

Vasile Mircea Popa

Receptoare generalizate  
în electrotehnică

Editura Universității “Lucian Blaga” din Sibiu  
Sibiu, 2010

# Generalized Loads in Electrotechnics

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**POPA, VASILE MIRCEA**

**Receptoare generalizate în electrotehnică / Popa Vasile Mircea. – Sibiu:**  
Editura Universității „Lucian Blaga” din Sibiu, 2010

Bibliogr.

ISBN 978-606-12-0033-7

621.3

Îngrijire editorială: autorul

Traducere prefață: arh. Silviu Ioan Popa

Tehnoredactare: arh. Silviu Ioan Popa

## PREFAȚĂ

Funcționarea circuitelor electrice trifazate în regimuri nesimetrice a fost studiată încă de la începuturile utilizării energiei electrice în sistem trifazat. Au fost obținute rezultate fundamentale, ajunse astăzi clasice. Astfel, Stokvis a studiat regimurile nesimetrice și dezechilibrate începând cu anul 1915. Teorema Stokvis-Fortescue a fost publicată în anul 1918. Ulterior, prin contribuția adusă de diverși cercetători, teoria componentelor simetrice s-a dezvoltat și s-a perfecționat [P7].

Școala românească de electrotehnică are în acest domeniu contribuții notabile, începând cu savantul C. Budeanu încă din perioada interbelică. Un punct de vedere nou a fost evidențiat de profesorul A. Țugulea în unele lucrări publicate în ultimii ani [T10], [T11], [T12]. Pe o direcție apropiată se înscriu și lucrările cercetătorului E. Pavel [P5], [P6], [P7], [P8].

În lucrarea de față am abordat o serie de aspecte din domeniul sistemelor nesimetrice și al receptoarelor dezechilibrate, mai puțin tratate în literatura de specialitate. Am încercat să aduc unele sistematizări, completări și interpretări proprii acestui subiect și de asemenea, contribuții originale care sunt prezentate explicit în lucrare la fiecare capitol în parte.

Conținutul cărții este organizat pe trei capitole, anexă și bibliografie.

În capitolul 1 se tratează receptoarele dezechilibrate generalizate, utilizând în mod sistematic componentele simetrice de calcul ale impedanțelor și punând în evidență în schema echivalentă a receptorului dezechilibrat o parte echilibrată și o parte extrem dezechilibrată. Se deduc ecuațiile de tensiuni și de curenți și se evidențiază circulația internă de putere între aceste părți ale receptorului. Se arată cele două cazuri cu existență fizică reală care se pot întâlni pentru receptorul dezechilibrat real, considerând circulația internă a puterilor active.

În capitolul 2 se tratează receptoarele dezechilibrate discrete, care sunt definite la începutul capitolului. Se elaborează modelul matematic respectiv și se expun patru metode originale pentru analiza claselor de dezechilibru ale receptoarelor dezechilibrate discrete de un anumit tip. În același scop se elaborează un program de calculator, numit programul **RDD**. Folosind acest program de calculator, se calculează toate numerele **N(RDD)** pentru valori ale ordinului  $n$  mai mici sau egale decât nouă.

În capitolul 3 se reia și se aprofundează studiul receptorului dezechilibrat discret. Capitolul 3 este de fapt o colecție de articole privind acest subiect, care au fost publicate anterior în diverse reviste și volume. Acest lucru constituie un avantaj pentru cititor, deoarece fiecare articol are un caracter independent și poate fi citit direct. Pe de altă parte, din acest motiv apar inevitabil unele repetări. Se prezintă modelul matematic al receptorului dezechilibrat discret, caracterizarea algebrică a receptoarelor dezechilibrate discrete, metode pentru analiza claselor de dezechilibru ale receptoarelor dezechilibrate discrete  $m$ -fazate, precum și metodele respective tratate pe rând. În încheierea acestei părți se prezintă analiza asistată de calculator a receptoarelor discrete  $m$ -fazate. Articolele care tratează acest subiect sunt scrise atât în limba română cât și în limba engleză.

Ca anexă a cărții este prezentat un tabel care indică unde au mai fost publicate articolele. La sfârșitul cărții este prezentată bibliografia.

Cartea poate interesa pe studenți, pe inginerii specializați în teoria circuitelor electrice, precum și pe toți cei pasionați de electrotehnica teoretică și aplicată în general, de teoria circuitelor electrice în special.

Conținutul lucrării poate fi fără îndoială îmbunătățit și completat. Voi fi recunoscător pentru orice observație sau sugestie în acest sens, venită de la cititori.

## FOREWORD

The work of three-phased electrical circuits in non-symmetrical situations was studied since the early use of electrical energy in three-phased system. Fundamental results were obtained, considered classical today. Stokvis has studied the unbalanced and non-symmetrical situations as early as 1915. The Stokvis-Fortescue theorem was published in 1918. Subsequently, by the contribution of various researchers, the symmetrical components theory was developed and enhanced [P7].

The Romanian school of electrotechnics has notable contributions in this area, starting with scientist C. Budeanu since the interwar period. A new perspective was shown by professor A. Țugulea in some papers published in recent years [T10], [T11], [T12]. In a near direction are also situated the papers of researcher E. Pavel [P5], [P6], [P7], [P8].

In this paper I approach a number of issues in the field of non-symmetrical systems and of unbalanced loads, treated less in specialized literature. I tried to bring some systematization, addenda and personal interpretations to this subject and also original contributions which are explicitly presented in each chapter.

The contents of the book is organized into three chapters, an annex and bibliography.

The first chapter treats the generalized unbalanced loads, using systematically the calculation symmetrical components of impedances and showing in the equivalent scheme of the unbalanced load a balanced part and an extremely unbalanced part. Voltages and currents equations are deducted and the internal power circulation between these parts of the load is presented. The two cases with real physical existence which can be met for the real unbalanced load are presented, considering the internal active powers circulation.

The second chapter treats the discreet unbalanced loads, which are defined at the beginning of the chapter. The respective mathematical model is elaborated and four original methods for the unbalanced classes analysis of a certain type of the discreet unbalanced loads are displayed. For the same purpose, the **DUL** software program is elaborated. Using this software program, all numbers **N(DUL)** for  $n$  order values less or equal than nine are calculated.

