{14(3,3,3,3,2)}^{3} = 124$

Problemele 223-226

Calculând numărul combinărilor generalizate propuse, se obţin următoarele valori. Se pot folosi formulele de calcul prezentate în articolul “Formule pentru cazuri particulare ale grupărilor generalizate şi ale ecuaţiei diofantice liniare”.

223. $C^{3}_{7(3,1,1,1,1)} = 15$

224. $C^{4}_{8(4,1,1,1,1)} = 16$

225. $C^{2}_{9(2,2,2,2,1)} = 14$

226. $C^{3}_{13(3,3,3,3,1)} = 30$

Problemele 227-230

Calculând numărul combinărilor generalizate propuse, folosind principiul includerii şi al excluderii, se obţin următoarele valori.

227. $C^{3}_{7(3,3,1)} = 7$

228. $C^{3}_{8(3,3,2)} = 9$

229. $C^{4}_{9(4,2,2,1)} = 17$

230. $C^{5}_{10(3,3,2,1,1)} = 38$

Problemele 231-234

Calculând numărul combinărilor generalizate propuse, folosind formula specifică cazului particular în care partiţia lui n este în părţi egale, se obţin următoarele valori.

231. $C^{4}_{10(2,2,2,2,2)} = 45$

232. $C^{5}_{12(3,3,3,3)} = 40$

233. $C^{6}_{15(3,3,3,3,3)} = 135$

234. $C^{7}_{20(4,4,4,4,4)} = 255$

Problemele 235-240

Calculând numărul soluţiilor ecuaţiilor diofantice liniare propuse, folosind formule analitice specifice cazului particular respectiv, se obţin următoarele valori.

235. $x + 2y + 3z = 20$

Se obţine N=44.

236. $x + 2y + 3z + 5t = 20$

Se obţine N=91.

237. $x + 2y + 3z + 4t = 24$

Se obţine N=169.

238. $x + 2y + 3z + 7t = 28$

Se obţine N=161.

239. $x + 3y + 5z + 7t = 40$

Se obţine N=174.

240. $x + 2y + 3z + 4t + 5u = 20$

Se obţine N=192.

Problemele 241-243

Determinând prin metoda grafică numărul combinărilor generalizate propuse, se obţin următoarele valori.

241. $C^{13}_{27(11,9,7)} = 71$

242. $C^{14}_{28(12,9,7)} = 74$

243. $C^{15}_{30(12,10,8)} = 87$

Problemele 244-246

Determinând prin metoda grafică numărul soluţiilor ecuaţiilor diofantice cu condiţiile indicate, se obţin următoarele valori.

244. $x_1 + x_2 + x_3 = 13$, cu condiţiile: $2 \le x_1 \le 11, 1 \le x_2 \le 9, 1 \le x_3 \le 7$

Se obţine N=48.

245. $x_1 + x_2 + x_3 = 14$, cu condiţiile: $2 \le x_1 \le 12, 2 \le x_2 \le 9, 1 \le x_3 \le 7$

Se obţine N=46.

246. $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, cu condiţiile: $3 \le x_1 \le 12, 2 \le x_2 \le 10, 1 \le x_3 \le 8$

Se obţine N=51.

Problemele 247-249

Determinând prin metoda grafică numărul soluţiilor ecuaţiilor diofantice cu condiţiile indicate, se obţin următoarele valori.

247. $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 26$, cu condiţiile: $0 \le x_1 \le 20, 0 \le x_2 \le 11, 0 \le x_3 \le 6$

Se obţine N=68.

248. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24$, cu condiţiile: $0 \le x_1 \le 18, 0 \le x_2 \le 11, 0 \le x_3 \le 6$

Se obţine N=52.

249. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30$, cu condiţiile: $0 \le x_1 \le 24, 0 \le x_2 \le 10, 0 \le x_3 \le 5$

Se obţine N=57.

Problemele 250-252

Determinând prin metoda grafică numărul soluţiilor ecuaţiilor diofantice cu condiţiile indicate, se obţin următoarele valori.

250. $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 26$, cu condiţiile: $4 \le x_1 \le 20, 2 \le x_2 \le 11, 1 \le x_3 \le 6$

Se obţine N=39.

251. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24$, cu condiţiile: $6 \le x_1 \le 18, 2 \le x_2 \le 11, 1 \le x_3 \le 6$

Se obţine N=16.

252. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30$, cu condiţiile: $6 \le x_1 \le 24, 2 \le x_2 \le 10, 2 \le x_3 \le 5$

Se obţine N=22.

Problema 253

Considerăm ecuaţia diofantică liniară:

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k$

unde coeficienţii $a_1, a_2, ..., a_m$ sunt numere naturale strict pozitive iar k este număr natural.

Pentru a arăta că numărul soluţiilor cu numere naturale ale acestei ecuaţii este finit, să notăm

$l_i = \left[\frac{k}{a_i}\right]$, i=1,2,…,m limitările naturale (maxim posibile) ale necunoscutelor ecuaţiei.Notând cu N numărul soluţiilor ecuaţiei, observăm că avem inegalitatea: $N < (l_1+1)(l_2+1)...(l_m+1)$. De aici rezultă că numărul N al soluţiilor ecuaţiei este finit. Problema se găseşte în lucrarea [5]. Notaţiile au fost adaptate.

Problema 254

În problemă se consideră X şi Y două mulţimi finite cu k, respectiv m elemente, $k \geq m$. Dacă $c_{k,m}$ desemnează numărul funcţiilor crescătoare de la X la Y iar $\bar{c}_{k,i}$ desemnează numărul aplicaţiilor surjective crescătoare de la X la o submulţime cu i elemente a lui Y, trebuie să stabilim egalitatea:

$$c_{k,m} = \sum_{i=1}^{m} C_m^i \bar{c}_{k,i} .$$

Pentru aceasta, observăm că numărul de surjecţii crescătoare care au ca imagine o submulţime cu i elemente din Y este: $C_m^i \bar{c}_{k,i}$. Numărul funcţiilor crescătoare de la X la Y va fi dat de suma acestor numere, pentru i=1,2,…,m. Egalitatea cerută în problemă este astfel demonstrată.

Observaţii.

a) Egalitatea se mai poate scrie, folosind noţiunile de combinări cu repetiţie şi combinări barate cu repetiţie, în felul următor:

$$c_m^k = \sum_{i=1}^{m} C_m^i \bar{c}_i^k .$$

b) Relaţia se mai poate demonstra folosind formula:

$$\bar{c}_m^k = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i c_i^k$$

şi formulele de inversiune binomiale (a se vedea I.Tomescu, [14]).

Problema 255

În problemă se cere să se demonstreze relaţia:

$$g_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_{i=1}^{m} C_m^i \bar{g}_i^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} , \; k \geq m .$$

Relaţia se poate demonstra folosind formula:

$$\bar{g}_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i g_i^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$$

şi formulele de inversiune binomiale (a se vedea I.Tomescu, [14]).

Problema 256

Pentru cazurile particulare k=m şi k=n, numărul aranjamentelor barate generalizate se determină cu ajutorul formulelor propuse în problemă, care rezultă imediat din definiţie:

a) $\bar{A}^m_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = m!$

b) $\bar{A}^n_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \frac{n!}{l_1!l_2!...l_m!}$.

Problema 257

Pentru cazurile particulare k=m şi k=n, numărul combinărilor barate generalizate se determină cu ajutorul formulelor propuse în problemă, care rezultă imediat din definiţie:

a) $\overline{C}^{m}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = 1$

b) $\overline{C}^{n}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = 1$.

Problema 258

În problemă se cere să se demonstreze formula combinărilor barate generalizate complementare:

$\overline{C}^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \overline{C}^{n-k+m}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$.

Pentru demonstraţie folosim exprimarea combinărilor barate generalizate cu ajutorul combinărilor generalizate:

$\overline{C}^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = C^{k-m}_{n-m(l_1-1,l_2-1,...,l_m-1)}$

$\overline{C}^{n-k+m}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = C^{n-k}_{n-m(l_1-1,l_2-1,...,l_m-1)}$

şi folosind proprietatea de complementaritate pentru combinările generalizate, problema este rezolvată.

Problema 259

În problemă se cere să se demonstreze formula combinărilor barate cu repetiţie complementare:

$\overline{c}^{k}_{m} = \overline{c}^{k}_{k-m+1}$.

Pentru demonstraţie folosim exprimarea combinărilor barate cu repetiţie cu ajutorul combinărilor simple:

$\overline{c}^{k}_{m} = C^{m-1}_{k-1}$

$\overline{c}^{k}_{k-m+1} = C^{k-m}_{k-1}$

şi folosind proprietatea de complementaritate pentru combinările simple, problema este rezolvată.

Problema 260

În problemă se cere să se demonstreze formula combinărilor cu repetiţie complementare:

$c^{k}_{m} = c^{m-1}_{k+1}$.

Pentru demonstraţie folosim exprimarea combinărilor cu repetiţie cu ajutorul combinărilor simple:

$c^{k}_{m} = C^{k}_{m+k-1}$

$c^{m-1}_{k+1} = C^{m-1}_{m+k-1}$

şi folosind proprietatea de complementaritate pentru combinările simple, problema este rezolvată.

Problema 261

Formula rezultă imediat, din definiţie. Dacă şi $l_2 > k - m + 1$, putem reduce în continuare ordinul,etc.

INDEX BIBLIOGRAFIC PROBLEME

[1] A.Dragomir, V.Laziun, *Teorie combinatorie.Elemente de combinatorică clasică şi generalizată*, Editura Universităţii din Timişoara, Timişoara, 1974

[2] D.Fadeev, I.Sominski, *Culegere de exerciţii de algebră superioară (în limba franceză)*, Editura Mir, Moscova, 1980

[3] Gazeta Matematică, Nr.6/1966, *Problema 7590*, autorul problemei: ***, Problemă prezentată la Olimpiada Internaţională de Matematică din 1965 de R.S.F.Jugoslavia

[4] Gazeta Matematică, Nr.6/1980, *Problema 18302**, autorul problemei: Cornel Gruian

[5] Gazeta Matematică, Nr.7/1980, *Problema E:6919*, autorul problemei: Florentin Smarandache

[6] Gazeta Matematică, Nr.7/1981, *Problema O:236*, autorul problemei: Ioan Tomescu, Problemă pregătitoare pentru Olimpiada Internaţională de Matematică

[7] Gazeta Matematică, Nr.9/1981, *Problema 5*, autorul problemei: ***, Problemă dată lotului olimpic la Barajul 4, în vederea alcătuirii echipei române care a participat la Olimpiada Internaţională de Matematică din SUA, 1981

[8] Gazeta Matematică, Nr.12/1983, *Problema 2, punctul b*, Proba de tehnică, 2 sep.1983, autorul problemei: ***, Problemă dată la Concursul anual al rezolvitorilor Gazetei Matematice, Ediţia a IV-a, Câmpulung Muscel, 26 august-5 septembrie 1983

[9] I.Iliescu, B.Ionescu, D.Radu, *Probleme de matematică pentru admiterea în învăţământul superior*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976

[10] I.D.Ion, C.Niţă, C.Năstăsescu, *Complemente de algebră*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1984

[11] I.Niven, *Mathematics of choice.How to count without counting*, The Mathematical Association of America, 1965

[12] D.Popescu, G.Oboroceanu, *Exerciţii şi probleme de algebră, combinatorică şi teoria numerelor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucuresti, 1979

[13] N.Teodorescu (coordonator), *Probleme din Gazeta Matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1984

[14] I.Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[15] I.Tomescu, *Introduction to combinatorics*, Collet's (Publishers) Ltd, London and Wellingborough, 1975

[16] I.Tomescu, *Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

APLICAŢII ÎN ELECTROTEHNICĂ

A Mathematical Model for Unbalanced Classes Analysis of Polyphasic Loads

Vasile Mircea POPA

Abstract: The paper proposes a new method for calculating the number of equivalence classes for discreet unbalanced loads. The determination of this number is a combinatorial problem of distributing n objects (μ classes of objects where the class j contains λ_j identical objects, so that $\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j = n$) in m cells of capacity l_i, having $\sum_{i=1}^{m} l_i = n$.

1. Introduction

Consider a polyphasic unbalanced load and equivalent scheme in star connection (fig.1).

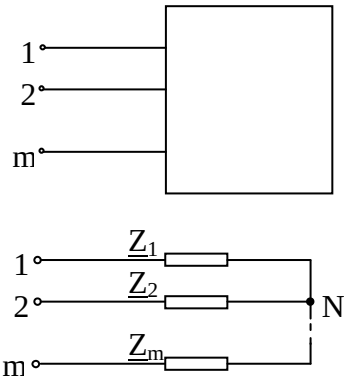


Fig.1

The phase i of load requires a number l_i from the elementary impedances (i=1,2,…,m) (fig.2).

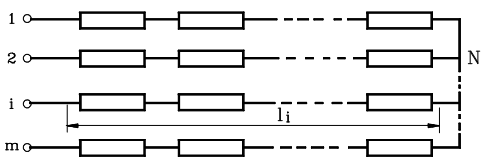


Fig.2

We have μ impedance classes, where the class j contains λ_j identical impedances $(j = 1,2,...,\mu)$.

Supposing that:

$$\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j = \sum_{i=1}^{m} l_i = n \qquad (1)$$

the number of polyphasic load unbalanced classes is finite.

If we note this number:

$$N = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} \qquad (2)$$

we can use for his calculation an original algorithm we are going to present below.

2. Original algorithm

I propose the following algorithm [3].

a) We solve the polynomial:

$$P = P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} ... P_{\lambda_\mu} \qquad (3)$$

where:

$$P_{\lambda_j} = P_{\lambda_j}\left(x_1, x_2, ..., x_{\lambda_j}\right)$$

is a Newton type polynomial of degree λ_j in λ_j variables [1].

$$P = P\left(x_1, x_2, ..., x_\lambda\right) \qquad (4)$$

will have a:

$$\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j = n$$

degree and λ variables, where:

$$\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu).$$

b) We replace in P:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 + ... + y_m \\ x_2 &= y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2 \\ &M \\ x_\lambda &= y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda \end{aligned} \qquad (5)$$

c) With the help of the multinominal theorem we calculate the coefficient of the single term $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ of the expansion of P, which will be the number we are looking for.

The general polynomial of Newton type has the form:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+...+nk_n=n \\ k_1, k_2, ..., k_n \geq 0}} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! ... n^{k_n} k_n!}. \qquad (6)$$

Applying the above mentioned general formula we can easily obtain the first Newton type polynomials:

$$P_1 = x_1$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right)$$

$$P_3 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1 x_2 + 2x_3\right)$$

$$P_4 = \frac{1}{24}\left(x_1^4 + 6x_1^2 x_2 + 8x_1 x_3 + 3x_2^2 + 6x_4\right)$$

The algorithm that we displayed before coincides with the Pólya – de Brujin enumeration method used in our problem case [2].

We can also remark that the number N represents also the number of matrices with μ rows and m columns, made of natural numbers, where the sum of the rows and columns are given:

n	l_1	l_2	Λ	l_m
λ_1	x_{11}	x_{12}	Λ	x_{1m}
λ_2	x_{21}	x_{22}	Λ	x_{2m}
M	M	M		M
λ_μ	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	Λ	$x_{\mu m}$

(7)

The algorithm was programmed on the electronic computer.

3. Conclusions

This paper presents a mathematical model for polyphasic loads unbalances classes analysis. The number N represents also the number of solutions for the system of equations:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ji} = \lambda_j; \quad \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i; \quad \lambda_j, l_i > 0; \quad x_{ji} \geq 0$$

The numbers x_{ji} are natural numbers and the numbers λ_j, l_i are strictly positive natural numbers. The system has μm unknowns (because of the equilibrium conditions (1)).

As an application we propose to the reader to check up by calculation the equalities:

$$G_{8(2,2,1,1,1,1,1)}^{8(2,2,2,1,1)} = 1548$$

$$G_{8(2,2,1,1,1,1,1)}^{9(3,2,2,1,1)} = 4900$$

and to formulate the according problems complying with the count of solutions both for the before system and for the matrices (7).

4. References:

[1] D. E. Knuth – *The Art of Computer Programming*, vol.1, *Fundamentals Algorithms*, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1973

[2] I. Tomescu – *Introduction to Combinatorics*, Collet's (Publishers) Limited, London and Wellingborough, England, 1975

[3] V. M. Popa – *On a Question of Linear Programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol.X, Sibiu, Romania, 1993

The Algebraic Characterisation of Discreet Unbalanced Loads

Vasile Mircea Popa

Abstract: The paper proposes an algebraic characterisation for unbalanced discreet loads. The algebraic model is the bijection between two finite multiple sets. The number of unbalanced discreet loads is the number of equivalence classes for equivalence relation defined onto bijection set.

Key words: m-phased load, discreet unbalanced loads, algebraic characterisation for discreet unbalanced loads

1. Introduction

We are considering an m-phased unbalanced load and the equivalent scheme in star connection. We assume that the phases are distinct between them (discernible). If the impedances from the m phases are made up (in a series) of elementary impedances (physical elements), we call the m-phased load discreet unbalanced load (DUL). [3],[4]. We assume that we have n elementary impedances, namely μ classes of different elementary impedances, the j class containing λ_j identical impedances, thus:

$$\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j = n\,. \qquad (1)$$

The m distinct phases of the load with a star connection, contain l_i elementary impedances each, with:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = n\,. \qquad (2)$$

The scheme of such a discreet unbalanced load is given in fig 1.

We call such a discreet unbalanced load of the $n(l_1,l_2,\ldots,l_m;\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)$ type.

We are to imply next that the discreet unbalanced loads (DUL), which we are to consider, do belong to this type.

At the transfer of some elementary impedances from a phase to another we obtain different unbalances loads, which introduce different types of lack of balance into the network where they belong.

Particularly, some of these loads can be balanced but they can be considered as limit cases of unbalanced loads [3].

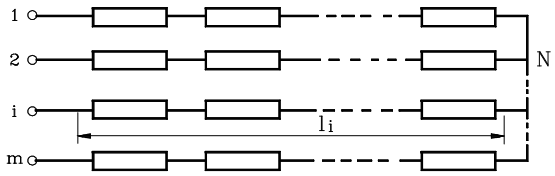


Figure 1.

A question that is raised immediately is determined by the number of possible unbalanced, in other words, the number of the discreet unbalanced load. The number of the discreet unbalanced loads, which may exist, is finite and we note it:

$$N = N(DUL) = G_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)}\,. \qquad (3)$$

By the N=N(DUL) number calculation we use methods from the discreet mathematics, to be more exactly, from the combinatorics. [1], [2], [3].

2. The algebraic model for RDD

The algebraic model for the discreet unbalanced load is the bijection between two multiple sets [3],[4]. We take into consideration two finite sets X and Y, having the same number of elements: $|X|=|Y|=n$, as well as the set of bijections $f : X\rightarrow Y$, that we note as Y^X . Let us assume an equivalence relation (ρ_1) defined on the set X, which determines a partition of the set X, where μ equivalence classes X_j containing each λ_j elements, that is

$|X_j|=\lambda_j$, (j=1,2…μ). The elements of an equivalence class will be called equivalent or identical. In the same way, we consider an equivalent relation (ρ_2) defined on the set Y, which determines a partition of the set Y in m classes of equivalence, Y_i containing each l_i elements, namely $|Y_i| = l_i$ (i=1,2…m). In this way, the sets X and Y become multiple sets, namely sets where the elements may repeat. Using this terminology, we may say that the set X contains μ distinct elements, the j element repeating λ_j times (j=1,2…μ). Likewise, for the set Y.

Now we are to consider a permutations group G of the set X that is the simple (or direct) product of the symmetrical groups of permutations for the equivalence classes elements from X [1], [2], [3].

This group is noted as: $G = S_{\lambda_1} \cdot S_{\lambda_2} \cdot ... \cdot S_{\lambda_\mu}$ and it is defined the following way: for any $\alpha \in G$, $\alpha_j \in S_{\lambda_j}$, $x \in X_j$, we have:

$$\alpha(x) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j, ..., \alpha_\mu)(x) = \alpha_j(x) \qquad (4)$$
$$(j = 1,2,...,\mu)$$

The defition is consistent. Due to the fact that G is a finite subset of S_n, in order that G may be a permutation group of the set X (a sub-group of the symmetric group S_n) it is sufficient for us to check that for any $\alpha, \alpha' \in G \Rightarrow \alpha\alpha' \in G$ (we noted $\alpha\alpha'$ the α and α' permutation composition). Let $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_j, ..., \alpha_\mu)$ and $\alpha' = (\alpha_1', ..., \alpha_j', ..., \alpha_\mu')$ be. For any $x \in X_j$, we get after the definition:

$$\alpha\alpha'(x) = \alpha(\alpha'(x)) = \alpha(\alpha_j'(x)) = \alpha_j(\alpha_j'(x)) = \alpha_j\alpha_j'(x)$$

We thus obtain:

$\alpha\alpha' = (\alpha_1\alpha_1', \alpha_2\alpha_2', ..., \alpha_j\alpha_j', ..., \alpha_\mu\alpha_\mu')$ and we can observe that $\alpha\alpha' \in G$.

Therefore G is a permutation group of the X set. We used the finite subgroups characterisation theorem [1],[2]. Thus, through this permutation group, any X element of the X set is changed into an element that belongs to the same equivalence class as X.

Analogously, we also consider the H permutation group of the Y set:

$$H = S_{l_1} \cdot S_{l_2} \cdot ... \cdot S_{l_m}.$$

For any $\beta \in H$, $\beta_i \in S_{l_i}$, $y \in Y_i$, we have:

$$\beta(y) = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_i, ..., \beta_m)(y) = \beta_i(y) \qquad (5)$$
$$(i = 1,2,..., m)$$

That is, through the permutation of this group, any y element of the Y set is changed into an element that belong to the same equivalence class as y.

There can be defined an equivalence relation (ρ) on the Y^x set, as follows: $f_1 \sim f_2$ if $\alpha \in G$ and $\beta \in H$ exist, so that $f_2 = \beta f_1 \alpha$. We demonstrate that the relation defined like this is an equivalence relation on the bijections set f: X→Y, in ratio with the G and H permutation groups.

The relation is reflexive: $f \sim f$, because $f = \varepsilon_2 f \varepsilon_1$, where $\varepsilon_1 \in G$ and $\varepsilon_2 \in H$ are identical permutations from the two permutation groups. The relation is symmetrical: $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1$. It is true that $f_2 = \beta f_1 \alpha$ leads to $f_1 = \beta^{-1} f_2 \alpha^{-1}$, where $\alpha^{-1} \in G$ and $\beta^{-1} \in H$, fact that proves the assertion. The relation is transitive: $f_1 \sim f_2$ and $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3$. That is, from $f_2 = \beta f_1 \alpha$ and $f_3 = \beta' f_2 \alpha'$ it results $f_3 = \beta'\beta f_1 \alpha\alpha' = \beta'' f_1 \alpha''$, where: $\beta'\beta = \beta'' \in H$ and $\alpha\alpha' = \alpha'' \in G$.

The relation (ρ) of equivalence determines a partition of the Y^x set into classes of equivalence. The number of these classes of equivalence is noted in the following way:

$$\left|Y^x / \rho\right| = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}. \qquad (6)$$

We notice that the setting forth of this problem is equivalent to the problem to define the discreet unbalanced load (DUL).

We take into consideration n elementary impedance (μ impedance classes, the j class containing λ_j identical impedances, as $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n$) and m phases, the i phase receiving l_i elementary inseried impedances, with $\sum_{i=1}^{m} l_i = n$.

The n impedances are distributed in the m phases. The number of possible distribution is:

$$N = N(DUL) = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}. \qquad (7)$$

3. Conclusions

Therefore, the mathematical model for the discreet unbalanced load is the bijection between two multiple sets and the counting of the discreet unbalanced loads (DUL) is reduced to the bijections between two multiple sets counting [4].

We also note that the defined relation for the lack of balance on the discreet loads set is an equivalence relation and the classes with lack of balance are corresponding equivalence classes.

The author of this paper has elaborated four methods for the calculation of the N (DUL) number [3].

Bibliography

[1] C. Năstăsescu , C. Niţă , C. Vraciu – *Bazele algebrei*, vol. I , Editura Academiei, Bucureşti, 1986.

[2] D. Popescu , C. Vraciu – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986 .

[3] V. M. Popa – *Aplicaţii şi încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifazate în regimuri nesimetrice*, Referat de doctorat nr. 2, Universitatea Tehnica Cluj - Napoca, Facultatea de Electrotehnică Cluj - Napoca, 1994 .

[4] V.M. Popa – *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 38, nr. 1, 1995 .

Methods for Calculating the Number of Discreet Unbalanced Loads

Vasile Mircea Popa

Abstract: This paper presents a method for unbalanced discreet loads number calculation. Four methods are presented and the enumeration method is also detailed. The respective algorithm was programmed on the electronic computer.

Key words: m-phased loads, discreet unbalanced loads, methods for discreet unbalanced loads number calculation, enumeration method.

1. Introduction

The m- phased discreet unbalanced load of the $n(l_1,l_{2,\dots},l_m;\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)$ type has been defined in some previous papers [2], [3].

We are considering an m-phased unbalanced load and the equivalent scheme in star connection. We assume that the phases are distinct between them (discernible). If the impedances from the m phases are made up (in a series) of elementary impedances (physical elements), we call the m-phased load discreet unbalanced load (DUL). [2]. We assume that we have n elementary impedances, namely μ classes of different elementary impedances, the j class containing λ_j identical impedances, thus:

$$\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j = n .$$

The m distinct phases of the load with a star connection, contain l_i elementary impedances each, with:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = n .$$

The scheme of such a discreet unbalanced load is given in fig 1.

We call such a discreet unbalanced load of the $n(l_1,l_2,\dots,l_m;\lambda_1,\lambda_2\dots\lambda_\mu)$ type.

We are to imply next that the discreet unbalanced loads (DUL), which we are to consider, do belong to this type.

At the transfer of some elementary impedances from a phase to another we obtain different unbalances loads, which introduce different types of lack of balance into the network where they belong.Particularly, some of these loads can be balanced but they can be considered as limit cases of unbalanced loads [2]

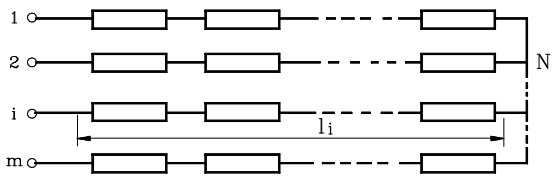


Figure 1.

A question that is raised immediately is determined by the number of possible unbalanced, in other words, the number of the discreet unbalanced load. The number of the discreet unbalanced loads, which may exist, is finite and we note it:

$$N = N(DUL) = G_{n(l_1,l_2,\dots,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)}$$

The author of this paper has elaborated four methods for the N (DUL) number calculation. These are:

1. The enumeration method
2. The Newton type polynomials method
3. The recurrence method
4. The order reducing method.

The Newton type polynomials method has been set forth in the [3] paper. Now we are going to present the enumeration method.

2. The enumeration method

This method is based on the observation that the N number is equal to the solutions number of the system:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ji} = \lambda_j;\ j = 1,2,...,\mu \\ \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i;\ i = 1,2,...,m \end{cases} \tag{1}$$

Where $\lambda_j, l_i > 0$; $x_{ji} \geq 0$ are natural numbers.

This system has μm unknowns and $\mu + m - 1$ independent equations (because of the conditions $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = \sum_{i=1}^{m} l_i = n$).

Therefore, the non-determination degree of system is:

$$\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1) \tag{2}$$

We notice that the N number also represents the matrices number with μ rows and m columns, containing natural numbers, where the sum of the rows, respectively of the columns, are imposed:

n	l_1	l_2	...	l_m
λ_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1m}
λ_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2m}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
λ_μ	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	...	$x_{\mu m}$

(3)

The enumeration method "manually" applied, consist of the effective construction of the matrices of the type (3) and their counting. It is obvious that for n capital, this variant is totally unpractical. Based on the enumeration method, we made up a computer program (called the RDD program) which systematically generates matrices of the (3) type and finally it gives the number of these matrices. The problem is reduced to the determination of the reduced matrices with μ-1 and m – 1 dimensions, where the x_{ji} variables take natural values between 0 and a maximum value and their sum is higher than or equal to the $n - l_1 - \lambda_1$.

We may write:

$$0 \leq x_{ji} \leq \min(\lambda_j - x_{j2} - ... - x_{j,i-1};\ l_i - x_{2i} - ... - x_{j-1,i}) \tag{4}$$

$$S = \sum_{j=2}^{\mu} \sum_{i=2}^{m} x_{ji} \geq n - l_1 - \lambda_1 \tag{5}$$

referring to the matrix:

$$M = \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2i} & \cdots & x_{2m} \\ x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3i} & \cdots & x_{3m} \\ \cdots & & & & & \\ x_{j2} & x_{j3} & \cdots & x_{ji} & \cdots & x_{jm} \\ \cdots & & & & & \\ x_{\mu 2} & x_{\mu 3} & \cdots & x_{\mu j} & \cdots & x_{\mu m} \end{bmatrix} \tag{6}$$

The number of the reduced matrices of the (6) type coincides with the (3) matrices number and it is exactly N (DUL)

A numeric example obtained:

$$G_{30(10,10,10)}^{30(10,10,10)} = 2211 \tag{7}$$

Bibliography:

[1] V. M. Popa – *On a question linear programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol. X (1), Sibiu, 1993.

[2] V. M. Popa - *Aplicaţii şi încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifazate în regimuri nesimetrice*, Referat de doctorat nr. 2, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică Cluj-Napoca, 1994.

[3] V. M. Popa – *A Mathematical Model for Polyplastic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 38, nr. 1, 1995.

The Recurrence Method for Calculating the Unbalanced Classes Number of m-Phased Loads

Vasile Mircea Popa

Abstract: This work shows a recurrence method for m-phased loads unbalanced classes number calculation. The numbers N(DUL) can be determined recursively, using recurrence relations. At the end of the paper a numerical computational example is presented.

Key words: m-phased loads, discreet unbalanced loads, recurrence method.

1. Introduction

In some previous papers[3], [4] it was defined the m-phased load of the $n(l_1,l_2,...,l_m; \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_\mu)$ type.

We are considering an m-phased unbalanced load and the equivalent scheme in star connection. We assume that the phases are distinct between them (discernible). If the impedances from the m phases are made up (in a series) of elementary impedances (physical elements), we call the m-phased load discreet unbalanced load (DUL). [2]. We assume that we have n elementary impedances, namely μ classes of different elementary impedances, the j class containing λ_j identical impedances, thus:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n \,. \qquad (1)$$

The m distinct phases of the load with a star connection, contain l_i elementary impedances each, with:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = n \,. \qquad (2)$$

The scheme of such a discreet unbalanced load is given in fig 1.

We call such a discreet unbalanced load of the $n(l_1,l_2,...,l_m; \lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)$ type.

We are to imply next that the discreet unbalanced loads (DUL), which we are to consider, do belong to this type.

At the transfer of some elementary impedances from a phase to another we obtain different unbalances loads, which introduce different types of lack of balance into the network where they belong.

Particularly, some of these loads can be balanced but they can be considered as limit cases of unbalanced loads [2]

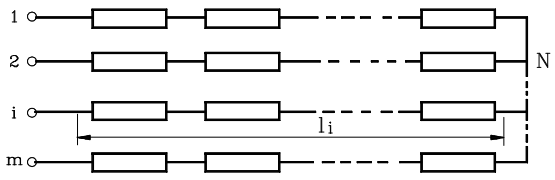


Figure 1.

A question that is raised immediately is determined by the number of possible unbalanced, in other words, the number of the discreet unbalanced load. The number of the discreet unbalanced loads, which may exist, is finite and we note it:

$$N = N(DUL) = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} \,. \qquad (3)$$

This paper shows the recurrence method for the discreet unbalanced loads for the N (DUL) number calculation.

2. The recurrence method

The number of the unbalanced classes for the discreet unbalanced loads can be determined with the aid of some N (DUL) numbers with lesser order.

The recurrence relations are easily deduced starting from the definition of the number N (DUL).By the decreasing order of te superior and inferior indices and the using of the symmetrical properties it was determinated that:

$$\lambda_\mu=\min(l_1, l_2,...,l_m; \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_\mu) \quad (4)$$

a) if $\lambda_\mu=1$, it results:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-1(l_1,l_2,...,l_i-1...,l_m)}^{n-1(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\mu-1})} \quad (5)$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 1 \quad (6)$$

in natural numbers, with $0 \le x_i \le 1$, $(i = 1,2,...,m)$.

The solutions number of this equation is:

$$|R| = c_m^1 = m \text{ (combinations with repetition).} \quad (7)$$

b) if $\lambda_\mu=2$, it results:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-2(l_1,l_2,...,l_i-2,...,l_m)}^{n-2(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\mu-1})} \quad (8)$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 2 \quad (9)$$

in natural numbers, with $0 \le x_i \le 2$, $(i = 1,2,...,m)$.

The solutions number of this equation is:

$$|R| = c_m^2 = \frac{m(m+1)}{2}. \quad (10)$$

c) if $\lambda_\mu=3$ it results:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-3(l_1,l_2,...,l_i-3,...,l_m)}^{n-3(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\mu-1})} \quad (11)$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 3 \quad (12)$$

in natural numbers, with $0 \le x_i \le 3$, $(i = 1,2,...,m)$.

The number of solutions for this equation is:

$$|R| = c_m^3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}. \quad (13)$$

The list of these recurrence relations may continue, but their application becomes more and more difficult, because of the increasing of $|R|$.

Very simple and advantageously is the applying of the first two recurrence relation, that is for:

$\lambda_\mu=1$, and $\lambda_\mu=2$

We illustrate the method giving an example.

Calculate the number: $N = G_{10(3,3,2,2)}^{10(4,3,2,1)}$.

Applying the relation (2), we obtain:

$$N = G_{9(2,3,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,1,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} =$$
$$= 2 \cdot G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + 2 \cdot G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} = 2 \cdot 109 + 2 \cdot 87 = 392$$

It is obvious that the applying of the recurrence relation for N (DUL) it is assumed the knowledge of the value for this type of inferior order numbers (n-1, n-2, …).

Bibliography:

[1] D. Popescu, C. Vraciu – *Elemente de teoria grupurilor finite,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

[2] V. M. Popa – *On a question of linear programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol.X (1), Sibiu, 1993.

[3] V. M. Popa – *Aplicaţii şi încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifazate în regimuri nesimetrice*, Referat de doctorat nr. 2, Universitatea Tehnică Cluj- Napoca, Facultatea de Electrotehnică Cluj – Napoca, 1994.

[4] V. M. Popa- *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 38, nr. 1, 1995.

The Order Reducing Method for Determining the Number of Discreet Unbalanced Loads

Vasile Mircea POPA

Abstract: The paper proposes a new method for calculating the number of equivalence classes for discreet unbalanced loads, the order reducing method. The determination of this number is a combinatorial problem of distributing n impedances (μ classes of impedances where the class j contains λ_j equivalent impedances) in m phases of capacity l_i. The discreet unbalanced load is defined in this paper. The paper proposes an algebraic characterization for unbalanced discreet loads. The algebraic model is the bijection between two finite multiple sets. The number of unbalanced discreet loads is the number of equivalence classes for equivalence relation defined onto bijection set. This paper presents a method for unbalanced discreet loads number calculation. Four methods are presented and the order reducing method is detailed. The enumeration method algorithm was programmed on the electronic computer. In the paper numerical computational examples are given. At the end of the paper the conclusions and references are presented.

Key words: m-phased load, discreet unbalanced load, mathematical model for the discreet unbalanced load, methods for the discreet unbalanced loads calculation, order reducing method.

1. Introduction

We are considering an m-phased unbalanced load and the equivalent scheme in star connection (fig. 1, fig. 2).

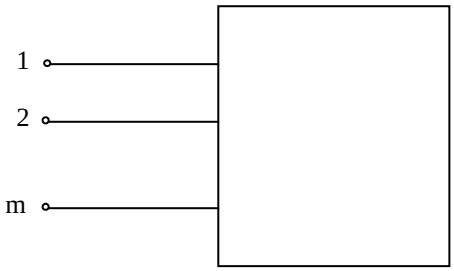


Figure 1 – A polyphasic unbalanced load

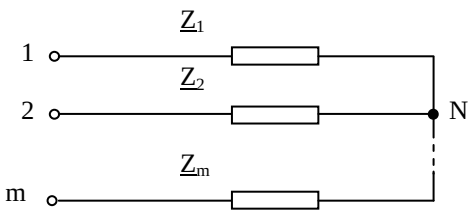


Figure 2 – Equivalent scheme in star connection

We assume that the phases are distinct between them (discernible). If the impedances from the m phases are made up (in a series) of elementary impedances (physical elements), we call the m-phased load discreet unbalanced load (DUL). [4], [5], [9]. We assume that we have n elementary impedances, namely μ classes of different elementary impedances, the j class containing λ_j identical impedances, thus:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n \qquad (1)$$

The m distinct phases of the load with a star connection, contain l_i elementary impedances each, with:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = n \qquad (2)$$

The scheme of such a discreet unbalanced load is given in fig. 3.