The third chapter resumes and deepens the study of the discreet unbalanced load. This chapter is in fact a collection of articles regarding this subject that were previously published in various scientific journals and other publications. This is a benefit to the reader, because each article in the chapter is fairly independent of the others and therefore can be read directly. On the other hand, this approach inevitably leads to some repetitions in the text. Overall, this section presents the mathematical model of the discreet unbalanced load, the algebraic characterization of discreet unbalanced loads, methods for the analysis of unbalanced classes of  $m$ -phased discreet unbalanced loads, as well as the respective methods which are treated individually. The end of this section presents the computer aided analysis of  $m$ -phased discreet loads. The articles treating this subject are written both in Romanian and English.

A table showing where articles have previously been published is included as an annex. The bibliography is attached at the end of the book.

This book will be of particular interest to students, to engineers specializing in the theory of electrical circuits, and generally to all other readers captivated by the theoretical and applied electrotechnics generally, by the electrical circuits theory particularly.

Certainly, the contents of this book can be improved and enriched in the future. As such, I will be grateful for any comments or suggestions received from the readers.

Sibiu, 1 september 2010

The author.

## CUPRINS

Prefață.....	3
Prefață (în limba engleză).....	4
Cuprins.....	5
Cuprins (în limba engleză) .....	6
Capitolul 1. Receptoare dezechilibrate generalizate.....	7
1.1 Definiții, clasificări .....	9
1.2 Componente simetrice de calcul.....	10
1.3 Reprezentări în planul complex al impedanțelor.....	12
1.4 Ecuația de tensiuni și curenți .....	18
1.5 Analiza receptorului dezechilibrat real.....	20
1.6 Analiza receptorului extrem dezechilibrat generalizat .....	23
1.7 Analiza receptorului echilibrat real .....	27
1.8 Analiza receptorului echilibrat real alimentat cu un sistem nesimetric de tensiuni .....	30
1.9 Sinteză privind analiza receptorului dezechilibrat real.....	30
1.10 Analiza unor cazuri particulare.....	36
1.11 Cazurile extreme $z_N = 0$ și $z_N = \infty$ .....	45
1.12 Concluzii și observații .....	48
Capitolul 2. Receptoare dezechilibrate discrete .....	51
2.1 Definiția receptorului dezechilibrat discret .....	53
2.2 Modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret .....	54
2.3 Generalizare.....	58
2.4 Calculul numărului <b>N (RDD)</b> .....	59
2.5 Metoda enumerării.....	59
2.6 Metoda polinoamelor de tip Newton .....	61
2.7 Metoda de recurență .....	65
2.8 Metoda reducerii ordinului .....	67
2.9 Program de calculator <b>RDD</b> .....	73
2.10 Rezultate numerice obținute .....	74
2.11 Concluzii și observații .....	84
Capitolul 3. Articole privind <b>RDD</b> .....	85
A Mathematical Model for Unbalanced Classes Analysis of Polyphasic Loads .....	87
The Algebraic Characterization of Discreet Unbalanced Loads .....	89
Methods for Calculating the Number of Discreet Unbalanced Loads .....	91
The Recurrence Method for Calculating the Unbalanced Classes Number of m-Phased Loads ....	93
The Order Reducing Method for Determining the Number of Discreet Unbalanced Loads .....	95
Model matematic al receptorului dezechilibrat discret.....	101
Aspecte algebrice privind receptoarele dezechilibrate discrete m-fazate.....	107
Metode pentru analiza claselor de dezechilibru ale receptoarelor m-fazate.....	111
Metodă recursivă pentru determinarea numărului receptoarelor dezechilibrate discrete.....	115
O metodă de reducere pentru calculul numărului receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate ....	119
Analiza asistată de calculator a receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate.....	123
ANEXA .....	127
Tabel care indică unde au mai fost publicate articolele.....	129
Bibliografie .....	131

## CONTENTS

Preface (in Romanian) .....	3
Preface (in English) .....	4
Contents (in Romanian) .....	5
Contents (in English) .....	6
Chapter 1. Generalized Unbalanced Loads .....	7
1.1 Definitions, Classifications .....	9
1.2 Calculation Symmetrical Components .....	10
1.3 Representations in Complex Impedance Plane .....	12
1.4 Voltages and Currents Equation .....	18
1.5 The Analysis of the Real Unbalanced Load .....	20
1.6 The Analysis of the Generalized Extremely Unbalanced Load .....	23
1.7 The Analysis of the Real Balanced Load .....	27
1.8 The Analysis of the real Balanced Load Fed by a Non-Symmetrical System of Voltages .....	30
1.9 Synthesis Regarding the Analysis of the Real Unbalanced Load .....	30
1.10 The Analysis of a Particular Cases .....	36
1.11 The Extreme Cases $z_N = 0$ and $z_N = \infty$ .....	45
1.12 Conclusions and Observations .....	48
Chapter 2. Discreet Unbalanced Loads .....	51
2.1 The Definition of the Discreet Unbalanced Load .....	53
2.2 The Mathematical Model for the Discreet Unbalanced Load .....	54
2.3 Generalization .....	58
2.4 The <b>N(DUL)</b> Number Calculation .....	59
2.5 The Enumeration Method .....	59
2.6 The Newton Type Polynomial Method .....	61
2.7 The Recurrence Method .....	65
2.8 The Order Reducing Method .....	67
2.9 The <b>DUL</b> Software Program .....	73
2.10 Numerical Results Obtained .....	74
2.11 Conclusions and Observations .....	84
Chapter 3. Articles Regarding <b>DUL</b> .....	85
A Mathematical Model for Unbalanced Classes Analysis of Polyphasic Loads .....	87
The Algebraic Characterization of Discreet Unbalanced Loads .....	89
Methods for Calculating the Number of Discreet Unbalanced Loads .....	91
The Recurrence Method for Calculating the Unbalanced Classes Number of m-Phased Loads .....	93
The Order Reducing Method for Determining the Number of Discreet Unbalanced Loads .....	95
Mathematical Model for the Discreet Unbalanced Load .....	101
Algebraic Aspects Regarding the m-Phased Discreet Unbalanced Loads .....	107
Methods for the Unbalanced Classes Analysis of m-Phased Loads .....	111
Recursive Method for Determining the Number of Discreet Unbalanced Loads .....	115
A Reducing Method for Calculating the Number of m-Phased Discreet Unbalanced Loads .....	119
The Computer-Aided Analysis of m-Phased Discreet Unbalanced Loads .....	123
ANNEX .....	127
Table showing where the articles have been previously published .....	129
Bibliography .....	131