We call such a discreet unbalanced load of the $n(l_1, l_2, ..., l_m; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$ type.

We are to imply next that the discreet unbalanced

loads (DUL), which we are to consider, do belong to this type.

At the transfer of some elementary impedances from a phase to another we obtain different unbalances loads, which introduce different types of lack of balance into the network where they belong.

Particularly, some of these loads can be balanced but they can be considered as limit cases of unbalanced loads [5]

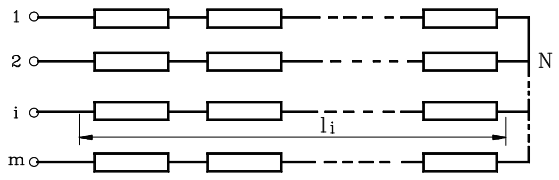


Figure 3 – Discreet unbalanced load

A question that is raised immediately is determined by the number of possible unbalanced, in other words, the number of the discreet unbalanced load. The number of the discreet unbalanced loads, which may exist, is finite and we note it:

$$N = N(DUL) = G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} \qquad (3)$$

By the $N = N(DUL)$ number calculation we use methods from the discreet mathematics, to be more exactly, from the combinatorics. [5], [2], [17], [18].

2. The mathematical model for DUL [6]

The mathematical model for the discreet unbalanced load is the bijection between two multiple sets [4],[5]. We take into consideration two finite sets X and Y, having the same number of elements: $|X| = |Y| = n$, as well as the set of bijections $f : X \to Y$ that we note as Y^X. Let us assume an equivalence relation (ρ_1) defined on the set X, which determines a partition of the set X, where μ equivalence classes X_j containing each λ_j elements, that is $|X_j| = \lambda_j, (j = 1, 2, ..., \mu)$. The elements of an equivalence class will be called equivalent or identical. In the same way, we consider an equivalent relation (ρ_2) defined on the set Y, which determines a partition of the set Y in m classes of equivalence, Y_i containing each l_i elements, namely $|Y_i| = l_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$. In this way, the sets X and Y become multiple sets, namely sets where the elements may repeat. Using this terminology, we may say that the set X contains μ distinct elements, the j element repeating λ_j times $(j = 1, 2, ..., \mu)$. Likewise, for the set Y.

Now we are to consider a permutations group G of the set X that is the simple (or direct) product of the symmetrical groups of permutations for the equivalence classes elements from X [5], [2], [17], [18].

This group is noted as: $G = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times ... \times S_{\lambda_\mu}$ and it is defined the following way: for any $\alpha \in G$, $\alpha_j \in S_{\lambda j}$, $x \in X_j$, we have:

$$\alpha(x) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j, ..., \alpha_\mu)(x) = \alpha_j(x) \qquad (4)$$
$$(j = 1, 2, ..., \mu)$$

The definition is consistent. Due to the fact that G is a finite subset of S_n, in order that G may be a permutation group of the set X (a sub-group of the symmetric group S_n) it is sufficient for us to check that for any α, $\alpha' \in G$ $\Rightarrow \alpha\alpha' \in G$ (we noted $\alpha\alpha'$ the α and α' permutation composition). Let $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j, ..., \alpha_\mu)$ and $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_j, ..., \alpha'_\mu)$ be. For any $x \in X_j$, we get after the definition:

$$\alpha\alpha'(x) = \alpha(\alpha'(x)) = \alpha(\alpha'_j(x)) = \alpha_j(\alpha'_j(x)) = \alpha_j\alpha'_j(x)$$

We thus obtain:

$\alpha\alpha' = (\alpha_1\alpha'_1, \alpha_2\alpha'_2, ..., \alpha_j\alpha'_j, ..., \alpha_\mu\alpha'_\mu)$ and we can observe that $\alpha\alpha' \in G$.

Therefore G is a permutation group of the X set. We used the finite subgroups characterisation theorem [2],[17],[18]. Thus, through this permutation group, any X element of the X set is changed into an element that belongs to the same equivalence class as X.

Analogously, we also consider the H permutation group of the Y set:

$H = S_{l_1} \times S_{l_2} \times ... \times S_{l_m}$.

For any $\beta \in H$, $\beta_i \in S_{l_i}$, $y \in Y_i$, we have:

$$\beta(y) = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_i, ..., \beta_m)(y) = \beta_i(y) \qquad (5)$$
$$(i = 1, 2, ..., m)$$

That is, through the permutation of this group, any y element of the Y set is changed into an element that belong to the same equivalence class as y.

There can be defined an equivalence relation (ρ) on the Y^X set, as follows: $f_1 \sim f_2$ if $\alpha \in G$ and $\beta \in H$ exist, so that $f_2 = \beta f_1 \alpha$. We demonstrate that the relation defined like this is an equivalence relation on the bijections set $f : X \to Y$, in ratio with the G and H permutation groups.

The relation is reflexive: $f \sim f$, because $f = \varepsilon_2 f \varepsilon_1$, where $\varepsilon_1 \in G$ and $\varepsilon_2 \in H$ are identical permutations from the two permutation groups. The relation is symmetrical: $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1$. It is true that $f_2 = \beta f_1 \alpha$ leads to $f_1 = \beta^{-1} f_2 \alpha^{-1}$, where $\alpha^{-1} \in G$ and $\beta^{-1} \in H$, fact that proves the assertion. The relation is transitive: $f_1 \sim f_2$ and $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3$. That is, from $f_2 = \beta f_1 \alpha$ and $f_3 = \beta' f_2 \alpha'$ it results $f_3 = \beta'\beta f_1 \alpha\alpha' = \beta'' f_1 \alpha''$, where: $\beta'\beta = \beta'' \in H$ and $\alpha'\alpha = \alpha'' \in G$.

The relation (ρ) of equivalence determines a partition of the Y^X set into classes of equivalence. The number of these classes of equivalence is noted in the following way:

$$\left| Y^X / \rho \right| = G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} \qquad (6)$$

We notice that the setting forth of this problem is equivalent to the problem to define the discreet unbalanced load (DUL). We take into consideration n

elementary impedance (μ impedance classes, the j class containing λ_j identical impedances, as $\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j = n$) and m phases, the i phase receiving l_i elementary inseried impedances, with $\sum_{i=1}^{m} l_j = n$.

The n impedances are distributed in the m phases. The number of possible distribution is:

$$N = N(DUL) = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} \tag{7}$$

3. Methods for the N(DUL) number calculation

The author of this paper has elaborated four methods for the N (DUL) number calculation. These are:

1. The enumeration method
2. The Newton type polynomials method
3. The recurrence method
4. The order reducing method.

3.1. The enumeration method [7]

The enumeration method is based on the observation that the N number is equal to the solutions number of the system:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ji} = \lambda_j; \quad j = 1, 2, ..., \mu \\ \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i; \quad i = 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{8}$$

where $\lambda_j, l_i > 0$; $x_{ji} \geq 0$ are natural numbers.

This system has μm unknowns and $\mu + m - 1$ independent equations (because of the conditions $\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j = \sum_{i=1}^{m} l_i = n$)

Therefore, the non-determination degree of system is:

$$\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1) \tag{9}$$

We notice that the N number also represents the matrices number with μ rows and m columns, containing natural numbers, where the sum of the rows, respectively of the columns, are imposed:

n	l_1	l_2	Λ	l_m
λ_1	x_{11}	x_{12}	Λ	x_{1m}
λ_2	x_{21}	x_{22}	Λ	x_{2m}
M	M	M		M
λ_μ	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	Λ	$x_{\mu m}$

(10)

The enumeration method "manually" applied consists of the effective construction of the matrices of the type (10) and their counting. It is obvious that for n capital, this variant is totally unpractical. Based on the enumeration method, we made up a computer program (called the DUL program) which systematically generates matrices of the (10) type and finally it gives the number of these matrices. The problem is reduced to the determination of the reduced matrices with $\mu - 1$ and $m - 1$ dimensions, where the x_{ji} variables take natural values between 0 and a maximum value and their sum is higher than or equal to the $n - l_1 - \lambda_1$.

We may write:

$$0 \leq x_{ji} \leq \min(\lambda_j - x_{j2} - x_{j3} - ... - x_{j,i-1}; \; l_i - x_{2i} - x_{3i} - ... - x_{j-1,i}) \tag{11}$$

$$S = \sum_{j=2}^{\mu}\sum_{i=2}^{m} x_{ji} \geq n - l_1 - \lambda_1 \tag{12}$$

referring to the matrix:

$$M = \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & \Lambda & x_{2i} & \Lambda & x_{2m} \\ x_{32} & x_{33} & \Lambda & x_{3i} & \Lambda & x_{3m} \\ M & & & & & \\ x_{j2} & x_{j3} & \Lambda & x_{ji} & \Lambda & x_{jm} \\ M & & & & & \\ x_{\mu 2} & x_{\mu 3} & \Lambda & x_{\mu i} & \Lambda & x_{\mu m} \end{bmatrix} \tag{13}$$

The number of the reduced matrices of the (13) type coincides with the (10) matrices number and it is exactly N (DUL)

A numeric example obtained:

$$G_{30(10,10,10)}^{30(10,10,10)} = 2211 \tag{14}$$

3.2.The Newton type polynomials method [4]

I propose the following algorithm [4], the Newton type polynomials method.

a) We solve the polynomial:

$$P = P_{\lambda 1} P_{\lambda 2} ... P_{\lambda \mu} \tag{15}$$

where: $P_{\lambda j} = P_{\lambda j}(x_1, x_2, ..., x_{\lambda j})$ is a Newton type polynomial of degree λ_j in λ_j variables [1].

$$P = P(x_1, x_2, ..., x_\lambda) \tag{16}$$

will have a:

$$\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j = n$$

degree and λ variables, where:

$$\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu).$$

b) We replace in P:

$$x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$$
$$M$$
$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda$$

c) With the help of the multinominal theorem we calculate the coefficient of the single term $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ of the expansion of P, which will be the number we are looking for.

The general polynomial of Newton type has the form:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + ... + nk_n = n \\ k_1, k_2, ..., k_n \geq 0}} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! ... n^{k_n} k_n!}. \tag{17}$$

Applying the above mentioned general formula we can easily obtain the first Newton type polynomials:

$$P_1 = x_1$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right)$$

$$P_3 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3\right)$$

$$P_4 = \frac{1}{24}\left(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4\right).$$

The algorithm that we displayed before coincides with the Pólya – de Brujin enumeration method used in our problem case [2].

3.3. The recurrence method [8]

The number of the unbalanced classes for the discreet unbalanced loads can be determined with the aid of some N (DUL) numbers with lesser order.

The recurrence relations are easily deduced starting from the definition of the number N (DUL). By the decreasing order of the superior and inferior indices and the using of the symmetrical properties it was determined that:

$$\lambda_\mu = \min\left(l_1, l_2, ..., l_m; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu\right). \tag{18}$$

If $\lambda_\mu = 1$, it results:

$$G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-1(l_1, l_2, ..., l_i-1, ..., l_m)}^{n-1(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{\mu-1})} \tag{19}$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 1 \tag{20}$$

in natural numbers, with $0 \le x_i \le 1$, $(i = 1, 2, ..., m)$.

The solutions number of this equation is:

$$|R| = c_m^1 = m \text{ (combinations with repetition).} \tag{21}$$

If $\lambda_\mu = 2$, it results:

$$G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-2(l_1, l_2, ..., l_i-2, ..., l_m)}^{n-2(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{\mu-1})} \tag{22}$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 2 \tag{23}$$

in natural number, with $0 \le x_i \le 2$, $(i = 1, 2, ..., m)$.

The solutions number of this equation is:

$$|R| = c_m^2 = \frac{m(m+1)}{2}. \tag{24}$$

If $\lambda_\mu = 3$ it results:

$$G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-3(l_1, l_2, ..., l_i-3, ..., l_m)}^{n-3(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{\mu-1})} \tag{25}$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 3 \tag{26}$$

in natural numbers, with $0 \le x_i \le 3$, $(i = 1, 2, ..., m)$.

The number of solutions for this equation is:

$$|R| = c_m^3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}. \tag{27}$$

The list of these recurrence relations may continue, but their application becomes more and more difficult, because of the increasing of $|R|$.

Very simple and advantageously is the applying of the first two recurrence relation, that is for:

$\lambda_\mu = 1$, and $\lambda_\mu = 2$.

We illustrate the method giving an example.

Calculate the number: $N = G_{10(3,3,2,2)}^{10(4,3,2,1)}$.

Applying the relation (2), we obtain:

$$N = G_{9(2,3,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,1,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} =$$

$$= 2 \cdot G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + 2 \cdot G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} = 2 \cdot 109 + 2 \cdot 87 = 392$$

It is obvious that the applying of the recurrence relation for N (DUL) it is assumed the knowledge of the value for this type of inferior order numbers $(n-1, n-2, ...)$.

4. The order reducing method

We consider the general symbol:

$$N = N(DUL) = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} \tag{28}$$

If $l_1 + \lambda_1 > n$ we may affirm that:

$$G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_{2n-l_1-\lambda_1 1(n-\lambda_1, l_2, ..., l_m)}^{2n-l_1-\lambda_1(n-l_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} \tag{29}$$

and the order is reduced.

Let's consider the matrix:

n	l_1	l_2	Λ	l_m
λ_1	x_{11}	x_{12}	Λ	x_{1m}
λ_2	x_{21}	x_{22}	Λ	x_{2m}
M	M			
λ_μ	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	Λ	$x_{\mu m}$

(30)

By separating the first row and the first column, we obtain the reduced matrix, of dimensions $(\mu - 1)(m - 1)$.

Let N_ν be the number of cases in which the reduced matrix has the value ν.

Let the symbols:

$$G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_n \tag{31}$$

$$G_{n-1(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n-1(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_{n-1} \tag{32}$$

$$G_{n-2(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n-2(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_{n-2} \tag{33}$$

$$G_{n-3(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n-3(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_{n-3}. \tag{34}$$

We may affirm that:

a) if $l_1 + \lambda_1 = n$

$$G_n = G_{n-1} + N_0 \tag{35}$$

$$G_n = G_{n-2} + N_0 + N_1 \tag{36}$$

$$G_n = G_{n-3} + N_0 + N_1 + N_2 \tag{37}$$

b) if $l_1 + \lambda_1 = n - 1$

$$G_n = G_{n-1} + N_1 \tag{38}$$

$$G_n = G_{n-2} + N_1 + N_2 \tag{39}$$

c) if $l_1 + \lambda_1 = n - 2$

$$G_n = G_{n-1} + N_2 \tag{40}$$

We will now calculate the numbers N_ν, $(\nu = 0, 1, 2)$.

In the general symbol:

$$N = N(DUL) = G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} \quad (41)$$

we apply the symmetry property, so that $l_1 \geq \lambda_1$. The inferior and superior indexes are in decreasing order:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_\mu \quad (42)$$

$$l_1 \geq l_2 \geq ... \geq l_m . \quad (43)$$

In the set of numbers $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu$, we make the following notations:

α_1 - the number of digits 1

α_2 - the number of digits 2

$\alpha_{\mu-1}$ - the number of digits $\mu - 1$

α_μ - the number of digits ν or greater then μ.

We may affirm that:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu = \mu - 1 \quad (44)$$

We obtain the expressions:

$$N_0 = 1 \quad (45)$$

$$N_1 = (\mu - 1)(m - 1) \quad (46)$$

$$N_2 = \alpha_2 G^{n-l_1(2,\, n-l_1-2)}_{n-l_1(l_2, ..., l_m)} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2} G^{n-l_1(1,\, 1,\, n-l_1-2)}_{n-l_1(l_2, ..., l_n)} \quad (47)$$

The order reducing method consists of applying the relations: (29), (35), ..., (40) and (45), (46), (47).

Similar to the recurrence method, the order reducing method for the N(DUL) number calculation assumes knowing the value of several such numbers of inferior orders.

5. Numerical results obtained

In the following tables are given the numbers N(DUL) for n=1, 2, 3, 4, 5, 6 and 7.

Table 1 (n=1)

1	(1)
(1)	1

Table 2 (n=2)

2	(2)	(1,1)
(2)	1	1
(1,1)	1	2

Table 3 (n=3)

3	(3)	(2,1)	(1,1,1)
(3)	1	1	1
(2,1)	1	2	3
(1,1,1)	1	3	6

Table 4 (n=4)

4	(4)	(3,1)	(2,2)	(2,1,1)	(1,1,1,1)
(4)	1	1	1	1	1
(3,1)	1	2	2	3	4
(2,2)	1	2	3	4	6
(2.1.1)	1	3	4	7	12
(1,1,1,1)	1	4	6	12	24

Table 5 (n=5)

5	(5)	(4,1)	(3,2)	(3,1,1)	(2,2,1)	(2,1,1,1)	(1,1,1,1,1)
(5)	1	1	1	1	1	1	1
(4,1)	1	2	2	3	3	4	5
(3,2)	1	2	3	4	5	7	10
(3,1,1)	1	3	4	7	8	13	20
(2,2,1)	1	3	5	8	11	18	30
(2,1,1,1)	1	4	7	13	18	33	60
(1,1,1,1,1)	1	5	10	20	30	60	120

Table 6 (n=6)

6	(6)	(5,1)	(4,2)	(3,3)	(4,1,1)	(3,2,1)	(2,2,2)	(3,1,1,1)	(2,2,1,1)	(2,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1)
(6)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(5,1)	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	6
(4,2)	1	2	3	3	4	5	6	7	8	11	15
(3,3)	1	2	3	4	4	6	7	8	10	14	20
(4,1,1)	1	3	4	4	7	8	9	13	14	21	30
(3,2,1)	1	3	5	6	8	12	15	19	24	38	60
(2,2,2)	1	3	6	7	9	15	21	24	33	54	90
(3,1,1,1)	1	4	7	8	13	19	24	34	42	72	120
(2,2,1,1),	1	4	8	10	14	24	33	42	58	102	180
(2,1,1,1,1)	1	5	11	14	21	38	54	72	102	192	360
(1,1,1,1,1,1)	1	6	15	20	30	60	90	120	180	360	720

Table 7 (n=7; partial)

7	(7)	(6,1)	(5,2)	(4,3)	(5,1,1)	(4,2,1)	(3,3,1)	(3,2,2)	(4,1,1,1)
(7)	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(6,1)	1	2	2	2	3	3	3	3	4
(5,2)	1	2	3	3	4	5	5	6	7
(4,3)	1	2	3	4	4	6	7	8	8
(5,1,1)	1	3	4	4	7	8	8	9	13
(4,2,1)	1	3	5	6	8	12	13	16	19
(3,.3,1)	1	3	5	7	8	13	16	19	20

6. Conclusions

Therefore, the mathematical model for the discreet unbalanced load is the bijection between two multiple sets and the counting of the discreet unbalanced loads (DUL) is reduced to the bijections between two multiple sets counting [4], [5].

We also note that the defined relation for the lack of balance on the discreet loads set is an equivalence relation and the classes with lack of balance are corresponding equivalence classes.

The author of this paper has elaborated four methods for the calculation of the N (DUL) number [4], [5].

This paper presents a mathematical model for polyphasic loads unbalances classes analysis. The number N represents also the number of solutions for the system of equations:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ji} = \lambda_j; \quad \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i; \quad \lambda_j, l_i > 0; \quad x_{ji} \geq 0$$

The numbers x_{ji} are natural numbers and the numbers λ_j, l_i are strictly positive natural numbers. The system has μm unknowns (because of the equilibrium conditions).

As an application we urge the reader to check up by calculation the equalities:

$$G_{8(2,2,1,1,1,1)}^{8(2,2,2,1,1)} = 1548$$

$$G_{8(2,2,1,1,1,1,1)}^{9(3,2,2,1,1)} = 4900$$

and to formulate the according problems complying with the count of solutions both for the before system and for the matrices (10).

References:

[1] D. E. Knuth – "*The Art of Computer Programming*", vol.1, Fundamentals Algorithms, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1973

[2] I. Tomescu – "*Introduction to Combinatorics*", Collet's (Publishers) Limited, London and Wellingborough, England, 1975

[3] V. M. Popa – "*On a Question of Linear Programming*", Acta Universitatis Cibiniensis, vol.X, Sibiu, Romania, 1993

[4] V. M. Popa – "*A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*", Acta Electrotehnica Napocensis, vol.36, nr. 1, pg. 91-92, 1995

[5] V. M. Popa – "*Contribuţii la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicaţii*", Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj-Napoca, 1999

[6] V. M. Popa – "*The Algebraic Characterization of the Discreet Unbalanced Loads*", Acta Universitatis Cibiniensis, vol.XXXII, Technical Series, A. Electrical Engineering and Electronics, pg. 33-34, Sibiu, 1999

[7] V. M. Popa – "*Methods for the Discreet Unbalanced Load Number Calculation*", Acta Universitatis Cibiniensis, vol.XXXII, Technical Series, A. Electrical Engineering and Electronics, pg. 31-32, Sibiu, 1999

[8] V. M. Popa – "*The Recurrence Method for m-Phased Loads Unbalanced Classes Number Calculation*", Acta Universitatis Cibiniensis, vol.XXXII, Technical Series, A. Electrical Engineering and Electronics, pg. 29-30, Sibiu, 1999

[9] V. M. Popa – "*Aplicaţii şi încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifazate în regimuri nesimetrice*", Referat de doctorat nr.2, Universitatea Thenică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj-Napoca, 1994

[10] V. M: Popa – "*On a Classification of the Three-Phase Loads*", Acta Universitatis Cibiniensis, vol.XIV (2), pg. 87-90, Sibiu, 1995

[11] V. M. Popa – "*A New Approach to be Characterized the Unbalanced Three-Phase Loads*", Acta Universitatis Cibiniensis, vol. XIV (2), pg. 91-93, Sibiu, 1995

[12] V. M. Popa – "*On an Analysis for the Unbalanced Loads*", Acta Electrotehnica Napocensis, vol.36, nr.1, pg. 93-94, Cluj-Napoca, 1995

[13] V. M. Popa – "Using Generalized Impedances in the study of a Real Unbalanced Load", Proocedings of the 2nd International Workshop CAD in Electromagnetism and Electrical Circuits – CADEMEC 99, Cluj-Napoca, 7-9 September 1999, volume, pg. 91-94

[14] V. M. Popa – "A Synthesis Regarding the Study of the Real Unbalanced Load", Universitatea "Politehnica" din Timişoara, Analele Facultăţii de Inginerie din Hunedoara, Tomul II, Fascicula 2, ISSN 1454-6531, pag. 9-12, Hunedoara, 2000

[15] V. M. Popa – "The Study of the Real Unbalanced Load for Extreme Functioning Situations", Universitatea "Politehnica" din Timişoara, Analele Facultăţii de Inginerie din Hunedoara, Tomul II, Fascicula 2, ISSN 1454-6531, pag. 13-16, Hunedoara, 2000

[16] E. Simion, E. Man, R. V. Ciupa, P. Roşca, V. Neamţu, V. M. Popa – "*Teoria circuitelor electrice*", Editura Universităţii Tehnice Cluj-Napoca, 1996

[17] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu – "*Bazele algebrei*", vol. I, Editura Academiei, Bucureşti, 1986

[18] D. Popescu, C. Vraciu – "*Elemente de teoria grupurilor finite*", Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986

[19] E. Pavel – "*Consideraţii privind receptoarele electrice trifazate dezechilibrate*", ENERG, vol.VII, pag. 194-220, Editura Thenică, Bucureşti, 1989

[20] E. Pavel – "*Noi aspecte ale teoriei receptoarelor trifazate statice dezechilibrate*", Energetica, vol.37, nr.11, noiembrie 1989, pag. 481-492

Model matematic al receptorului dezechilibrat discret

Vasile Mircea Popa

Abstract

Mathematical model for the discreet unbalanced load.

This paper presents a mathematical model for a discreet unbalanced load. We are considering an m-phased unbalanced load and the equivalent scheme in star connection. We assume that the phases are distinct between them (discernable). If the impedances from the m phases are made up (in a series) of elementary impedances (physical elements), we call the m-phased load discreet unbalanced load (DUL) [1], [3], [4]. We assume that we have n elementary impedances, namely μ classes of different elementary impedances, the j class containing λ_j identical impedances, thus: $\sum \lambda_j = n$. The m distinct phases of the load with a star connection contain l_i elementary impedances each, with: $\sum l_i = n$.

1. Introducere

Considerăm un receptor dezechilibrat m-fazat şi schema echivalentă în conexiunea stea (fig. 1).

În fazele receptorului se găsesc impedanţele complexe $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, ..., \underline{Z}_m$ şi considerăm fazele distincte (discernabile).

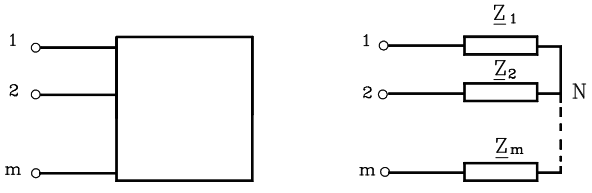


Fig. 1 Receptor dezechilibrat m-fazat şi schema echivalentă în stea

Dacă aceste impedanţe sunt formate (prin înseriere) din impedanţe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul m-fazat receptor dezechilibrat discret (RDD) [1], [2], [3], [4].

Presupunem că avem n impedanţe elementare, anume μ clase de impedanţe elementare diferite, clasa j conţinând λ_j impedanţe identice, deci:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n . \tag{1}$$

Cele m faze distincte ale receptorului legat în stea conţin câte l_i impedanţe elementare, cu:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = n . \tag{2}$$

Schema unui astfel de receptor dezechilibrat discret este dată in figura 2.

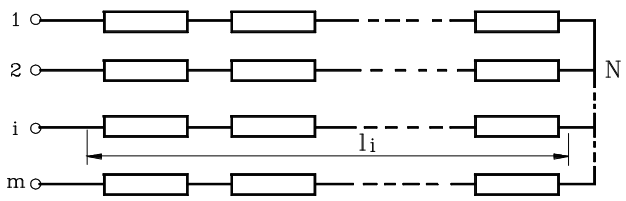


Fig. 2 Schema unui receptor dezechilibrat discret (RDD)

Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul n $n(l_1, l_2, ..., l_m; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$. În cele ce urmează vom subînţelege că receptorii dezechilibraţi discreţi (RDD) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

La transferul unor impedanţe elementare de pe o fază pe alta se obţin receptoare dezechilibrate diferite, care introduc diverse tipuri de dezechilibre în reţeaua din care fac parte.

În particular, unele din aceste receptoare pot fi echilibrate, dar acestea pot fi considerate cazuri limită de receptoare dezechilibrate, în conformitate cu punctul de vedere evidenţiat în [1].

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibraţi discreţi.

Numărul receptorilor dezechilibraţi discreţi care pot exista este finit şi îl notăm :

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} . \tag{3}$$

Pentru calcul numărului N=N(RDD) se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [1], [3].

2. Modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret

Modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret este bijecţia între două mulţimi multiple. [1], [3], [4].

Considerăm două mulţimi finite X şi Y având acelaşi număr de elemente: $|X| = |Y| = n$, precum şi mulţimea bijecţiilor $f : X \to Y$, mulţime pe care o notam $B(X, Y)$.

Să considerăm o relaţie de echivalenţă (ρ_1) definită pe mulţimea X, care determină o partiţie a mulţimii X în μ clase de echivalenţă X_j conţinând câte λ_j elemente, adică $|X_j| = \lambda_j$ ($j = 1,2,...,\mu$). Elementele unei clase de echivalenţă vor fi denumite echivalente sau identice. La fel, considerăm o relaţie de echivalenţă (ρ_2) definită pe mulţimea Y, care determină o partiţie a mulţimii Y în m clase de echivalenţă Y_i conţinând câte l_i elemente, adică $|Y_i| = l_i$ ($i = 1,2,...,m$).

În acest fel, mulţimile X şi Y devin mulţimi multiple, adică mulţimi în care elementele se pot repeta. Utilizând această terminologie, putem spune că mulţimea X conţine μ elemente distincte, elementul j repetându-se de λ_j ori ($j = 1,2,...,\mu$). Asemănător, pentru mulţimea Y (fig. 3).

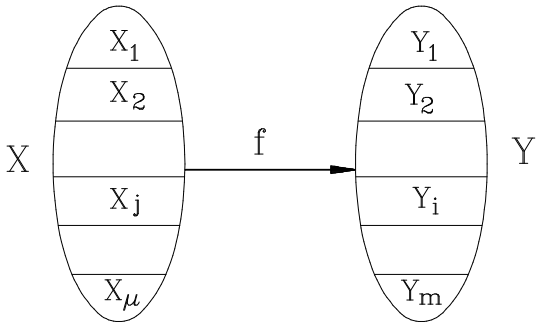


Fig. 3 Bijecţia între două mulţimi multiple

Vom considera acum un grup G de permutări al mulţimii X şi anume produsul simplu (sau direct) al grupurilor simetrice de permutări ale elementelor claselor de echivalenţă din X [1], [3], [4]. Acest grup se notează astfel: $G = S_{\lambda_1} \cdot S_{\lambda_2} \cdot ... \cdot S_{\lambda_\mu}$ şi se defineşte în felul următor: pentru orice $\alpha \in G$, $\alpha_j \in S_{\lambda_j}$, $x \in X_j$, avem:

$$\alpha(x)(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j, ..., \alpha_\mu)(x) = \alpha_j(x), \quad j = (1,2,...,\mu). \tag{4}$$

Deci, prin permutările acestui grup, orice element x al mulţimii X este transformat într-un element care aparţine aceleiaşi clase de echivalenţă ca şi x.

Analog,considerăm şi grupul H de permutări al mulţimii Y:

$$H = S_{l_1} \cdot S_{l_2} \cdot \ldots \cdot S_{l_m}$$

Pentru orice $\beta \in H$, $\beta_i \in S_{l_i}$, $y \in Y_i$, avem:

$$\beta(y) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots \beta_m)(y) = \beta_i(y),\ i = (1,2,\ldots,m). \tag{5}$$

Deci, prin permutările acestui grup, orice element y al mulţimii Y este transformat într-un element care aparţine aceleiaşi clase de echivalenţă ca şi y.

Se poate defini o relaţie de echivalenţă (ρ) pe mulţimea $B(X,Y)$, în modul următor: $f_1 \sim f_2$ dacă există $\alpha \in G$ şi $\beta \in H$ astfel încât $f_2 = \beta\, f_1\, \alpha$.

Se poate demonstra că relaţia astfel definită este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea bijecţiilor [1].

Relaţia (ρ) de echivalenţă determină o partiţie a mulţimii $B(X,Y)$ în clase de echivalenţă. Numărul acestor clase de echivalenţă se notează astfel:

$$\left|B(X,Y)/\rho\right| = G_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)}. \tag{6}$$

Observăm că problema expusă mai sus este echivalentă cu problema definirii receptorului dezechilibrat discret (RDD).

Prin urmare, modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret este bijecţia între două mulţimi multiple iar numărarea receptorilor dezechilibraţi discreţi (RDD) se reduce la numărarea bijecţiilor între două mulţimi multiple [1], [3].

De asemenea, observăm că relaţia de dezechilibru definită pe mulţimea receptorilor discreţi este o relaţie de echivalenţă iar clasele de dezechilibru sunt clasele de echivalenţă corespuzătoare.

3. Exemplu privind structura receptorilor dezechilibraţi discreţi de un anumit tip

În continuare vom considera un caz particular şi anume vom determina numărul receptorilor dezechilibraţi discreţi de tipul 7 (3, 2, 2; 4, 3). Avem: $G_{7(3,2,2)}^{7(4,3)} = 8$.

Receptorii dezechilibraţi discreţi corespuzători sunt reprezentaţi în continuare (fig. 4).

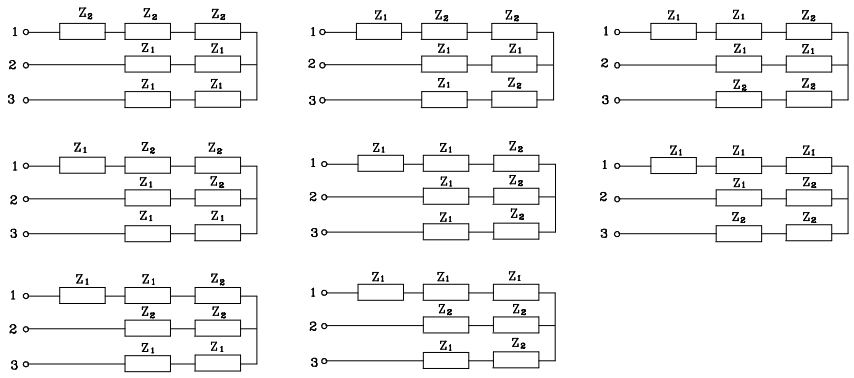


Fig. 4 Schemele receptorilor dezechilibraţi discreţi de tipul 7 (3, 2, 2; 4, 3)

4. Algoritm de calcul pentru numărul N=N(RDD)

Pentru calculul numărului:

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$$

putem utiliza algoritmul dedus în [1],[3] şi pe care îl reproducem în continuare:

a) Se calculează polinomul:

$$P = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot ... \cdot P_{\lambda_\mu},$$

unde $P_{\lambda_i} = P_{\lambda_i}(x_1, x_2, ..., x_{\lambda_i})$ este polinomul de tip Newton, de grad λ_i, în λ_i nedeterminate.

Deci, $P = P(x_1, x_2, ..., x_\lambda)$ va avea gradul $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$ şi λ nedeterminate, unde $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$.

b) Se înlocuieşte în P:

$$x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda.$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Polinomul general de tip Newton are forma:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+...+nk_n=n \\ k_1, k_2, ..., k_n \geq 0}} \frac{1}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! ... n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}.$$

Aplicând formula generală de mai sus se obţin uşor primele patru polinoame de tip Newton:

$$P_1 = x_1; \qquad P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right); \qquad P_3 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1 x_2 + 2x_3\right);$$

$$P_4 = \frac{1}{24}\left(x_1^4 + 6x_2^2 x_2 + 8x_1 x_3 + 3x_2^2 + 6x_4\right).$$

Algoritmul expus mai sus coincide cu metoda de numărare Pólya – de Bruijn aplicată în cazul problemei noastre [1].

5. Concluzii

În prezenta lucrare s-a definit şi apoi s-a considerat un model matematic pentru receptorul dezechilibrat discret. Relaţia de dezechilibru definită pe mulţimea receptorilor dezechilibraţi discreţi este o relaţie de echivalenţă iar clasele de dezechilibru sunt clasele de echivalenţă corespuzătoare. Se determină numărul claselor de dezechilibru prin metode speciale de calcul. Printr-un program de calculator elaborat în acest sens, se obţine lista reprezentanţilor claselor de dezechilibru, deci lista receptorilor dezechilibraţi discreţi de un anumit tip care pot exista. Cu alte cuvinte, folosind modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret se poate studia structura receptorilor dezechilibraţi de un anumit tip, se poate calcula numărul claselor de dezechilibru şi se poate obţine lista exhaustivă a reprezentanţilor claselor de dezechilibru respective. Unele aspecte ale problematicii abordate în lucrarea de faţă au fost iniţiate în teza de doctorat a autorului şi au fost dezvoltate în unele lucrări ulterioare (a se vedea lista bibliografică).

Bibliografie

[1] Popa V.M. – *Contribuţii la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicaţii*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, 1999

[2] Popa V.M. – *Program de calculator pentru analiza structurii receptoarelor dezechilibrate discrete*, Lucrările primei Conferinţe tehnico-stiinţifice "Profesorul Dorin Pavel-fondatorul hidroenergeticii româneşti", Sebeş, 8-9 iunie 2001, Volumul Tehnică şi Inginerie, ISBN 973-8254-07-8, Sebeş, 2001

[3] Popa V.M. - *The Order Reducing Method for Discreet Unbalanced Loads Number Determination*, Acta Universitatis Cibiniensis, volumul XLII, Seria Tehnică, H. Inginerie Electrică şi Electronică (nivel internaţional), Sibiu, 2001

[4] Popa V.M. - *The Newton Type Polynomials Method for the Discreet Unbalanced Loads Classes Analysis*, www.roger-univ.ro, Publicaţii, Analele Universităţii Româno-Germane din Sibiu, Secţiunea Tehnică, Sibiu, 2003

Aspecte algebrice privind receptoarele dezechilibrate discrete m-fazate

Vasile Mircea Popa

Abstract

The paper proposes an algebraic characterisation for unbalanced discreet loads. The algebraic model is the bijection between two finite multiple sets. The number of unbalanced discreet loads is the number of equivalence classes for equivalence relation defined onto bijection set.

1. Introducere

Vom considera un receptor dezechilibrat m - fazat şi schema echivalentă în conexiune stea. Presupunem că fazele sunt distincte între ele (discernabile). Dacă impedanţele din cele m faze sunt formate (prin înseriere) din impedanţe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul m - fazat receptor dezechilibrat discret (RDD). [3], [4].

Presupunem că avem n impedanţe elementare, anume μ clase de impedanţe elementare diferite, clasa j conţinând λ_j impedanţe identice , deci:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n \, . \tag{1}$$

Cele m faze distincte ale receptorului legat în stea conţin câte li impedanţe elementare , cu:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = n \, . \tag{2}$$

Schema unui astfel de receptor dezechilibrat discret este dată în figura 1.

Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul n (l_1, l_2, ... , l_m; λ_1, λ_2, ..., λ_μ). În cele ce urmează vom subînţelege că receptorii dezechilibraţi discreţi (RDD) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

La transferul unor impedanţe elementare de pe o fază pe alta se obţin receptoare dezechilibrate diferite, care introduc diverse tipuri de dezechilibre în reţeaua din care fac parte. În particular, unele din aceste receptoare pot fi echilibrate, dar acestea pot fi considerate cazuri limită de receptoare dezechilibrate [3].

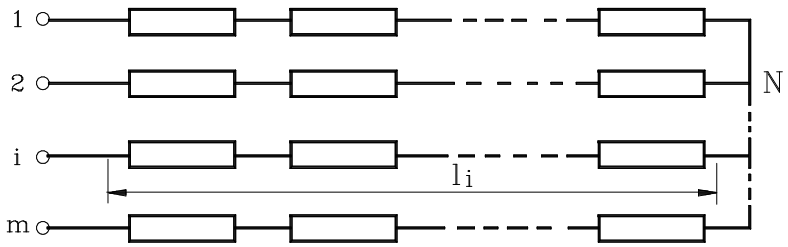


Fig.1

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibraţi discreţi. Numărul receptorilor dezechilibraţi discreţi care pot exista este finit şi îl notăm:

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}. \tag{3}$$

Pentru calcul numărului $N = N(RDD)$ se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [1], [2], [3].

2. Modelul algebric pentru RDD

Modelul algebric pentru receptorul dezechilibrat discret este bijecţia între două mulţimi multiple. [3], [4]. Considerăm două mulţimi finite X şi Y având acelaşi număr de elemente: $|X| = |Y| = n$, precum şi mulţimea bijecţiilor $f : X \to Y$, mulţime pe care o notăm Y^X.

Să considerăm o relaţie de echivalenţă (ρ_1) definită pe mulţimea X, care determină o partiţie a mulţimii X în μ clase de echivalenţă X_j conţinând câte λ_j elemente, adică $|X_j| = \lambda_j$, $j = (1,2,...,\mu)$. Elementele unei clase de echivalenţă vor fi denumite echivalente sau identice. La fel, considerăm o relaţie de echivalentă (ρ_2) definită pe mulţimea Y, care determină o partiţie a mulţimii Y în m clase de echivalenţă Y_i conţinând câte l_i elemente, adică $|Y_i| = l_i$, $i = (1,2,...,m)$. În acest fel, mulţimile X şi Y devin mulţimi multiple, adică mulţimi în care elementele se pot repeta. Utilizând această terminologie, putem spune că mulţimea X conţine μ elemente distincte, elementul j repezându-se de λ_j ori ($j = 1,2,...,\mu$). Asemănător, pentru mulţimea Y.

Vom considera acum un grup G de permutări al mulţimii X şi anume produsul simplu (sau direct) al grupurilor simetrice de permutări ale elementelor claselor de echivalenţă din X [1], [2], [3].

Acest grup se notează astfel: $G = S_{\lambda_1} \cdot S_{\lambda_2} \cdot ... \cdot S_{\lambda_\mu}$ şi se defineşte în felul următor: pentru orice $\alpha \in G$, $\alpha_j \in S_{\lambda_j}$, $x \in X_j$, avem:

$$\alpha(x)(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j, ..., \alpha_\mu)(x) = \alpha_j(x), \ j = (1,2,...,\mu). \quad (4)$$

Definiţia este consistentă. Într-adevăr, deoarece G este o submulţime finită a lui S_n, pentru ca G să fie un grup de permutări al mulţimii X (subgrup al grupului simetric S_n) este suficient să verificăm că pentru orice α, $\alpha' \in G \Rightarrow \alpha\alpha' \in G$ (am notat cu $\alpha\alpha'$ compunerea permutărilor α şi α'). Fie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j, ..., \alpha_\mu)$ şi $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_j, ..., \alpha'_\mu)$. Pentru orice $x \in X_j$, avem conform definiţiei:

$$\alpha\alpha'(x) = \alpha(\alpha'(x)) = \alpha(\alpha'_j(x)) = \alpha_j(\alpha'_j(x)) = \alpha_j\alpha'_j(x).$$

Se obţine deci:

$$\alpha\alpha' = (\alpha_1\alpha'_1, \alpha_2\alpha'_2, ..., \alpha_j\alpha'_j, ..., \alpha_\mu\alpha'_\mu),$$

şi se observă că $\alpha\alpha' \in G$.

Prin urmare G este un grup de permutări al mulţimii X. Am utilizat teorema de caracterizare a subgrupurilor finite [1], [2]. Deci, prin permutările acestui grup, orice element x al mulţimii X este transformat într-un element care aparţine aceleiaşi clase de echivalenţă ca şi x.

Analog,considerăm şi grupul H de permutări al mulţimii Y:

$$H = S_{l_1} \cdot S_{l_2} \cdot ... \cdot S_{l_m}.$$

Pentru orice $\beta \in H$, $\beta_i \in S_{l_i}$, $y \in Y_i$, avem:

$$\beta(y) = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_i, ...\beta_m)(y) = \beta_i(y), \ i = (1,2,...,m). \quad (5)$$

Deci, prin permutările acestui grup, orice element y al mulţimii Y este transformat într-un element care aparţine aceleiaşi clase de echivalenţă ca şi y.

Se poate defini o relaţie de echivalenţă (ρ) pe mulţimea Y^X, în modul următor: $f_1 \sim f_2$ dacă există $\alpha \in G$ şi $\beta \in H$ astfel încât $f_2 = \beta\ f_1\ \alpha$. Să demonstrăm că relaţia astfel definită este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea bijecţiilor $f : X \to Y$, în raport cu grupurile G şi H de permutări.

Relaţia este reflexivă: $f \sim f$, deoarece $f = \varepsilon_2\ f\ \varepsilon_1$, unde $\varepsilon_1 \in G$ şi $\varepsilon_2 \in H$ sunt permutările identice din cele două grupuri de permutări. Relaţia este simetrică: $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1$. Într-adevăr, $f_2 = \beta\ f_1\ \alpha$ conduce la $f_1 = \beta^{-1}\ f_2\ \alpha^{-1}$, unde $\alpha^{-1} \in G$ şi $\beta^{-1} \in H$,ceea ce probează afirmaţia. Relaţia este tranzitivă: $f_1 \sim f_2$ şi $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3$. Într-adevăr, din $f_2 = \beta\ f_1\ \alpha$ şi $f_3 = \beta'\ f_2\ \alpha'$ rezultă $f_3 = \beta'\beta f_1 \alpha\alpha' = \beta'' f_1 \alpha''$, unde $\beta\beta' = \beta'' \in H$ şi $\alpha\alpha' = \alpha'' \in G$.

Relaţia (ρ) de echivalenţă determină o partiţie a mulţimii Y^X în clase de echivalenţă. Numărul acestor clase de echivalenţă se notează astfel:

$$\left|Y^x / \rho\right| = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}. \quad (6)$$

Observăm că problema expusă mai sus este echivalentă cu problema definirii receptorului dezechilibrat discret (RDD). Considerăm n impedanţe elementare (μ clase de impedanţe, clasa j conţinând λ_j impedanţe identice, deci $\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j = n$) şi m faze, faza i primind l_i impedanţe elementare înseriate, cu $\sum_{i=1}^{m} l_i = n$. Se distribuie cele n impedanţe în cele m faze. Numărul de distribuiri posibile este:

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)}. \quad (7)$$

3. Concluzii

Prin urmare, modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret este bijecţia între două mulţimi multiple iar numărarea receptorilor dezechilibraţi discreţi (RDD) se reduce la numărarea bijecţiilor între două mulţimi multiple [4].

De asemenea, observăm că relaţia de dezechilibru definită pe mulţimea receptorilor discreţi este o relaţie de echivalenţă iar clasele de dezechilibru sunt clasele de echivalenţă corespuzătoare. Autorul aceste lucrari a elaborat patru metode pentru calculul numarului N(RDD) [3].

Bibliografie

[1] C. Năstăsescu , C. Niţă , C. Vraciu – *Bazele algebrei*, vol. I , Editura Academiei, Bucureşti, 1986

[2] D. Popescu , C. Vraciu – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986

[3] V. M. Popa – *Aplicaţii şi încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifa*zate *în regimuri nesimetrice*, Referat de doctorat nr. 2, Universitatea Tehnica Cluj - Napoca, Facultatea de Electrotehnică Cluj - Napoca, 1994

[4] V.M. Popa – *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 38, nr. 1, 1995

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Metode pentru analiza claselor de dezechilibru ale receptoarelor m-fazate

Vasile Mircea Popa

Abstract

This paper presents methods for m – phased loads unbalanced classes analysis. Four methods are presented and the enumeration method is detailed. The respective algorithm was programmed on the electronic computer.

1. Introducere

Receptorul dezechilibrat discret m - fazat de tipul $n(l_1,l_2,...,l_m;\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)$ a fost definit în unele lucrări anterioare [4], [5].

Autorul prezentei lucrări a elaborat patru metode pentru calculul numărului N(RDD). Acestea sunt:

1.Metoda enumerării

2.Metoda polinoamelor de tip Newton

3.Metoda de recurenţă

4.Metoda reducerii ordinului.

Metoda polinoamelor de tip Newton a fost expusă în lucrarea [4]. În continuare vom prezenta metoda enumerării.

2. Metoda enumerării

Această metodă se bazează pe observaţia că numărul N este egal cu numărul soluţiilor sistemului:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ji} = \lambda_j; \quad j = 1, 2, ..., \mu \\ \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i; \quad i = 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{1}$$

unde $\lambda_j, l_i > 0; \quad x_{ji} \geq 0$ sunt numere naturale.

Acest sistem are μm necunoscute şi $\mu + m - 1$ ecuaţii independente (datorită condiţiei $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = \sum_{i=1}^{m} l_i = n$). Prin urmare, gradul de nedeterminare al sistemului este:

$$\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1). \tag{2}$$

Se observă că numărul N reprezintă de asemenea numărul matricilor cu μ linii şi m coloane, conţinând numere naturale, la care sumele liniilor, respectiv ale coloanelor sunt impuse:

n	l_1	l_2	K	l_m
λ_1	x_{11}	x_{12}	K	x_{1m}
λ_2	x_{21}	x_{22}	K	x_{2m}
M				
λ_μ	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	K	$x_{\mu m}$

(3)

Metoda enumerării aplicată "manual" constă în construirea efectivă a matricilor de tipul (3) şi numărarea lor. Este evident că pentru n mare această variantă este total nepractică.

Pe baza metodei enumerării s-a realizat un program de calculator (numit programul RDD) care generează sistematic matrici de tipul (3) şi în final dă numărul acestor matrici. Problema se reduce la determinarea matricilor reduse de dimensiuni $\mu - 1$ şi $m - 1$, în care variabilele x_{ji} iau valori naturale cuprinse între 0 şi o valoare maximă iar suma lor este mai mare sau egală decât numărul $n - l_1 - \lambda_1$.

Putem scrie :

$$0 \leq x_{ji} \leq \min(\lambda_j - x_{j2} - x_{j3} - ... - x_{j,i-1}; l_i - x_{2i} - x_{3i} - ... - x_{j-1,i}) \tag{4}$$

$$S = \sum_{j=2}^{\mu} \sum_{i=2}^{m} x_{ji} \geq n - l_1 - \lambda_1 \tag{5}$$

cu referire la matricea :

$$M = \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & K & x_{2i} & K & x_{2m} \\ x_{32} & x_{33} & K & x_{3i} & K & x_{3m} \\ M & & & & & \\ x_{j2} & x_{j3} & K & x_{ji} & K & x_{jm} \\ M & & & & & \\ x_{\mu 2} & x_{\mu 3} & K & x_{\mu i} & K & x_{\mu m} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Numărul matricilor reduse de tipul (6) coincide cu numărul matricilor (3) şi este deci chiar N(RDD).

Câteva exemple numerice obţinute:

$$G_{8(3,2,1,1,1)}^{8(2,2,2,1,1)} = 618 \tag{7}$$

$$G_{9(3,2,2,1,1)}^{9(3,2,2,1,1)} = 1173 \tag{8}$$

$$G_{9(2,2,2,1,1,1)}^{9(3,3,1,1,1)} = 1980 \tag{9}$$

$$G_{10(2,2,2,2,2)}^{10(3,3,2,2)} = 1830 \tag{10}$$

$$G_{10(5,2,2,1)}^{10(2,2,2,1,1,1,1)} = 1875 \tag{11}$$

$$G_{10(5,2,1,1,1)}^{10(2,2,2,1,1,1,1)} = 3510 \tag{12}$$

$$G_{30(10,10,10)}^{30(10,10,10)} = 2211 \tag{13}$$

Programul RDD permite obţinerea numerelor N(RDD) în timpi variind de la o fracţiune de secundă la câteva minute, în cazul valorilor mari (de ordinul milioanelor). Utilizând metoda enumerării, respectiv programul de calculator RDD, s-au calculat toate valorile lui N(RDD) pentru n≤10. Tabelele cu numerele N(RDD) sunt date în lucrarea [5].

Tabelele conţin numerele claselor de dezechilibru pentru receptori dezechilibraţi discreţi de tipul $n(l_1, l_2, ..., l_m; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$. Numărul n este notat în colţul din stânga-sus al fiecărui tabel. Indicii inferiori sunt marcaţi în partea stângă a tabelelor, sub forma $(l_1, l_2, ..., l_m)$. Indicii superiori sunt marcaţi în partea superioară a tabelelor, sub forma $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$. La intersecţia liniei şi a coloanei respective se citeşte numărul N=N(RDD).

Tabelele sunt exhaustive şi prezintă simetrie faţă de diagonala principală, datorită proprietăţii de simetrie.

Marele avantaj al utilizării programului de calculator este posibilitatea calculării unor numere N(RDD) pentru un n oarecare, când nu dispunem de tabelele cu numerele N(RDD) pentru n-1, n-2, ... (necesare pentru metoda recursivă). În acest caz, comparaţia cu una din metodele manuale de calcul (metoda enumerării, metoda polinoamelor de tip Newton, metoda de recurenţă, metoda reducerii ordinului) evidenţiază avantajul absolut , incontestabil al utilizării programului de calculator.

Bibliografie

[1] D. Popescu, C. Vraciu – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986

[2] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu – *Bazele algebrei*, vol. I, Editura Academiei, Bucureşti, 1986

[3] V. M. Popa – *On a Question of Linear Programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol. X (1), Sibiu, 1993, pag. 65 – 67

[4] V.M. Popa –*A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 36, nr. 1, Cluj – Napoca, 1995, pag. 91 – 92

[5] V. M. Popa – *Contribuţii la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicaţii*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj-Napoca, 1999

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Metodă recursivă pentru determinarea numărului receptoarelor dezechilibrate discrete

Vasile Mircea Popa

Abstract

The paper proposes a recursive method for unbalanced discreet loads number calculation. The numbers N (RDD) can be determined recursively, using recurrence relations. At the end of the paper a numerical computational example is presented.

1. Introducere

Vom considera un receptor dezechilibrat m-fazat şi schema echivalentă în conexiune stea. Presupunem că fazele sunt distincte între ele (discernabile). Dacă impedanţele din cele m faze sunt formate (prin înseriere) din impedanţe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul m-fazat receptor dezechilibrat discret (RDD) [3], [4].

Presupunem că avem n impedanţe elementare, anume μ clase de impedanţe elementare diferite, clasa j conţinând λ_j impedanţe identice, deci:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n\,. \tag{1}$$

Cele m faze distincte ale receptorului legat în stea conţin câte li impedanţe elementare , cu:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = n\,. \tag{2}$$

Schema unui astfel de receptor dezechilibrat discret este dată in figura 1.

Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul $n(l_1,l_2,...,l_m;\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)$. În cele ce urmează vom subînţelege că receptorii dezechilibraţi discreţi (RDD) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

La transferul unor impedanţe elementare de pe o fază pe alta se obţin receptoare dezechilibrate diferite, care introduc diverse tipuri de dezechilibre în reţeaua din care fac parte. În particular, unele din aceste receptoare pot fi echilibrate, dar acestea pot fi considerate cazuri limită de receptoare dezechilibrate [4].

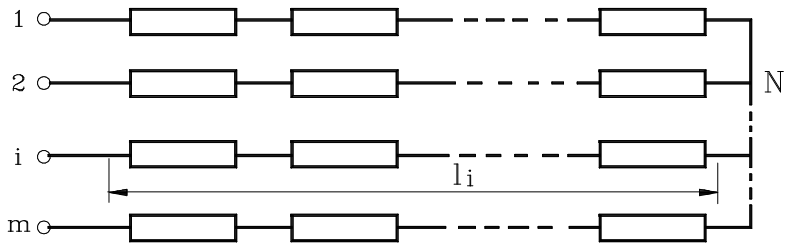


Fig.1

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibraţi discreţi. Numărul receptorilor dezechilibraţi discreţi care pot exista este finit şi îl notăm :

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}. \tag{3}$$

Pentru calcul numărului $N = N(RDD)$ se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [1], [2], [4].

În prezenta lucrare va fi expusă metoda recursivă pentru calculul numărului N(RDD) al receptoarelor dezechilibrate discrete.

2. Metoda recursivă (de recurenţă)

Numărul claselor de dezechilibru pentru receptoarele dezechilibrate discrete se poate determina cu ajutorul unor formule de recurenţă. Acestea permit calculul numărului N(RDD) de ordin n cu ajutorul unor numere N(RDD) de ordine mai mici. Formulele de recurenţă se deduc uşor, pornind de la definiţia numărului N(RDD). Prin ordonarea descrescătoare a indicilor superiori şi inferiori şi utilizarea proprietăţii de simetrie facem ca :

$$\lambda_\mu = \min\left(l_1, l_2, ..., l_m, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\right) \tag{4}$$

a) dacă $\lambda_\mu = 1$, avem:

$$G_{n\left(l_1,l_2,...,l_m\right)}^{n\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu\right)} = \sum_R G_{n-1\left(l_1,l_2,...,l_i-1,...,l_m\right)}^{n-1\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\mu-1}\right)} \tag{5}$$

unde R este mulţimea soluţiilor ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 1 \tag{6}$$

în numere naturale, cu $0 \le x_i \le 1, \quad \left(i = 1, 2, ..., m\right)$.

Numărul soluţiilor acestei ecuaţii este:

$$\left|R\right| = c_m^1 = m \text{ (combinări cu repetiţie).} \tag{7}$$

b) Dacă $\lambda_\mu = 2$, avem:

$$G_{n\left(l_1,l_2,...,l_m\right)}^{n\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu\right)} = \sum_R G_{n-2\left(l_1,l_2,...,l_i-2,...,l_m\right)}^{n-2\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\mu-1}\right)} \tag{8}$$

unde R este mulţimea soluţiilor ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 2 \tag{9}$$

în numere naturale, cu $0 \le x_i \le 2, \quad \left(i = 1, 2, ..., m\right)$.