**CAPITOLUL 1**  
**RECEPTOARE DEZECHILIBRATE**  
**GENERALIZATE**





# 1. RECEPTOARE DEZECHILIBRATE GENERALIZATE

## 1.1. Definiții, clasificări

Receptoarele electrice trifazate admit o schemă echivalentă în stea și evident, pe baza teoremelor de transfigurare, o schemă echivalentă în triunghi (fig.1.1)

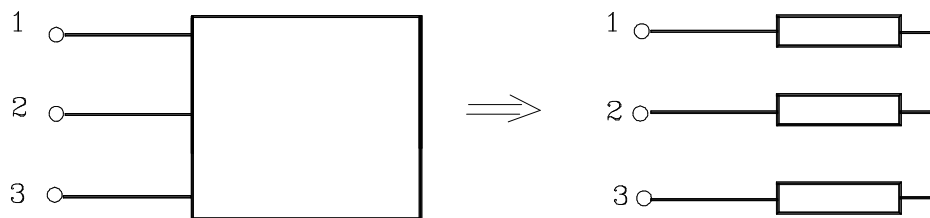


Fig.1.1 Receptor trifazat și schema lui echivalentă în stea

Ele pot fi grupate în două categorii: receptoare trifazate echilibrate și receptoare trifazate dezechilibrate [M17], [S29], [S17], [S22].

Se numește receptor trifazat echilibrat un receptor trifazat care admite o schemă echivalentă în stea cu impedanțe complexe egale în cele trei ramuri [M17], [S29], [S17], [S22].

Se numește receptor trifazat dezechilibrat un receptor trifazat care admite o schemă echivalentă în stea cu impedanțe complexe neegale în cele trei ramuri [M17], [S29], [S17], [S22].

În continuare, se va introduce noțiunea de receptor trifazat extrem dezechilibrat, care este un caz particular de receptor trifazat dezechilibrat [P6], [P7], [P8], [P18], [P20]. Pentru un astfel de receptor, suma impedanțelor complexe din cele trei ramuri ale schemei echivalente în stea este egală cu zero.

De altfel și receptorul trifazat echilibrat poate fi considerat, într-un anumit sens, ca un caz limită al receptorului trifazat dezechilibrat. În această viziune, receptoarele trifazate sunt în general dezechilibrate, situații limită (particulare) fiind receptoarele trifazate echilibrate și receptoarele trifazate extrem dezechilibrate.

În figura 1.2 este prezentată clasificarea receptoarelor trifazate și anume clasificarea clasică (fig.1.2.a) și clasificarea propusă în lucrarea de față (fig.1.2.b).

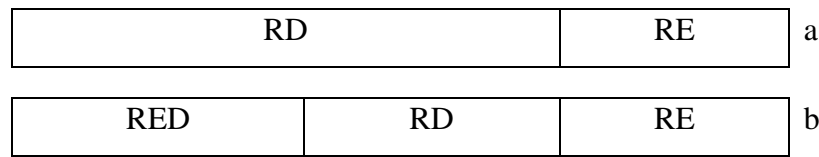


Fig.1.2 Clasificarea clasică (a) și clasificarea propusă în lucrarea de față (b) pentru receptoarele trifazate

S-au făcut următoarele notații:

- **RD** = receptor dezechilibrat;
- **RE** = receptor echilibrat;
- **RED** = receptor extrem dezechilibrat.

Vom considera în continuare schema echivalentă în stea a unui receptor trifazat (fig.1.3).

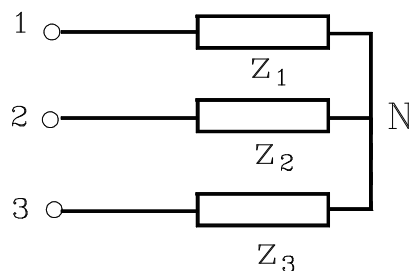


Fig. 1.3 Schema echivalentă în stea a unui receptor trifazat

Cele trei borne de fază sunt notate 1, 2, 3. Punctul neutru al stelei este notat N. Impedanțele complexe din cele trei ramuri ale receptorului legat în stea sunt  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ . Adoptând această notație, nu vom sublinia aceste trei litere cu indici, care vor indica totuși valorile complexe ale impedanțelor respective.

## 1.2. Componente simetrice de calcul

După cum se știe, la analiza circuitelor electrice dezechilibrate cu ajutorul metodei componentelor simetrice se introduc niște impedanțe de calcul, numite componentele simetrice de calcul ale impedanțelor: componenta homopolară, componenta directă și componenta inversă [M17], [S29], [S17], [S22].

Pentru receptorul legat în stea reprezentat în figura 1.3, aceste componente simetrice de calcul ale impedanțelor sunt date de relația:

$$\begin{bmatrix} z_h \\ z_d \\ z_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

În relația (1.1) s-a notat cu  $a$  operatorul de rotație în sens direct cu  $2\pi / 3$  radiani, numit operatorul lui Steinmetz [M17], [S29].

Prin inversarea relației (1.1) obținem:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_h \\ z_d \\ z_i \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Relațiile (1.1) și (1.2) oferă o extindere a teoremei lui Stokvis - Fortescue și pentru sisteme trifazate de impedanțe complexe. După cum se știe, teorema este utilizată în mod curent în legătură cu sistemele trifazate de tensiuni și de curenți.

În general, în cursurile și tratatele de specialitate se semnaleză caracterul formal, de calcul, al componentelor simetrice ale impedanțelor [M17], [S29], [S17]. Aceasta, în opoziție cu componentele simetrice ale sistemelor nesimetrice de tensiuni și de curenți care au o interpretare fizică clară. Diferențierea se bazează în primul rând pe observația că un sistem trifazat de tensiuni (sau de curenți) are o succesiune în timp, pe când un sistem de impedanțe nu are o astfel de succesiune în timp. Legat de aceasta, observăm că imaginea în complex a unei tensiuni sinusoidale (sau a unui curent sinusoidal) este denumită pe bună dreptate fazor, pe când imaginea în complex a unei impedanțe ar trebui numită defazor [B3], fiind de fapt un operator în planul complex al tensiunilor și curenților.