Numărul soluţiilor acestei ecuaţii este:

$$\left|R\right| = c_m^2 = \frac{m\left(m+1\right)}{2}. \tag{10}$$

c) Dacă $\lambda_\mu = 3$, avem:

$$G_{n\left(l_1,l_2,...,l_m\right)}^{n\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu\right)} = \sum_R G_{n-3\left(l_1,l_2,...,l_i-3,...,l_m\right)}^{n-3\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\mu-1}\right)} \tag{11}$$

unde R este mulţimea soluţiilor ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 3 \tag{12}$$

în numere naturale, cu $0 \le x_i \le 3, \quad \left(i = 1, 2, ..., m\right)$.

Numărul soluţiilor acestei ecuaţii este:

$$\left|R\right| = c_m^3 = \frac{m\left(m+1\right)\left(m+2\right)}{6}. \tag{13}$$

Lista acestor formule de recurenţă poate fi continuată, dar aplicarea lor devine tot mai grea, datorită creşterii lui $\left|R\right|$.

Foarte simplă şi avantajoasă este aplicarea primelor două formule de recurenţă, deci pentru $\lambda_\mu = 1$ şi $\lambda_\mu = 2$.

Vom ilustra metoda printr-un exemplu.

Să se calculeze numărul $N = G_{10(3,3,2,2)}^{10(4,3,2,1)}$.

Aplicând formula (5) obţinem:

$$N = G_{9(2,3,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,1,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} = 2 \cdot G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + 2 \cdot G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} =$$
$$= 2 \cdot 109 + 2 \cdot 87 = 392$$

Este evident că aplicarea metodei de recurenţă pentru N(RDD) presupune cunoaşterea valorii unor astfel de numere de ordine inferioare ($n-1$, $n-2$, ...).

Bibliografie

[1] D. Popescu , C. Vraciu – *Elemente de teoria grupurilor finite,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986

[2] V.M. Popa – *On a Question of Linear Programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol. X (1), Sibiu, 1993, pag. 65-67

[3] V.M. Popa – *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 36, nr. 1, Cluj-Napoca, 1995, pag. 91-92

[4] V.M. Popa – *Contribuţii la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicaţii*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj-Napoca, 1999

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

O metodă de reducere pentru calculul numărului receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate

Vasile Mircea Popa

Abstract

A Reducing Method for the m-Phased Discreet Unbalanced Loads Number Calculation

The paper proposes a new method for calculating the number of equivalence classes for discreet unbalanced loads, the order reducing method. The discreet unbalanced load is defined in this paper. This paper presents a method for unbalanced discreet loads number calculation. Four methods are presented and the reducing method is also detailed. At the end of the paper the conclusions and references are presented.

1. Introducere

Considerăm un receptor dezechilibrat m-fazat şi schema echivalentă în conexiunea stea (fig. 1).

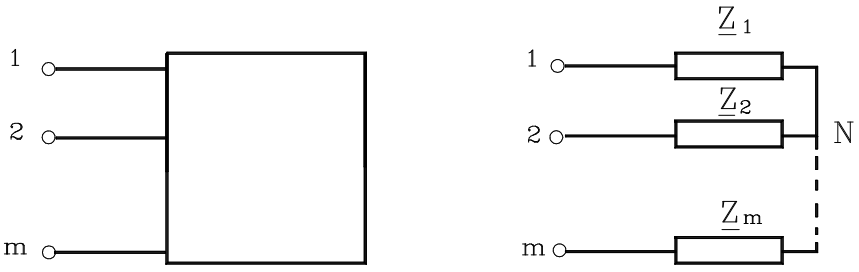


Fig. 1. Receptor dezechilibrat m-fazat şi schema echivalentă în stea

În fazele receptorului se găsesc impedanţele complexe $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, ..., \underline{Z}_m$ şi considerăm fazele distincte (discernabile).

Dacă aceste impedanţe sunt formate (prin înseriere) din impedanţe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul m-fazat receptor dezechilibrat discret (RDD) [4], [5], [6].

Presupunem că avem n impedanţe elementare, anume μ clase de impedanţe elementare diferite, clasa j conţinând λj impedanţe identice, deci:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n \,. \tag{1}$$

Cele m faze distincte ale receptorului legat în stea conţin câte li impedanţe elementare, cu:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = n \,. \tag{2}$$

Schema unui astfel de receptor dezechilibrat discret este dată in figura 2.

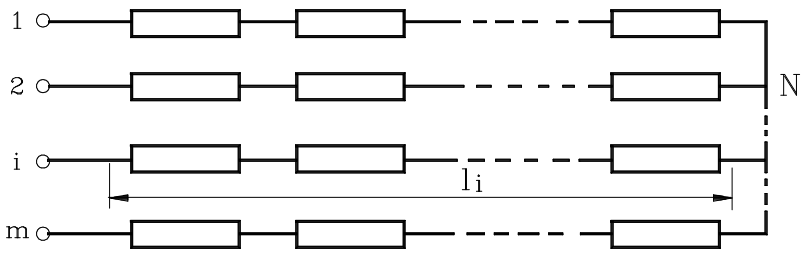


Fig.2. Schema unui receptor dezechilibrat discret (RDD)

Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul n (l1, l2, ... , lm; λ1, λ2, ..., λμ). În cele ce urmează vom subînţelege că receptorii dezechilibraţi discreţi (RDD) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

La transferul unor impedanţe elementare de pe o faza pe alta se obţin receptoare dezechilibrate diferite, care introduc diverse tipuri de dezechilibre în reţeaua din care fac parte.

În particular, unele din aceste receptoare pot fi echilibrate, dar acestea pot fi considerate cazuri limită de receptoare dezechilibrate, în conformitate cu punctul de vedere evidenţiat în lucrarea [5].

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibraţi discreţi.

Numărul receptorilor dezechilibraţi discreţi care pot exista este finit şi îl notăm:

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_u)} \quad . \tag{3}$$

Pentru calcul numărului N = N (RDD) se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [4], [5].

2. Metode pentru calculul numărului N(RDD)

Autorul prezentei lucrări a elaborat patru metode pentru calculul numărului N(RDD). Acestea sunt:

1. Metoda enumerării [5], [6]
2. Metoda polinoamelor de tip Newton [4]
3. Metoda de recurenţă [5]
4. Metoda reducerii ordinului.

Primele trei metode sunt dezvoltate în referinţele bibliografice indicate.

În continuare vom prezenta metoda reducerii ordinului.

3. O metodă de reducere a ordinului

Considerăm simbolul general:

$$N = N(RDD) = G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} \tag{4}$$

Dacă $l_1 + \lambda_1 > n$, putem afirma că:

$$G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} = G^{2n-l_1-\lambda_1(n-l_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{2n-l_1-\lambda_1(n-\lambda_1, l_2, ..., l_m)} \tag{5}$$

şi ordinul este redus.

Să considerăm matricea:

n	l_1	l_2	Λ	l_m
λ_1	x_{11}	x_{12}	Λ	x_{1m}
λ_2	x_{21}	x_{22}	Λ	x_{2m}
M	M			
λ_μ	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	Λ	$x_{\mu m}$

(6)

Separând primul rând şi prima coloană, obţinem matricea redusă, de dimensiuni $(\mu - 1)(m - 1)$.

Fie N_ν numărul de cazuri în care matricea redusă ia valoarea ν (suma elementelor).

Fie simbolurile:

$$G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} = G_n \tag{7}$$

$$G^{n-1(\lambda_1-1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n-1(l_1-1, l_2, ..., l_m)} = G_{n-1} \tag{8}$$

$$G^{n-2(\lambda_1-2, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n-2(l_1-2, l_2, ..., l_m)} = G_{n-2} \tag{9}$$

$$G^{n-3(\lambda_1-3, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n-3(l_1-3, l_2, ..., l_m)} = G_{n-3}. \tag{10}$$

Putem afirma că:

-dacă $l_1 + \lambda_1 = n$

$$G_n = G_{n-1} + N_0 \tag{11}$$

$$G_n = G_{n-2} + N_0 + N_1 \tag{12}$$

$$G_n = G_{n-3} + N_0 + N_1 + N_2 \tag{13}$$

-dacă $l_1 + \lambda_1 = n - 1$

$$G_n = G_{n-1} + N_1 \tag{14}$$

$$G_n = G_{n-2} + N_1 + N_2 \tag{15}$$

-dacă $l_1 + \lambda_1 = n - 2$

$$G_n = G_{n-1} + N_2 \tag{16}$$

Vom calcula numerele N_ν, $(\nu = 0, 1, 2)$.

În simbolul general:

$$N = N(RDD) = G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} \tag{17}$$

aplicăm proprietatea de simetrie, astfel încât $l_1 \geq \lambda_1$. Indicii inferiori şi superiori sunt în ordine descrescătoare:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_\mu \tag{18}$$

$$l_1 \geq l_2 \geq ... \geq l_m. \tag{19}$$

În mulţimea de numere $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu$, facem următoarele notaţii:

α_1 = numărul de cifre 1; α_2 = numărul de cifre 2; …, $\alpha_{\nu-1}$ = numărul de cifre $\nu-1$, α_ν = numărul de cifre ν sau mai mari decât ν.

Putem afirma că: $$\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu=\mu-1 \quad (20)$$

Obţinem expresiile: $$N_0=1 \quad (21)$$

$$N_1=(\mu-1)(m-1) \quad (22)$$

$$N_2=\alpha_2 G^{n-l_1(2,\,n-l_1-2)}_{n-l_1(l_2,\,...,\,l_m)}+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}G^{n-l_1(1,\,1,\,n-l_1-2)}_{n-l_1(l_2,\,...,\,l_n)}. \quad (23)$$

Metoda reducerii ordinului constă în aplicarea relaţiilor: (5), (11), ..., (16) şi (21), (22), (23).

Similar cu metoda de recurenţă, metoda reducerii ordinului pentru calculul numerelor N(RDD) presupune cunoaşterea valorilor unor asemenea numere de ordin inferior.

4. Concluzii

Dintre metodele “manuale” de calcul, deosebit de practice sunt formulele de reducere a ordinului pentru l1 + λ1 > n; l1 + λ1 = n; l1 + λ1 = n - 1. Deci, 3 formulele de calcul simple cu care se pot calcula din aproape în aproape orice tabele cu numere N(RDD), bazându-ne pe cele existente (anterioare,cu n mai mic).

Bibliografie

[1] Popescu, D., Vraciu, C. – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986

[2] Năstăsescu, C., Niţă, C., Vraciu, C. –*Bazele algebrei*, vol. I, Editura Academiei, Bucureşti, 1986

[3] Popa, V. M. – *On a Question of Linear Programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol. X (1), Sibiu, 1993, pag. 65 – 67

[4] Popa, V. M. – *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 36, nr. 1, Cluj - Napoca, 1995, pag. 91 – 92

[5] Popa, V. M. – *Contribuţii la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicaţii*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj - Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj - Napoca, 1999

[6] Popa,V.M. – *Program de calculator pentru analiza structurii receptoarelor dezechilibrate discrete*, Lucrările primei conferinţe tehnico-ştiinţifice “Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii româneşti”, volumul Tehnică şi Inginerie, pag. 121-126, Sebeş, 8-10 iunie 2001

Analiza asistată de calculator a receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate

Vasile Mircea Popa

Abstract

The Computer Aided Analysis of the m-Phased Discreet Unbalanced Loads

The paper proposes a computer program for calculating the number of equivalence classes for discreet unbalanced loads. The determination of this number is a combinatorial problem of distributing n impedances (μ classes of impedances where the class j contains λj equivalent impedances) in m phases of capacity li. The enumeration method algorithm was programmed on the electronic computer. In the paper numerical computational examples are given.

1. Introducere

Considerăm un receptor dezechilibrat m-fazat şi schema echivalentă în conexiunea stea. În fazele receptorului se găsesc impedanţele complexe $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, ..., \underline{Z}_m$ şi considerăm fazele distincte (discernabile). Dacă aceste impedanţe sunt formate (prin înseriere) din impedanţe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul m-fazat receptor dezechilibrat discret (RDD). [4], [5], [6].

Presupunem că avem n impedanţe elementare, anume μ clase de impedanţe elementare diferite, clasa j conţinând λ_j impedanţe identice. Cele m faze distincte ale receptorului legat în stea conţin câte l_i impedanţe elementare. Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul $n(l_1, l_2, ..., l_m; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$. În cele ce urmează vom subînţelege că receptorii dezechilibraţi discreţi (RDD) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibraţi discreţi.

Numărul receptorilor dezechilibraţi discreţi care pot exista este finit şi îl notăm :

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_u)}. \quad (1)$$

Pentru calcul numărului N = N (RDD) se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [4], [5].

2. Metode pentru analiza receptoarelor dezechilibrate discrete

Autorul prezentei lucrări a elaborat patru metode pentru calculul numărului N(RDD). Acestea sunt:

1. Metoda enumerării
2. Metoda polinoamelor de tip Newton
3. Metoda de recurenţă
4. Metoda reducerii ordinului.

În continuare vom prezenta metoda enumerării.

Această metodă se bazează pe observaţia că numărul N este egal cu numărul soluţiilor sistemului:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ji} = \lambda_j; \quad j = 1, 2, ..., \mu \\ \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i; \quad i = 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{2}$$

unde $\lambda_j, l_i > 0; \quad x_{ji} \geq 0$ sunt numere naturale.

Acest sistem are μm necunoscute şi $\mu + m - 1$ ecuaţii independente (datorită condiţiei $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = \sum_{i=1}^{m} l_i = n$). Prin urmare, gradul de nedeterminare al sistemului este:

$$\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1) \tag{3}$$

Se observă că numărul N reprezintă de asemenea numărul matricilor cu μ linii şi m coloane, conţinând numere naturale, la care sumele liniilor, respectiv ale coloanelor sunt impuse:

n	l_1	l_2	K	l_m
λ_1	x_{11}	x_{12}	K	x_{1m}
λ_2	x_{21}	x_{22}	K	x_{2m}
M				
λ_μ	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	K	$x_{\mu m}$

(4)

Metoda enumerării aplicată "manual" constă în construirea efectivă a matricilor de tipul (4) şi numărarea lor. Este evident că pentru n mare această variantă este total nepractică.

3. Analiză asistată de calculator

Pentru valori mari ale lui n, calculul numărului N(RDD) prin metodele arătate anterior este dificil.

Pe baza metodei enumerării s-a realizat un program de calculator (numit programul RDD) care generează sistematic matrici de tipul (4) şi în final dă numărul acestor matrici. Problema se reduce la determinarea matricilor reduse de dimensiuni $\mu - 1$ şi $m - 1$, în care variabilele x_{ji} iau valori naturale cuprinse între 0 şi o valoare maximă iar suma lor este mai mare sau egală decât numărul $n - l_1 - \lambda_1$.

Putem scrie :

$$0 \leq x_{ji} \leq \min\left(\lambda_j - x_{j2} - x_{j3} - ... - x_{j,i-1}; l_i - x_{2i} - x_{3i} - ... - x_{j-1,i}\right) \tag{5}$$

$$S = \sum_{j=2}^{\mu} \sum_{i=2}^{m} x_{ji} \geq n - l_1 - \lambda_1 \tag{6}$$

cu referire la matricea:

$$M = \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & K & x_{2i} & K & x_{2m} \\ x_{32} & x_{33} & K & x_{3i} & K & x_{3m} \\ M & & & & & \\ x_{j2} & x_{j3} & K & x_{ji} & K & x_{jm} \\ M & & & & & \\ x_{\mu 2} & x_{\mu 3} & K & x_{\mu i} & K & x_{\mu m} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Numărul matricilor reduse de tipul (7) coincide cu numărul matricilor (4) şi este deci chiar N(RDD).

În continuare vom prezenta câteva rezultate numerice obţinute utilizând programul de calculator RDD. Primele cinci rezultate ar putea fi obţinute şi prin una din metodele “manuale” de calcul.

$G_{8(3,2,1,1,1)}^{8(2,2,2,1,1)} = 618$	$G_{9(3,2,2,1,1)}^{9(3,2,2,1,1)} = 1173$
$G_{9(2,2,2,1,1,1)}^{9(3,3,1,1,1)} = 1980$	$G_{10(2,2,2,2,2)}^{10(3,3,2,2)} = 1830$
$G_{10(5,2,2,1)}^{10(2,2,2,1,1,1,1)} = 1875$	$G_{30(10,10,10)}^{30(10,10,10)} = 2211$

Ecranul programului RDD este prezentat în figura 1:

```
INTRODUCETI DIMENSIUNILE MATRICII:

Numarul de linii:      5
Numarul de coloane:    5

INTRODUCETI PARAMETRII:
    n =  15

INTRODUCETI COMPONENTELE PE LINII
   la1 = 5
   la2 = 4
   la3 = 2
   la4 = 2
   la5 = 2

INTRODUCETI COMPONENTELE PE COLOANE
   l1 = 7
   l2 = 3
   l3 = 2
   l4 = 2
   l5 = 1


NUMARUL DE DEZECHILIBRE POSIBILE ESTE

          [n = 15]  [5 linii]
        G                      = 14981
          [n = 15]  [5 coloane]

Continuati? [d/n]
```

Fig. 1 Ecranul programului RDD (ecranul de lucru)

Programul RDD permite obţinerea numerelor N(RDD) în timpi variind de la o fracţiune de secundă la câteva minute, în cazul valorilor mari (de ordinul milioanelor). Utilizând metoda enumerării, respectiv programul de calculator RDD, s-au calculat toate valorile lui N(RDD)

pentru n≤10. Tabelele cu numerele N(RDD) sunt date în lucrarea [5]. Tabelele conţin numerele claselor de dezechilibru pentru receptori dezechilibraţi discreţi de tipul $n(l_1,l_2,...,l_m;\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)$. Numărul n este notat în colţul stânga-sus al fiecărui tabel. Indicii inferiori sunt marcaţi în partea stângă a tabelelor, sub forma $(l_1,l_2,...,l_m)$. Indicii superiori sunt marcaţi în partea superioară a tabelelor, sub forma $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)$.

La intersecţia liniei şi a coloanei respective se citeşte numărul N=N(RDD).

Tabelele sunt exhaustive şi prezintă simetrie faţă de diagonala principală.