În al doilea rând, fazorul reprezentativ al unei tensiuni sau al unui curent se poate găsi în orice cadran, pe când imaginea în complex a unei impedanțe se poate găsi numai în cadranele I și IV.

Cu toate că există această deosebire importantă, la o analiză mai profundă a unor fenomene legate de receptoarele dezechilibrate se impune nu numai o utilizare susținută a componentelor  $z_h$ ,  $z_d$  și  $z_i$  dar chiar și o interpretare mai nuanțată a lor [P6], [P7], [P8], [P20], [P21], [P24], [P25].

La început să observăm că relația (1.2) scoate în evidență că orice sistem trifazat de impedanțe se poate descompune geometric (deci în planul complex al impedanțelor) în trei grupe de impedanțe de calcul. Această descompunere este totdeauna posibilă și este unică. Vom extinde această afirmație, arătând că descompunerea are și o anumită interpretare fizică.

Din relațiile (1.1) și (1.2) rezultă că orice receptor trifazat echilibrat are numai componentă de calcul homopolară, componentele de calcul directă și inversă fiind nule. Deoarece și reciproca este adevărată, această proprietate este caracteristică (definitorie) pentru un receptor echilibrat. Existența a cel puțin uneia dintre componentele de calcul directă sau inversă caracterizează receptoarele dezechilibrate [P7], [P18].

Semnificația fizică a descompunerii unui sistem trifazat de impedanțe în componente simetrice de calcul trebuie analizată în mod deosebit. Respectiv, pentru orice impedanță complexă, partea reală (rezistența echivalentă în curent alternativ) este în general o mărime pozitivă:

$$\operatorname{Re}(z) \geq 0 \quad (1.3)$$

Considerarea unor impedanțe care se reprezintă în planul complex în cadranele II și III implică să considerăm rezistențe echivalente negative. O astfel de rezistență negativă nu are o existență fizică obiectivă, dar o serie de operații și calcule cu impedanțe cu partea reală negativă precum și unele interpretări se pot face după cum se va arăta în continuare.

O impedanță cu partea reală negativă o vom numi “impedanță generalizată”. Ea se reprezintă în planul complex al impedanțelor în cadranul II sau în cadranul III [P7], [P18], [P21].

### 1.3. Reprezentări în planul complex al impedanțelor

Un sistem trifazat de impedanțe (deci un receptor trifazat) se poate reprezenta în planul complex al impedanțelor prin trei puncte, deci prin triunghiul obținut prin unirea acestor trei puncte (fig.1.4). Succesiunea punctelor 1, 2, 3 (în planul complex, dar nu și în timp) poate să fie directă sau inversă. În particular, punctele 1, 2, 3 pot fi coliniare (triunghi degenerat).

După cum se știe, afixul centrului de greutate al triunghiului trasat în planul complex este media aritmetică a celor trei afixe care corespund vârfurilor triunghiului. Deci, vectorul de poziție al centrului de greutate (D) este chiar  $z_h$ .

Din relația (1.2) deducem:

$$\begin{cases} z_1 = z_h + z_d + z_i \\ z_2 = z_h + a^2 z_d + a z_i \\ z_3 = z_h + a z_d + a^2 z_i \end{cases} \quad (1.4)$$

Partea echilibrată a sistemului trifazat de impedanțe este constituită de componenta homopolară, pentru fiecare fază:

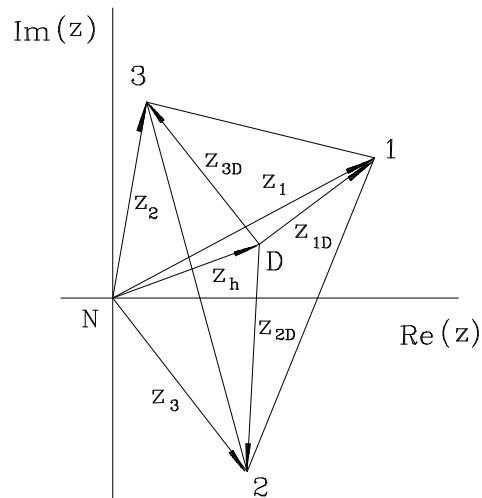


Fig. 1.4 Reprezentarea în planul complex al impedanțelor a unui receptor trifazat

$$z_{1E} = z_h; \quad z_{2E} = z_h; \quad z_{3E} = z_h \quad (1.5)$$

Partea dezechilibrată a sistemului trifazat de impedanțe va conține pe fiecare fază următoarele impedanțe:

$$\begin{cases} z_{1D} = z_d + z_i \\ z_{2D} = a^2 z_d + a z_i \\ z_{3D} = a z_d + a^2 z_i \end{cases} \quad (1.6)$$

Prin urmare, vom putea scrie pentru fiecare fază:

$$\begin{cases} z_1 = z_{1E} + z_{1D} \\ z_2 = z_{2E} + z_{2D} \\ z_3 = z_{3E} + z_{3D} \end{cases} \quad (1.7)$$

În conformitate cu aceste relații, putem desena următoarea schemă echivalentă a receptorului din figura 1.1, în care sunt evidențiate partea echilibrată și partea dezechilibrată (fig.1.5).

De asemenea, relațiile (1.7) au o interpretare clară în figura 1.4.

Se numește receptor trifazat real un receptor format din trei impedanțe care au fiecare partea reală pozitivă. Se numește receptor trifazat generalizat un receptor format din trei impedanțe, dintre care cel puțin una are partea reală negativă [P6], [P7], [P8], [P18], [P20]. Conform acestor definiții, triunghiul 123 din figura 1.4 reprezintă un receptor trifazat real (dezechilibrat). Dacă triunghiul se deplasează în planul complex al impedanțelor, în așa fel încât unul, două sau chiar toate vârfurile să se găsească la stânga axei imaginare, atunci el va reprezenta un receptor trifazat generalizat (dezechilibrat).

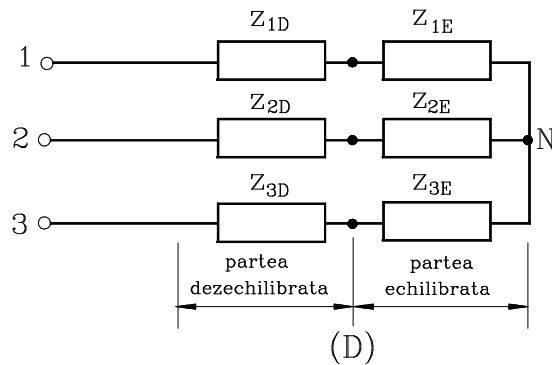


Fig. 1.5 Evidențierea părții echilibrate și a părții dezechilibrate (extrem dezechilibrate) pentru un receptor trifazat

Mărimea triunghiului 123 (perimetrul lui) măsoară într-un anumit fel gradul de dezechilibru al receptorului corespunzător. Astfel, dacă triunghiul se micșorează, deci dacă:  $1 \rightarrow D$ ,  $2 \rightarrow D$ ,  $3 \rightarrow D$ , receptorul trifazat devine echilibrat. Atunci,  $z_1 = z_2 = z_3 = z_h$ .

De asemenea, mărimea segmentului ND (lungimea lui) măsoară gradul de dezechilibru al receptorului respectiv. Astfel, dacă lungimea acestui segment se micșorează, deci dacă  $D \rightarrow N$ , receptorul trifazat devine extrem dezechilibrat.

Vom analiza în continuare unele cazuri particulare de consumatori trifazați, evidențind de fiecare dată triunghiul corespunzător din planul complex.

În figura 1.6 este reprezentat un receptor extrem dezechilibrat generalizat, caracterizat de relațiile:  $z_h = 0$ ;  $z_d \neq 0$ ;  $z_i \neq 0$ . Triunghiul 123 este oarecare cu centrul de greutate în originea

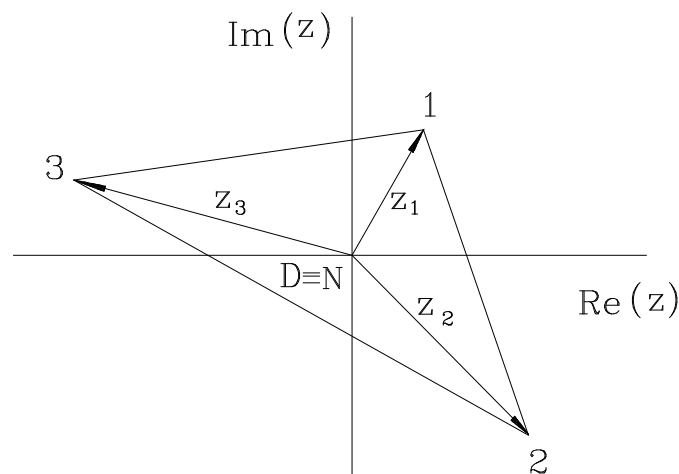


Fig. 1.6 Reprezentarea în planul complex al impedanțelor a unui receptor trifazat extrem dezechilibrat generalizat

axelor de coordonate ( $D \equiv N$ ). Este evident că cel puțin un vârf al triunghiului se va găsi la stânga axei imaginare (mai exact, un vârf sau două vor fi în această situație). De altfel, această proprietate ușor de înțeles pe desen, poate fi demonstrată riguros în felul următor. Deoarece  $z_h = (z_1 + z_2 + z_3) / 3$ , din  $z_h = 0$  rezultă  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ , deci :  $\text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2) + \text{Re}(z_3) = 0$  și prin urmare cel puțin una din rezistențele fazelor este negativă.

În figura 1.7 este reprezentat un receptor extrem dezechilibrat generalizat, un caz particular caracterizat de:  $z_h = 0$ ;  $z_d \neq 0$ ;  $z_i = 0$ . Centrul de greutate coincide cu originea axelor de coordonate și cel puțin un vârf este în cadranul II sau III. Triunghiul 123 va fi echilateral.

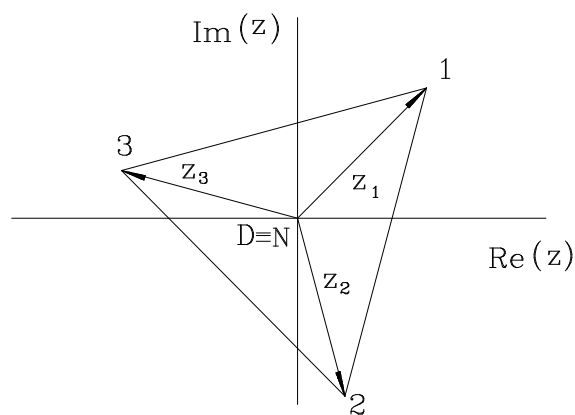


Fig. 1.7 Reprezentarea în planul complex al impedanțelor a unui receptor trifazat extrem dezechilibrat generalizat având numai  $z_d \neq 0$

În figura 1.8 este reprezentat un alt caz particular de receptor extrem dezechilibrat

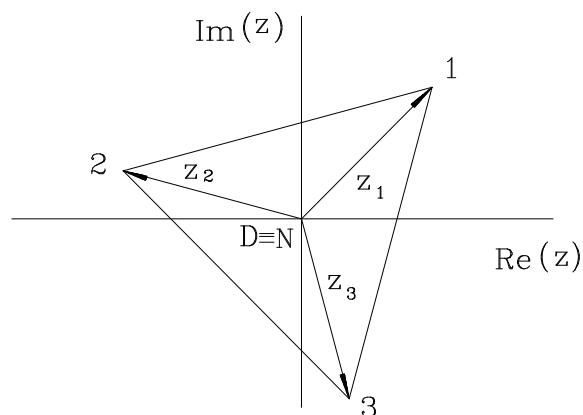


Fig. 1.8 Reprezentarea în planul complex al impedanțelor a unui receptor trifazat extrem dezechilibrat generalizat având numai  $z_i \neq 0$

generalizat, caracterizat de relațiile:  $z_h = 0$ ;  $z_d = 0$ ;  $z_i \neq 0$ . Din nou, centrul de greutate coincide cu originea și cel puțin un vârf este în cadranul II sau III. Triunghiul 123 este echilateral.

Revenind la receptoarele dezechilibrate oarecare (cazul cel mai general) putem afirma că orice receptor dezechilibrat se poate descompune în două sisteme de impedanțe, dintre care unul este echivalent cu un receptor echilibrat iar al doilea este echivalent cu un receptor extrem dezechilibrat generalizat. Aceeași afirmație se poate face relativ la un receptor dezechilibrat real, deci pentru care  $z_1, z_2, z_3$  se găsesc în cadranele I și IV. Dezechilibrul unui receptor real se mărește atunci când  $|z_h|$  devine tot mai mic, una din posibilități fiind atunci când triunghiul 123 se deplasează prin translație spre stânga. La limită, un vârf al triunghiului ajunge pe axa imaginară (în particular, în origine) (fig.1.9).