4. Concluzii

Numerele N = N(RDD) sunt cu atât mai "simple" (mai mici şi mai uşor de calculat) cu atât ordinul n este mai mic. Din acest motiv, tabelele s-au calculat în ordinea prezentată, adică începând cu n = 1, continuând cu n = 2 ş.a.m.d. până la n = 10. Dintre metodele "manuale" de calcul, deosebit de practice sunt formulele de recurenţă pentru $\lambda_\mu = 1$ şi $\lambda_\mu = 2$ şi formulele de reducere a ordinului pentru $l_1 + \lambda_1 > n$; $l_1 + \lambda_1 = n$; $l_1 + \lambda_1 = n - 1$. Deci, 5 formulele de calcul simple cu care se pot calcula din aproape în aproape orice tabel, bazându-ne pe cele existente (anterioare). Totuşi un astfel de calcul „manual" al primelor 10 tabele cu numerele N(RDD) necesită circa 40 de ore de calcul.

Programul de calculator RDD, scris în limbajul C şi rulat pe un calculator AMD K7 750 MHz, 128 MB memorie RAM şi 20 GB pentru HDD permite efectuarea aceluiaşi calcul în circa 8 ore (aici este evident inclus şi timpul necesar introducerii datelor). Marele avantaj al utilizării programului de calculator este posibilitatea calculării unor numere N(RDD) pentru un n oarecare, când nu dispunem de tabelele cu numerele N(RDD) pentru n-1, n-2, ... (necesare pentru metoda recursivă). În acest caz, comparaţia cu una din metodele manuale de calcul (metoda enumerării, metoda polinoamelor de tip Newton, metoda de recurenţă, metoda reducerii ordinului) evidenţiază avantajul absolut, incontestabil al utilizării programului de calculator.

Programul de calculator RDD, cu o minimă modificare, permite şi afişarea structurii receptoarelor dezechilibrate discrete prin intermediul matricii reprezentative (4).

Bibliografie

[1] Popescu, D., Vraciu, C. – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

[2] Năstăsescu, C., Niţă, C., Vraciu, C. – *Bazele algebrei*, vol. I, Editura Academiei, Bucureşti, 1986.

[3] Popa, V. M. – *On a Question of Linear Programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol. X (1), Sibiu, 1993, pag. 65 – 67.

[4] Popa, V. M. – *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 36, nr. 1, Cluj - Napoca, 1995, pag. 91 – 92.

[5] Popa, V. M. – *Contribuţii la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicaţii*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj - Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj - Napoca, 1999.

[6] Popa, V. M. – *Program de calculator pentru analiza structurii receptoarelor dezechilibrate discrete*, Lucrările primei conferinţe tehnico-ştiinţifice "Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii româneşti", volumul Tehnică şi Inginerie, pag. 121-126, Sebeş, 8-10 iunie 2001.

ANEXE

Tabel cu numerele $N = G^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$ **pentru n=1,2,…,9.**

Tabelul 1 (n = 1)

1	(1)
(1)	1

Tabelul 2 (n = 2)

2	(2)	(1,1)
(2)	1	1
(1,1)	1	2

Tabelul 3 (n = 3)

3	(3)	(2,1)	(1,1,1)
(3)	1	1	1
(2,1)	1	2	3
(1,1,1)	1	3	6

Tabelul 4 (n = 4)

4	(4)	(3,1)	(2,2)	(2,1,1)	(1,1,1,1)
(4)	1	1	1	1	1
(3,1)	1	2	2	3	4
(2,2)	1	2	3	4	6
(2.1.1)	1	3	4	7	12
(1,1,1,1)	1	4	6	12	24

Tabelul 5 (n = 5)

5	(5)	(4,1)	(3,2)	(3,1,1)	(2,2,1)	(2,1,1,1)	(1,1,1,1,1)
(5)	1	1	1	1	1	1	1
(4,1)	1	2	2	3	3	4	5
(3,2)	1	2	3	4	5	7	10
(3,1,1)	1	3	4	7	8	13	20
(2,2,1)	1	3	5	8	11	18	30
(2,1,1,1)	1	4	7	13	18	33	60
(1,1,1,1,1)	1	5	10	20	30	60	120

Tabelul 6 (n = 6)

6	(6)	(5,1)	(4,2)	(3,3)	(4,1,1)	(3,2,1)	(2,2,2)
(6)	1	1	1	1	1	1	1
(5,1)	1	2	2	2	3	3	3
(4,2)	1	2	3	3	4	5	6
(3,3)	1	2	3	4	4	6	7
(4,1,1)	1	3	4	4	7	8	9
(3,2,1)	1	3	5	6	8	12	15
(2,2,2)	1	3	6	7	9	15	21
(3,1,1,1)	1	4	7	8	13	19	24
(2,2,1,1),	1	4	8	10	14	24	33
(2,1,1,1,1)	1	5	11	14	21	38	54
(1,1,1,1,1,1)	1	6	15	20	30	60	90

6	(3,1,1,1)	(2,2,1,1)	(2,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1)
(6)	1	1	1	1
(5,1)	4	4	5	6
(4,2)	7	8	11	15
(3,3)	8	10	14	20
(4,1,1)	13	14	21	30
(3,2,1)	19	24	38	60
(2,2,2)	24	33	54	90
(3,1,1,1)	34	42	72	120
(2,2,1,1),	42	58	102	180
(2,1,1,1,1)	72	102	192	360
(1,1,1,1,1,1)	120	180	360	720

Tabelul 7 (n = 7)

7	(7)	(6,1)	(5,2)	(4,3)	(5,1,1)	(4,2,1)	(3,3,1)	(3,2,2)	(4,1,1,1)
(7)	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(6,1)	1	2	2	2	3	3	3	3	4
(5,2)	1	2	3	3	4	5	5	6	7
(4,3)	1	2	3	4	4	6	7	8	8
(5,1,1)	1	3	4	4	7	8	8	9	13
(4,2,1)	1	3	5	6	8	12	13	16	19
(3,.3,1)	1	3	5	7	8	13	16	19	20
(3,2,2)	1	3	6	8	9	16	19	25	25
(4,1,1,1)	1	4	7	8	13	19	20	25	34
(3,2,1,1)	1	4	8	11	14	25	30	39	43
(2,2,2,1)	1	4	9	13	15	30	37	51	51
(3,1,1,1,1)	1	5	11	15	21	39	46	62	73
(2,2,1,1,1)	1	5	12	18	22	46	58	81	84
(2,1,1,1,1,1)	1	6	16	25	31	70	90	130	135
(1,1,1,1,1,1,1)	1	7	21	35	42	105	140	210	210

7	(3,2,1,1)	(2,2,2,1)	(3,1,1,1,1)	(2,2,1,1,1)	(2,1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1,1)
(7)	1	1	1	1	1	1
(6,1)	4	4	5	5	6	7
(5,2)	8	9	11	12	16	21
(4,3)	11	13	15	18	25	35
(5,1,1)	14	15	21	22	31	42
(4,2,1)	25	30	39	46	70	105
(3,.3,1)	30	37	46	58	90	140
(3,2,2)	39	51	62	81	130	210
(4,1,1,1)	43	51	73	84	135	210
(3,2,1,1)	67	87	114	148	250	420
(2,2,2,1)	87	120	150	207	360	630
(3,1,1,1,1)	114	150	208	270	480	840
(2,2,1,1,1)	148	207	270	378	690	1260
(2,1,1,1,1,1)	250	360	480	690	1320	2520
(1,1,1,1,1,1,1)	420	630	840	1260	2520	5040

Tabelul 8 (n = 8)

8	(8)	(7,1)	(6,2)	(5,3)	(6,1,1)	(4,4)
(8)	1	1	1	1	1	1
(7,1)	1	2	2	2	3	2
(6,2)	1	2	3	3	4	3
(5,3)	1	2	3	4	4	4
(6,1,1)	1	3	4	4	7	4
(4,4)	1	2	3	4	4	5
(5,2,1)	1	3	5	6	8	6
(4,3,1)	1	3	5	7	8	8
(5,1,1,1)	1	4	7	8	13	8
(4,2,2)	1	3	6	8	9	9
(3,3,2)	1	3	6	9	9	10
(4,2,1,1)	1	4	8	11	14	12
(3,3,1,1)	1	4	8	12	14	14
(3,2,2,1)	1	4	9	14	15	16
(4,1,1,1,1)	1	5	11	15	21	16
(2,2,2,2)	1	4	10	16	16	19
(3,2,1,1,1)	1	5	12	19	22	22
(2,2,2,1,1)	1	5	13	22	23	26
(3,1,1,1,1,1)	1	6	16	26	31	30
(2,2,1,1,1,1)	1	6	17	30	32	36
(2,1,1,1,1,1,1)	1	7	22	41	43	50
(1,1,1,1,1,1,1,1)	1	8	28	56	56	70

8	(5,2,1)	(4,3,1)	(5,1,1,1)	(4,2,2)	(3,3,2)
(8)	1	1	1	1	1
(7,1)	3	3	4	3	3
(6,2)	5	5	7	6	6
(5,3)	6	7	8	8	9
(6,1,1)	8	8	13	9	9
(4,4)	6	8	8	9	10
(5,2,1)	12	13	19	16	17
(4,3,1)	13	17	20	20	23
(5,1,1,1)	19	20	34	25	26
(4,2,2)	16	20	25	26	29
(3,3,2)	17	23	26	29	35
(4,2,1,1)	25	31	43	40	45
(3,3,1,1)	26	36	44	45	54
(3,2,2,1)	31	43	52	57	69
(4,1,1,1,1)	39	47	73	63	70
(2,2,2,2)	36	52	60	72	88
(3,2,1,1,1)	47	66	85	89	108
(2,2,2,1,1)	54	80	96	111	139
(3,1,1,1,1,1)	71	100	136	140	170
(2,2,1,1,1,1)	80	122	150	173	220
(2,1,1,1,1,1,1)	117	185	228	270	350
(1,1,1,1,1,1,1,1)	168	280	336	420	560

Tabelul 8 (continuare)

8	(4,2,1,1)	(3,3,1,1)	(3,2,2,1)	(4,1,1,1,1)	(2,2,2,2)	(3,2,1,1,1)	(2,2,2,1,1)
(8)	1	1	1	1	1	1	1
(7,1)	4	4	4	5	4	5	5
(6,2)	8	8	9	11	10	12	13
(5,3)	11	12	14	15	16	19	22
(6,1,1)	14	14	15	21	16	22	23
(4,4)	12	14	16	16	19	22	26
(5,2,1)	25	26	31	39	36	47	54
(4,3,1)	31	36	43	47	52	66	80
(5,1,1,1)	43	44	52	73	60	85	96
(4,2,2)	40	45	57	63	72	89	111
(3,3,2)	45	54	69	70	88	108	139
(4,2,1,1)	68	76	96	115	120	160	198
(3,3,1,1)	76	92	116	126	148	194	248
(3,2,2,1)	96	116	154	162	204	260	345
(4,1,1,1,1)	115	126	162	209	204	286	354
(2,2,2,2)	120	148	204	204	282	348	480
(3,2,1,1,1)	160	194	260	286	348	463	618
(2,2,2,1,1)	198	248	345	354	480	618	861
(3,1,1,1,1,1)	265	320	440	500	600	820	1110
(2,2,1,1,1,1)	324	412	584	606	828	1092	1548
(2,1,1,1,1,1,1)	525	680	990	1020	1440	1920	2790
(1,1,1,1,1,1,1,1)	840	1120	1680	1680	2520	3360	5040

8	(3,1,1,1,1,1)	(2,2,1,1,1,1)	(2,1,1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1,1,1)
(8)	1	1	1	1
(7,1)	6	6	7	8
(6,2)	16	17	22	28
(5,3)	26	30	41	56
(6,1,1)	31	32	43	56
(4,4)	30	36	50	70
(5,2,1)	71	80	117	168
(4,3,1)	100	122	185	280
(5,1,1,1)	136	150	228	336
(4,2,2)	140	173	270	420
(3,3,2)	170	220	350	560
(4,2,1,1)	265	324	525	840
(3,3,1,1)	320	412	680	1120
(3,2,2,1)	440	584	990	1680
(4,1,1,1,1)	500	606	1020	1680
(2,2,2,2)	600	828	1440	2520
(3,2,1,1,1)	820	1092	1920	3360
(2,2,2,1,1)	1110	1548	2790	5040
(3,1,1,1,1,1)	1520	2040	3720	6720
(2,2,1,1,1,1)	2040	2892	5400	10080
(2,1,1,1,1,1,1)	3720	5400	10440	20160
(1,1,1,1,1,1,1,1)	6720	10080	20160	40320

Tabelul 9 (n = 9)

9	(9)	(8,1)	(7,2)	(7,1,1)	(6,3)
(9)	1	1	1	1	1
(8,1)	1	2	2	3	2
(7,2)	1	2	3	4	3
(7,1,1)	1	3	4	7	4
(6,3)	1	2	3	4	4
(5,4)	1	2	3	4	4
(6,2,1)	1	3	5	8	6
(5,3,1)	1	3	5	8	7
(6,1,1,1)	1	4	7	13	8
(4,4,1)	1	3	5	8	7
(5,2,2)	1	3	6	9	8
(4,3,2)	1	3	6	9	9
(5,2,1,1)	1	4	8	14	11
(3,3,3)	1	3	6	9	10
(4,3,1,1)	1	4	8	14	12
(5,1,1,1,1)	1	5	11	21	15
(4,2,2,1)	1	4	9	15	14
(3,3,2,1)	1	4	9	15	15
(3,2,2,2)	1	4	10	16	17
(4,2,1,1,1)	1	5	12	22	19
(3,3,1,1,1)	1	5	12	22	20
(3,2,2,1,1)	1	5	13	23	23
(4,1,1,1,1,1)	1	6	16	31	26
(2,2,2,2,1)	1	5	14	24	26
(3,2,1,1,1,1)	1	6	17	32	31
(2,2,2,1,1,1)	1	6	18	33	35
(3,1,1,1,1,1,1)	1	7	22	43	42
(2,2,1,1,1,1,1)	1	7	23	44	47
(2,1,1,1,1,1,1,1)	1	8	29	57	63
(1,1,1,1,1,1,1,1,1)	1	9	36	72	84

9	(5,4)	(6,2,1)	(5,3,1)	(6,1,1,1)	(4,4,1)
(9)	1	1	1	1	1
(8,1)	2	3	3	4	3
(7,2)	3	5	5	7	5
(7,1,1)	4	8	8	13	8
(6,3)	4	6	7	8	7
(5,4)	5	6	8	8	9
(6,2,1)	6	12	13	19	13
(5,3,1)	8	13	17	20	18
(6,1,1,1)	8	19	20	34	20
(4,4,1)	9	13	18	20	21
(5,2,2)	9	16	20	25	21
(4,3,2)	11	17	24	26	27
(5,2,1,1)	12	25	31	43	32
(3,3,3)	12	18	27	27	30
(4,3,1,1)	15	26	37	44	42
(5,1,1,1,1)	16	39	47	73	48
(4,2,2,1)	17	31	44	52	49
(3,3,2,1)	19	32	49	53	56
(3,2,2,2)	22	37	58	61	67
(4,2,1,1,1)	23	47	67	85	74
(3,3,1,1,1)	26	48	74	86	86
(3,2,2,1,1)	30	55	88	97	102
(4,1,1,1,1,1)	31	71	101	136	110
(2,2,2,2,1)	35	62	104	108	123
(3,2,1,1,1,1)	41	81	132	151	154
(2,2,2,1,1,1)	48	90	156	165	186
(3,1,1,1,1,1,1)	56	118	197	229	230
(2,2,1,1,1,1,1)	66	129	232	246	280
(2,1,1,1,1,1,1,1)	91	182	343	357	420

(1,1,1,1,1,1,1,1)	126	252	504	504	630

Tabelul 9 (continuare)

9	(5,2,2)	(4,3,2)	(5,2,1,1)	(3,3,3)	(4,3,1,1)
(9)	1	1	1	1	1
(8,1)	3	3	4	3	4
(7,2)	6	6	8	6	8
(7,1,1)	9	9	14	9	14
(6,3)	8	9	11	10	12
(5,4)	9	11	12	12	15
(6,2,1)	16	17	25	18	26
(5,3,1)	20	24	31	27	37
(6,1,1,1)	25	26	43	27	44
(4,4,1)	21	27	32	30	42
(5,2,2)	26	30	40	33	46
(4,3,2)	30	39	46	45	60
(5,2,1,1)	40	46	68	51	77
(3,3,3)	33	45	51	55	69
(4,3,1,1)	46	60	77	69	101
(5,1,1,1,1)	63	71	115	78	127
(4,2,2,1)	58	75	97	87	125
(3,3,2,1)	63	87	105	105	145
(3,2,2,2)	78	109	129	132	181
(4,2,1,1,1)	90	116	161	135	206
(3,3,1,1,1)	97	135	172	162	240
(3,2,2,1,1)	119	169	210	207	298
(4,1,1,1,1,1)	141	180	266	210	335
(2,2,2,2,1)	144	212	252	264	372
(3,2,1,1,1,1)	183	263	339	324	486
(2,2,2,1,1,1)	219	330	402	417	606
(3,1,1,1,1,1,1)	282	410	543	510	785
(2,2,1,1,1,1,1)	333	515	634	660	980
(2,1,1,1,1,1,1,1)	504	805	987	1050	1575
(1,1,1,1,1,1,1,1,1)	756	1260	1512	1680	2520

9	(5,1,1,1,1)	(4,2,2,1)	(3,3,2,1)	(3,2,2,2)	(4,2,1,1,1)
(9)	1	1	1	1	1
(8,1)	5	4	4	4	5
(7,2)	11	9	9	10	12
(7,1,1)	21	15	15	16	22
(6,3)	15	14	15	17	19
(5,4)	16	17	19	22	23
(6,2,1)	39	31	32	37	47
(5,3,1)	47	44	49	58	67
(6,1,1,1)	73	52	53	61	85
(4,4,1)	48	49	56	67	74
(5,2,2)	63	58	63	78	90
(4,3,2)	71	75	87	109	116
(5,2,1,1)	115	97	105	129	161
(3,3,3)	78	87	105	132	135
(4,3,1,1)	127	125	145	181	206
(5,1,1,1,1)	209	163	174	216	287
(4,2,2,1)	163	163	188	243	272
(3,3,2,1)	174	188	227	295	313
(3,2,2,2)	216	243	295	396	408
(4,2,1,1,1)	287	272	313	408	479
(3,3,1,1,1)	302	313	378	496	548
(3,2,2,1,1)	370	403	493	666	710
(4,1,1,1,1,1)	501	455	520	690	840
(2,2,2,2,1)	444	516	644	894	912
(3,2,1,1,1,1)	626	669	822	1128	1229
(2,2,2,1,1,1)	738	852	1077	1515	1556
(3,1,1,1,1,1,1)	1044	1110	1370	1920	2115
(2,2,1,1,1,1,1)	1206	1405	1800	2580	2670
(2,1,1,1,1,1,1,1)	1932	2310	3010	4410	4515