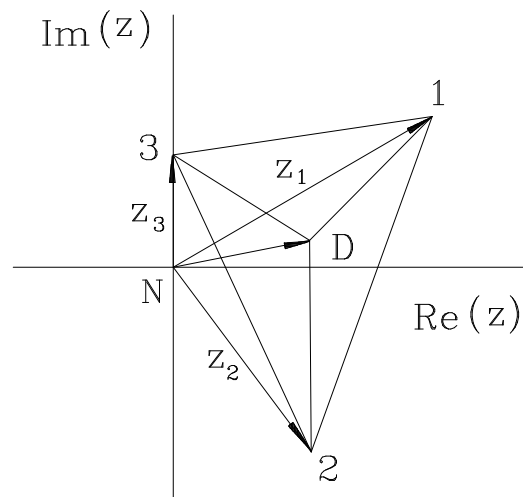


Fig. 1.9 Reprezentarea în planul complex al impedanțelor a unui receptor trifazat dezechilibrat real având în faza 3 o inductanță

Un alt caz particular avem atunci când două vârfuri se găsesc pe axa imaginară (fig.1.10)

Receptorul extrem dezechilibrat real se obține atunci când  $|z_h| \rightarrow 0$ , deci când  $D \rightarrow N$ . Triunghiul este extrem de aplatizat, la limită vârfurile 1, 2, 3 se vor găsi pe axa imaginară iar centrul de greutate al triunghiului 123 va coincide cu originea sistemului de coordonate (fig.1.11)



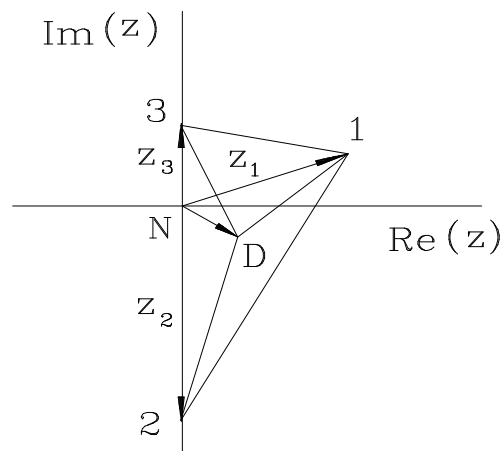


Fig. 1.10 Reprezentarea în planul complex al impedanțelor a unui receptor trifazat dezechilibrat real având în faza 2 o capacitate și în faza 3 o inductanță

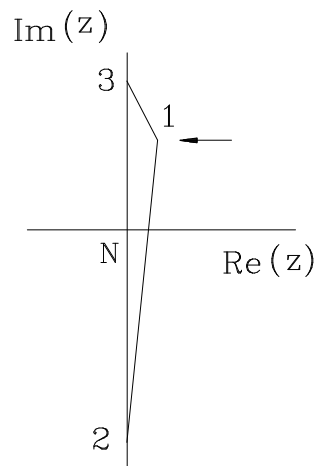


Fig. 1.11 Reprezentarea în planul complex al impedanțelor a unui receptor extrem dezechilibrat real

În figura 1.12 este redat un caz particular de receptor extrem dezechilibrat real.

Pe faza 3 avem o inductivitate cu reactanța  $X_L$ , pe faza 2 avem o capacitate cu reactanța  $X_C$  ( $X_L = |X_C|$ ), iar pe faza 1 avem practic un scurtcircuit.

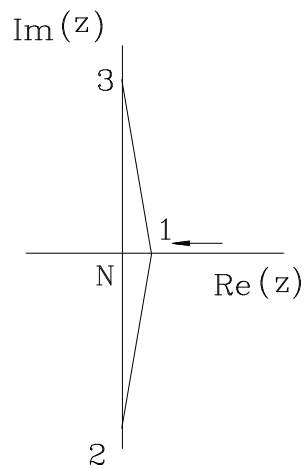


Fig. 1.12 Reprezentarea în planul complex al impedanțelor a unui receptor extrem dezechilibrat real (caz particular)

#### 1.4. Ecuația de tensiuni și curenți

În cele ce urmează se va considera receptorul trifazat din figura 1.3 în conexiune stea cu fir neutru, luându-se în considerare și impedanța firului neutru  $Z_N$  (fig.1.13)

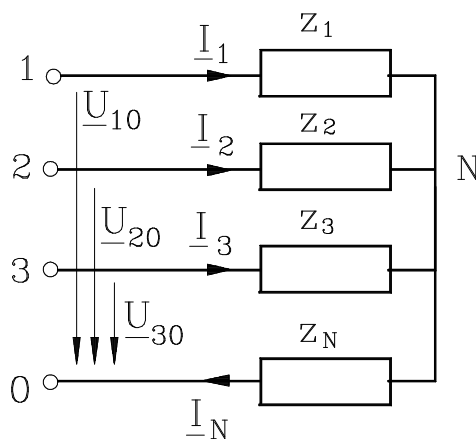


Fig. 1.13 Receptor trifazat legat în stea, cu fir neutru de impedanță  $Z_N$

Sistemul de tensiuni de fază de alimentare  $\underline{U}_{10}$ ,  $\underline{U}_{20}$ ,  $\underline{U}_{30}$  este în general nesimetric. De asemenea, considerăm receptorul în general dezechilibrat.

Aplicând legea lui Ohm pe fiecare fază, teorema I a lui Kirchhoff în nodul N precum și teorema Stokvis-Fortescue sistemelor de tensiuni și de curenți, se obține în urma unui calcul următoarea ecuație matricială:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_h + 3z_N & z_i & z_d \\ z_d & z_h & z_i \\ z_i & z_d & z_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Pentru exprimarea componentelor simetrice ale curenților se inversează relația (1.8)

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} z_h^2 - z_d z_i & z_d^2 - z_h z_i & z_i^2 - z_h z_d \\ z_i^2 - z_h z_d & z_h^2 - z_d z_i + 3z_N z_h & z_d^2 - z_h z_i - 3z_N z_i \\ z_d^2 - z_h z_i & z_i^2 - z_h z_d - 3z_N z_d & z_h^2 - z_d z_i + 3z_N z_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

unde:

$$D = z_h^3 + z_d^3 + z_i^3 - 3z_h z_d z_i + 3z_N z_h^2 - 3z_N z_d z_i \quad (1.10)$$

Puterea complexă cedată pe la borne de rețea (generator) este:

$$\underline{S}_g = \underline{U}_{10} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{20} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{30} \underline{I}_3^* \quad (1.11)$$

care se poate exprima în urma unui calcul:

$$\underline{S}_g = 3\underline{U}_h \underline{I}_h^* + 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* + 3\underline{U}_i \underline{I}_i^* \quad (1.12)$$

Puterea complexă primită de receptorul trifazat cu impedanțele  $z_1, z_2, z_3$  și de impedanța firului neutru este:

$$\underline{S} = \underline{U}_{1N} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{2N} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{3N} \underline{I}_3^* + \underline{U}_{NO} \underline{I}_N^* \quad (1.13)$$

care se poate aduce la forma:

$$\underline{S} = \underline{S}_g \quad (1.14)$$

și prin urmare

$$\underline{S} = 3\underline{U}_h \underline{I}_h^* + 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* + 3\underline{U}_i \underline{I}_i^* \quad (1.15)$$

Puterea complexă consumată în impedanța firului neutru este:

$$\underline{S}_N = \underline{U}_{NO} \underline{I}_N^* = 9z_N \underline{I}_h^2 \quad (1.16)$$

Din relația (1.9) observăm că în general componentele simetrice ale curenților depind de toate componentele simetrice ale tensiunilor (dacă  $z_h \neq 0; z_d \neq 0; z_i \neq 0$ ). O serie de cazuri particulare pot fi puse în evidență considerând situații când unii din parametrii următori sunt nuli:  $\underline{U}_h, \underline{U}_d, \underline{U}_i, z_h, z_d, z_i, z_N$ . [P7], [P18].

Un caz particular important este atunci când sistemul tensiunilor de alimentare are numai componentă simetrică directă. Consumatorul este alimentat de la un generator trifazat simetric cu conexiune stea cu impedanțele interne nule (de putere infinită).

În acest caz, ecuația (1.9) se poate scrie în felul următor:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} z_d^2 - z_h z_i \\ z_h^2 - z_d z_i + 3z_N z_h \\ z_i^2 - z_h z_d - 3z_N z_d \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

iar relația (1.12) devine:

$$\underline{S}_g = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.18)$$

## 1.5. Analiza receptorului dezechilibrat real

Presupunem că sistemul tensiunilor de alimentare are numai componentă simetrică directă.

Ecuația matricială (1.8) se poate descompune în trei părți, referitoare la partea echilibrată, la cea dezechilibrată și la impedanța firului neutru.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_h & 0 & 0 \\ 0 & z_h & 0 \\ 0 & 0 & z_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & z_i & z_d \\ z_d & 0 & z_i \\ z_i & z_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3z_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Vom folosi și ecuația curenților (1.17).

Pentru partea echilibrată putem scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} z_h & 0 & 0 \\ 0 & z_h & 0 \\ 0 & 0 & z_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_E = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} z_h z_d^2 - z_h^2 z_i \\ z_h^3 - z_h z_d z_i + 3z_N z_h^2 \\ z_h z_i^2 - z_h^2 z_d - 3z_N z_h z_d \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Pentru partea dezechilibrată putem scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_D = \begin{bmatrix} 0 & z_i & z_d \\ z_d & 0 & z_i \\ z_i & z_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_D = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} z_h^2 z_i - z_h z_d^2 + 3z_N z_h z_i - 3z_N z_d^2 \\ z_d^3 + z_i^3 - 2z_h z_d z_i - 3z_N z_d z_i \\ z_h^2 z_d - z_h z_i^2 + 3z_N z_h z_d \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Pentru firul neutru putem scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} 3z_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_N = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} 3z_N z_d^2 - 3z_N z_h z_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Se observă imediat că avem:

$$\underline{U}_h = \underline{U}_{hE} + \underline{U}_{hD} + \underline{U}_{hN} = 0 \quad (1.26)$$

$$\underline{U}_d = \underline{U}_{dE} + \underline{U}_{dD} + \underline{U}_{dN} = 0, \text{ cu } \underline{U}_{dN} = 0 \quad (1.27)$$

$$\underline{U}_i = \underline{U}_{iE} + \underline{U}_{iD} + \underline{U}_{iN} = 0, \text{ cu } \underline{U}_{iN} = 0 \quad (1.28)$$

de unde rezultă:

$$\underline{U}_{hE} = -\underline{U}_{hD} - \underline{U}_{hN} \quad (1.29)$$

$$\underline{U}_{dE} + \underline{U}_{dD} = \underline{U}_d \quad (1.30)$$

$$\underline{U}_{iE} = -\underline{U}_{iD} \quad (1.31)$$

În continuare, vom analiza puterile absorbite de receptorul dezechilibrat real (**RDR**).

Puterile pentru partea echilibrată sunt:

$$\underline{S}_{hE} = 3\underline{U}_{hE} \underline{I}_h^* = 3 \frac{z_h z_d^2 - z_h^2 z_i}{D} \underline{U}_d \underline{I}_h^* \quad (1.32)$$

$$\underline{S}_{dE} = 3\underline{U}_{dE} \underline{I}_d^* = 3 \frac{z_h^3 - z_h z_d z_i + 3z_N z_h^2}{D} \underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.33)$$

$$\underline{S}_{iE} = 3\underline{U}_{iE} \underline{I}_i^* = 3 \frac{z_h z_i^2 - z_h^2 z_d - 3z_N z_h z_d}{D} \underline{U}_d \underline{I}_i^* \quad (1.34)$$

Puterile pentru partea dezechilibrată sunt:

$$\underline{S}_{hD} = 3\underline{U}_{hD} \underline{I}_h^* = 3 \frac{z_h^2 z_i - z_h z_d^2 + 3z_N z_h z_i - 3z_N z_d^2}{D} \underline{U}_d \underline{I}_h^* \quad (1.35)$$

$$\underline{S}_{dD} = 3\underline{U}_{dD} \underline{I}_d^* = 3 \frac{z_d^3 + z_i^3 - 2z_h z_d z_i - 3z_N z_d z_i}{D} \underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.36)$$

$$\underline{S}_{iD} = 3\underline{U}_{iD} \underline{I}_i^* = 3 \frac{z_h^2 z_d - z_h z_i^2 + 3z_N z_h z_d}{D} \underline{U}_d \underline{I}_i^* \quad (1.37)$$