(1,1,1,1,1,1,1,1)	3024	3780	5040	7560	7560

Tabelul 9 (continuare)

9	(3,3,1,1,1)	(3,2,2,1,1)	(4,1,1,1,1,1)	(2,2,2,2,1)	(3,2,1,1,1,1)	(2,2,2,1,1,1)
(9)	1	1	1	1	1	1
(8,1)	5	5	6	5	6	6
(7,2)	12	13	16	14	17	18
(7,1,1)	22	23	31	24	32	33
(6,3)	20	23	26	26	31	35
(5,4)	26	30	31	35	41	48
(6,2,1)	48	55	71	62	81	90
(5,3,1)	74	88	101	104	132	156
(6,1,1,1)	86	97	136	108	151	165
(4,4,1)	86	102	110	123	154	186
(5,2,2)	97	119	141	144	183	219
(4,3,2)	135	169	180	212	263	330
(5,2,1,1)	172	210	266	252	339	402
(3,3,3)	162	207	210	264	324	417
(4,3,1,1)	240	298	335	372	486	606
(5,1,1,1,1)	302	370	501	444	626	738
(4,2,2,1)	313	403	455	516	669	852
(3,3,2,1)	378	493	520	644	822	1077
(3,2,2,2)	496	666	690	894	1128	1515
(4,2,1,1,1)	548	710	840	912	1229	1556
(3,3,1,1,1)	664	868	950	1140	1508	1980
(3,2,2,1,1)	868	1173	1250	1584	2064	2787
(4,1,1,1,1,1)	950	1250	1545	1620	2250	2880
(2,2,2,2,1)	1140	1584	1620	2202	2820	3924
(3,2,1,1,1,1)	1508	2064	2250	2820	3764	5130
(2,2,2,1,1,1)	1980	2787	2880	3924	5130	7227
(3,1,1,1,1,1,1)	2600	3630	4020	5040	6840	9450
(2,2,1,1,1,1,1)	3420	4900	5070	7020	9300	13320
(2,1,1,1,1,1,1,1)	5880	8610	8820	12600	16800	24570
(1,1,1,1,1,1,1,1,1)	10080	15120	15120	22680	30240	45360

9	(3,1,1,1,1,1,1)	(2,2,1,1,1,1,1)	(2,1,1,1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1,1,1,1)
(9)	1	1	1	1
(8,1)	7	7	8	9
(7,2)	22	23	29	36
(7,1,1)	43	44	57	72
(6,3)	42	47	63	84
(5,4)	56	66	91	126
(6,2,1)	118	129	182	252
(5,3,1)	197	232	343	504
(6,1,1,1)	229	246	357	504
(4,4,1)	230	280	420	630
(5,2,2)	282	333	504	756
(4,3,2)	410	515	805	1260
(5,2,1,1)	543	634	987	1512
(3,3,3)	510	660	1050	1680
(4,3,1,1)	785	980	1575	2520
(5,1,1,1,1)	1044	1206	1932	3024
(4,2,2,1)	1110	1405	2310	3780
(3,3,2,1)	1370	1800	3010	5040
(3,2,2,2)	1920	2580	4410	7560
(4,2,1,1,1)	2115	2670	4515	7560
(3,3,1,1,1)	2600	3420	5880	10080
(3,2,2,1,1)	3630	4900	8610	15120
(4,1,1,1,1,1)	4020	5070	8820	15120
(2,2,2,2,1)	5040	7020	12600	22680
(3,2,1,1,1,1)	6840	9300	16800	30240
(2,2,2,1,1,1)	9450	13320	24570	45360
(3,1,1,1,1,1,1)	12840	17640	32760	60480
(2,2,1,1,1,1,1)	17640	25260	47880	90720

(2,1,1,1,1,1,1)	32760	47880	93240	181440
(1,1,1,1,1,1,1,1)	60480	90720	181440	362880

Tabel
care indică unde au mai fost publicate o parte dintre articole.

Articolul	Unde a mai fost publicat
Matematica şi Bazele electrotehnicii.	Revista „Educaţia matematică”, editată de Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu şi Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Volumul 1, nr. 1, ISSN 1583-9826, Sibiu, 2005, pag. 67-76.
Aranjamente generalizate.	Revista „Educaţia matematică”, editată de Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu şi Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Volumul 1, nr. 2, ISSN 1583-9826, Sibiu, 2005, pag. 49-58.
Combinări generalizate.	Revista „Educaţia matematică”, editată de Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu şi Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Volumul 2, nr. 1-2, ISSN 1583-9826, Sibiu, 2006, pag. 63-72.
Numărarea soluţiilor admisibile ale problemei transporturilor în numere întregi.	Revista „Educaţia matematică”, editată de Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu şi Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Volumul 3, nr. 1-2, ISSN 1583-9826, Sibiu, 2007, pag. 3-7.
Numărarea bijecţiilor între două mulţimi multiple.	Gazeta Matematică-Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag.78-81 (o variantă a articolului).
Numărarea injecţiilor între două mulţimi multiple.	Revista „Educaţia matematică”, editată de Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu şi Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Volumul 4, nr. 2, ISSN 1583-9826, Sibiu, 2008 (în curs de apariţie).
Numărarea funcţiilor între două mulţimi multiple.	Revista „Educaţia matematică”, editată de Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu şi Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Volumul 5, nr. 1, ISSN 1583-9826, Sibiu, 2009 (în curs de apariţie).
Mulţimi multiple şi mulţimi ordonate.	Revista „Educaţia matematică”, editată de Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu şi Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Volumul 5, nr. 2, ISSN 1583-9826, Sibiu, 2009 (în curs de apariţie).
Grupări generalizate.	Volumul Matematică aplicată, Sibiu, 1995, pag. 11-23 (o variantă a articolului).
A Mathematical Model for Unbalanced Classes Analysis of Polyphasic Loads.	International Workshop in Electrotechnics, Cluj-Napoca, 17-20 august 1995, Acta Electrotehnica Napocensis, vol.36, nr. 1, ISSN 1224-2497, pag. 91-92.

The Algebraic Characterization of Discreet Unbalanced Loads.	Acta Universitatis Cibiniensis, vol. XXXII , Technical series, A. Electrical Engineering and Electronics, ISSN 1221-4930, Sibiu, 1999, pag. 33-34.
Methods for Calculating the Number of Discreet Unbalanced Loads.	Acta Universitatis Cibiniensis, vol. XXXII, Technical series, A. Electrical Engineering and Electronics, ISSN 1221-4930, Sibiu, 1999, pag. 31-32.
The Recurrence Method for Calculating the Unbalanced Classes Number of m-Phased Loads.	Acta Universitatis Cibiniensis, vol. XXXII,Technical series,A. Electrical Engineering and Electronics, ISSN 1221-4930, Sibiu, 1999, pag. 29-30.
The Order Reducing Method for Determining the Number of Discreet Unbalanced Loads.	Acta Universitatis Cibiniensis, vol. XLVI, Technical series, H. Electrical Engineering and Electronics, ISSN 1221-4949, Sibiu, 2001, (nivel internaţional), pag. 61-66.
Model matematic al receptorului dezechilibrat discret.	Lucrările celei de A VIII-a Conferinţe Naţionale multidisciplinare – cu participare internaţională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii româneşti”, Sebeş, 30-31 mai 2008; Volumul „Ştiinţă şi Inginerie” (vol. 13), ISBN 973-8130-82-4, pag. 229-234.
Aspecte algebrice privind receptoarele dezechilibrate discrete m-fazate.	Sesiunea de comunicări ştiinţifice a Universităţii “Petru Maior”, Târgu Mureş, 27-28 octombrie 2000, Volumul 7, Electroenergentică, ISBN 973-8084-19-9, pag. 197-200.
Metode pentru analiza claselor de dezechilibru ale receptoarelor m-fazate.	Sesiunea de comunicări ştiinţifice a Academiei Forţelor Terestre “Nicolae Bălcescu”, TEHNOMIL 2001, Sibiu, 27 aprilie 2001, Volum, Electronică şi Electrotehnică, ISBN 973-8088-48-8, pag. 103-106.
Metodă recursivă pentru determinarea numărului receptoarelor dezechilibrate discrete.	Sesiunea de comunicări ştiinţifice a Academiei Forţelor Terestre “Nicolae Bălcescu”, TEHNOMIL 2001, Sibiu, 27 aprilie 2001, Volum, Electronică şi Electrotehnică, ISBN 973-8088-48-8, pag. 107-110.
O metodă de reducere pentru calculul numărului receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate.	A III-a Sesiune de Comunicări Ştiinţifice cu participare internaţională, Hunedoara, 4-5 octombrie 2001; Universitatea “Politehnica” din Timişoara, Analele Facultăţii de Inginerie din Hunedoara, Tomul III, Fascicola 2, ISSN 1454-6531, pag. 44-47.
Analiza asistată de calculator a receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate.	A III-a Sesiune de Comunicări Ştiinţifice cu participare internaţională, Hunedoara, 4-5 octombrie 2001; Universitatea “Politehnica” din Timişoara, Analele Facultăţii de Inginerie din Hunedoara, Tomul III, Fascicola 2, ISSN 1454-6531, pag. 48-51.

BIBLIOGRAFIE GENERALA

[A1] Aigner, M. – Combinatorial Theory, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979

[A2] Aigner, M. – A Course in Enumeration, Springer Verlag, Berlin, 2007

[A3] Anderson, I. – Combinatorics on Finite Sets, Clarendon Press, Oxford, 1987

[A4] Anderson, I. – A First Course in Combinatorial Mathematics (2nd edition), Oxford University Press, Oxford, 1989

[B1] Beckenbach, E. F. (Editor) – Applied Combinatorial Mathematics, John Wiley, New York, 1964

[B2] Bellman, R. , Hall, M. – Combinatorial Analysis, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1979

[B3] Bender, E.A. , Williamson, S.G. – Foundations of Combinatorics with Applications, Dover Publications, 2006

[B4] Benes, J. – Sisteme cibernetice cu organizare automată, Editura Tehnică, Bucureşti, 1971

[B5] Berge, C. – Principes de combinatoire, Dunod, Paris, 1968

[B6] Berge, C. – Principles of Combinatorics, Academic Press, New York, 1971

[B7] Berman, G., Fryser, K.D. – Introduction to Combinatorics, Academic Press, New York and London, 1972

[B8] Bogart, K. – Introductory Combinatorics (3rd edition), Academic Press, Orlando, 2000

[B9] Bollobas, B. – Combinatorics, Cambridge University Press, Cambridge, 1986

[B10] Bona, M. , Rosen, K.H. (Editor) – Combinatorics of Permutations, Chapman & Hall / CRC Press, 2004

[B11] Bona, M. – Introduction to Enumerative Combinatorics, MacGraw – Hill Science Engineering, 2005

[B12] Bona, M. – A Walk Trough Combinatorics: An Introduction to Enumeration and Graph Theory (2nd ed.), World Scientific Publishing Company Inc., 2006

[B13] Bose, R. C. , Manvel, B. – Introduction to Combinatorial Theory, New York, Wiley, 1984

[B14] Brualdi, R. A. – Introductory Combinatorics (4th edition), Prentice Hall, 2008

[B15] de Bruijn, N. G. – Generalization of Polya's Fundamental Theorem in Enumerative Combinatorial Analysis, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 62, Indagationes Mathematicae, 21, 1959, p. 59-69

[B16] de Bruijn, N.G. – A Survey of Generalizations of Polya's Enumeration Theorem, Nieuv Archief voor Wiskunde, XIX, p. 89-112, 1971.

[B17] Bryant, V. – Aspects of Combinatorics, Cambridge University Press, Cambridge, 1993

[C1] Cameron, P. – Combinatorics, Cambridge University Press, 1994

[C2] Chao, C.Y. , Deisher, C.I. – Equivalence classes of functions on finite sets, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol. 5, no. 4, pp. 745-762, 1982

[C3] Charalambides, C.A. – Enumerative Combinatorics, Chapman & Hall / CRC Press, Boca Raton, 2002

[C4] Chen, C.C. – Principles and Techniques in Combinatorics, World Scientific Publishing Company, 1992

[C5] Cohen, D. – Basic Techniques in Combinatorial Theory, Wiley, New York, 1979

[C6] Comtet, L. – Analyse combinatoire, I, II, Presses Univ. de France, Paris, 1970

[D1] Dragomir, A. , Laziun, V. – Teorie combinatorie. Elemente de combinatorică clasică şi generalizată, Universitatea din Timişoara, 1974

[E1] Eisen, M. – Elementary Combinatorial Analysis, Gordon and Breach, New York, 1969

[E2] Erickson, M.J. – Introduction to Combinatorics, New York, Wiley, 1996

[G1] Goulden, I.P. , Jackson, D.M. - Combinatorial Enumeration, Dover Publications, 2004

[G2] Graham, R.L. , Grotschel, M. , Lovász, L. (Eds.) – Handbook of Combinatorics, 2 vols., Cambridge, MA, MIT Press, 1996

[G3] Grimaldi, R.P. – Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction, 4th ed., Longman, 1998

[H1] Hall, M. – A Survey of Combinatorial Analysis, Wiley, New York, 1958

[H2] Hall, M., jr. – Combinatorial Theory, Blaisdell Publishing Co., Waltham (Massachusetts), Toronto, London, 1967

[H3] Hall, M., jr. – Combinatorial Theory, 2nd ed., John Wiley, New York, 1998

[H4] Harary, F. – Applied Combinatorial Mathematics, Wiley, New York, 1964

[I1] Iaglom, A. M. , Iaglom, I. M. – Probleme neelementare tratate elementar, Editura Tehnică, Bucureşti, 1983

[I2] Ion, I. D. , Niţă, C. , Năstăsescu, C. – Complemente de algebră, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1984

[K1] Kasa, Z. – Combinatorica cu aplicaţii, Presa Universitară Clujeană, 2003

[K2] Kaufmann, A. – Introduction à la combinatorique en vue des applications, Dunod, Paris, 1968

[K3] Kaufmann, A. ,Coster, D. – Exercices de combinatorique avec solutions (2 vol.), Dunod, Paris, 1969

[K4] Knuth, D. E. – Tratat de programarea calculatoarelor – Algoritmi fundamentali, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974

[K5] Knuth, D. E. – Tratat de programarea calculatoarelor – Sortare şi căutare, Editura Tehnică, Bucureşti, 1976

[K6] Knuth, D. E. – Tratat de programarea calculatoarelor – Algoritmi seminumerici, Editura Tehnică, Bucureşti, 1983

[L1] van Lint, J.H. , Wilson, R.M. – A Course in Combinatorics, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2001

[L2] Liu, C. L. – Introduction to Combinatorial Mathematics, McGraw – Hill, New York, 1968

[L3] Lloyd, E. K. – Redfield's 1937 Lecture, Communications in Mathematical and in Computer Chemistry (MATCH), no. 41, pp.29 – 41, 2000

[L4] Lovász, L. – Combinatorial problems and exercises, Second Edition, North – Holland, Amsterdam, 1993

[M1] MacMahon, P. A. – Combinatory Analysis, vol. I, II, Cambridge University Press, Cambridge, 1915, 1916

[M2] MacMahon, P.A. - Combinatory Analysis, Merchant Books, 2007

[M3] Martin, G.E. – Counting: The Art of Enumerative Combinatorics, Springer Verlag, 2001

[M4] Merris, R. – Combinatorics, Second Edition, Wiley – Interscience, 2003

[N1] Netto, E. – Lehrbuch der Combinatorik, Teubner, Leipzig, Berlin, 1927

[N2] Niven, I.M. – Mathematics of Choice: Or, How to Count without Counting, Washington DC, The Mathematical Association of America, 1965

[P1] Percus, J. K. – Combinatorial Methods, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1969

[P2] Pólya, G. – Matematica şi raţionamentele plauzibile (2 vol.), Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1962

[P3] Pólya, G. – Cum rezolvăm o problemă?, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1965

[P4] Pólya, G. – Descoperirea în matematică, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1971

[P5] Pólya, G., Tarjan, R.E., Woods, D.R. – Notes on Introductory Combinatorics, Birkhauser, 1983

[P6] Popescu, D. , Vraciu, C. – Elemente de teoria grupurilor finite, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986

[R1] Rademacker, H. , Toeplitz, O. – Despre numere şi figuri, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1968

[R2] Redfield, J.H. – Group Theory Applied to Combinatory Analysis, (1937), Communications in Mathematical and in Computer Chemistry (MATCH), no. 41, pp.7 – 27, 2000

[R3] Riordan, J. – An Introduction to Combinatorial Analysis, John Wiley, New York, 1958

[R4] Roberts, F.S. – Applied Combinatorics, Second Edition, Chapman & Hall, 2009

[R5] Rosen, K.H. (Ed.) – Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics, Boca Raton, FL, CRC Press, 2000

[R6] Ryser, H. J. – Combinatorial Mathematics, John Wiley, New York, 1963

[S1] Slomson, A. – An Introduction to Combinatorics, Chapman and Hall, London, 1991

[S2] Slomson, A. – Introduction to Combinatorics, Boca Raton, FL, Chapman and Hall, 1997

[S3] Smadici, C. – Introducere în analiza combinatorie, Editura Matrixrom, Bucureşti, 2007

[S4] Stanley, R.P. – Enumerative Combinatorics, Wadsworth & Brooks / Cole, Monterey, 1986

[S5] Stanley, R.P. – Enumerative Combinatorics, Vol. I, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1999

[S6] Stanley, R.P. – Enumerative Combinatorics, Vol. II, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1999

[S7] Street, A. , Wallis, W. – Combinatorics: A First Course, Charles Babbage Institute, Winnipeg, 1982

[T1] Tomescu, I. – Introducere în combinatorică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[T2] Tomescu, I. – Introduction to Combinatorics, Collet's (Publishers) Ltd., London and Wellingborough, 1975

[T3] Tomescu, I. – Combinatorica şi teoria grafurilor, Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică, Bucureşti, 1978

[T4] Tomescu, I. – Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

[T5] Tucker, A. – Applied Combinatorics, Fifth Edition, John Wiley, New York, 2006

[V1] Vilenkin, N. I. – Kombinatorika, Nauka, Moscova, 1969

[V2] Vilenkin, N.I. – Combinatorics, Academic Press, New York, 1971

[V3] Vilenkin, N. I. – Combinatorial Mathematics (for recreation), Mir Publishers, Moscow, 1972

[V4] Vilenkin, N. I. – Inducţia; Kombinatorika, Moscova, 1976

[W1] Whitworth, W.A. – Choice and Chance, Hafner Publishing Co., New York, 1959

[W2] Williamson, S. – Combinatorics for Computer Science, Computer Science Press, Rockville, 1985