Puterile pentru impedanță firului neutru sunt:

$$\underline{S}_{hN} = 3\underline{U}_{hN} \underline{I}_h^* = 3 \frac{3z_N z_d^2 - 3z_N z_h z_i}{D} \underline{U}_d \underline{I}_h^* \quad (1.38)$$

$$\underline{S}_{dN} = 3\underline{U}_{dN} \underline{I}_d^* = 0 \quad (1.39)$$

$$\underline{S}_{iN} = 3\underline{U}_{iN} \underline{I}_i^* = 0 \quad (1.40)$$

Se observă că:

$$\underline{S}_{hE} + \underline{S}_{hN} = -\underline{S}_{hD} \quad (1.41)$$

$$\underline{S}_{dE} + \underline{S}_{dD} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* = \underline{S}_g \quad (1.42)$$

$$\underline{S}_{iE} = -\underline{S}_{iD} \quad (1.43)$$

Puterea totală absorbită de receptorul considerat este:

$$\underline{S} = \underline{S}_E + \underline{S}_D + \underline{S}_N \quad (1.44)$$

$$\underline{S}_E = \underline{S}_{hE} + \underline{S}_{dE} + \underline{S}_{iE} \quad (1.45)$$

$$\underline{S}_D = \underline{S}_{hD} + \underline{S}_{dD} + \underline{S}_{iD} \quad (1.46)$$

$$\underline{S}_N = \underline{S}_{hN} + \underline{S}_{dN} + \underline{S}_{iN} \quad (1.47)$$

Rezultă:

$$\underline{S} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* = \underline{S}_d = \underline{S}_g \quad (1.48)$$

Mai putem scrie:

$$\underline{S} = \underline{S}_h + \underline{S}_d + \underline{S}_i \quad (1.49)$$

$$\underline{S}_h = \underline{S}_{hE} + \underline{S}_{hD} + \underline{S}_{hN} = 0 \quad (1.50)$$

$$\underline{S}_d = \underline{S}_{dE} + \underline{S}_{dD} + \underline{S}_{dN} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.51)$$

$$\underline{S}_i = \underline{S}_{iE} + \underline{S}_{iD} + \underline{S}_{iN} = 0 \quad (1.52)$$

Toate aceste puteri pot fi așezate într-o matrice în care sumele laturilor și coloanelor sunt impuse:

$\underline{S}$	$\underline{S}_E$	$\underline{S}_D$	$\underline{S}_N$
$\underline{S}_h$	$\underline{S}_{hE}$	$\underline{S}_{hD}$	$\underline{S}_{hN}$
$\underline{S}_d$	$\underline{S}_{dE}$	$\underline{S}_{dD}$	$\underline{S}_{dN}$
$\underline{S}_i$	$\underline{S}_{iE}$	$\underline{S}_{iD}$	$\underline{S}_{iN}$

Separarea puterilor complexe pe cele două părți ale receptorului dezechilibrat real precum și pe impedanța firului neutru pune în evidență o circulație de putere internă între aceste zone.

Partea echilibrată consumă atât puterea directă  $\underline{S}_{dE}$  cât și puterile homopolară și inversă  $\underline{S}_{hE}$  și  $\underline{S}_{iE}$ . Impedanța firului neutru consumă numai puterea homopolară  $\underline{S}_{hN}$ . Receptorul fiind alimentat

de un generator simetric care furnizează putere numai pe componenta directă, deducem că puterile homopolară și inversă sunt primite prin partea dezechilibrată a receptorului.

Partea dezechilibrată consumă puterea:

$$\underline{S}_D = \underline{S}_{hD} + \underline{S}_{dD} + \underline{S}_{iD} = \underline{S} - \underline{S}_{hE} - \underline{S}_{dE} - \underline{S}_{iE} - \underline{S}_{hN} \quad (1.53)$$

Se poate afirma că partea dezechilibrată a receptorului se comportă ca un convertizor de putere a componentelor simetrice [P6], [P7], [P8], [P18], [P25].

Considerând că în partea echilibrată a receptorului intră și rețeaua de alimentare presupusă ca fiind și ea echilibrată, puterea homopolară și cea inversă aferentă acestei rețele este efectiv un consum suplimentar față de situația unui receptor echivalent, de aceeași putere, echilibrat.

Se poate desena o diagramă a puterilor complexe, care este o ilustrare grafică a relațiilor anterioare. Prin urmare, interpretarea acestei diagrame trebuie să fie nuanțată, strict legată de aceste relații ale puterilor complexe.

Diagrama puterilor complexe este următoarea:

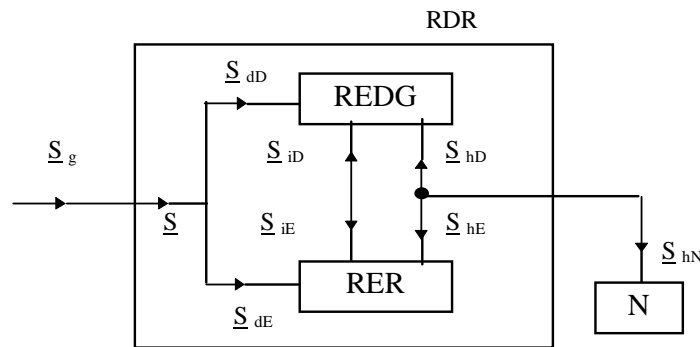


Fig. 1.14 Diagrama puterilor complexe pentru receptorul dezechilibrat real (RDR)

Notățiile au următoarele semnificații:

- **REDG** = receptor extrem dezechilibrat generalizat;
- **RER** = receptor echilibrat real;
- **N** = impedanța firului neutru;
- **RDR** = receptor dezechilibrat real.

### 1.6. Analiza receptorului extrem dezechilibrat generalizat

Acest receptor este caracterizat după cum se știe de condiția  $z_h = 0$ . Relațiile (1.4) devin:

$$\begin{cases} z_1 = z_d + z_i \\ z_2 = a^2 z_d + a z_i \\ z_3 = a z_d + a^2 z_i \end{cases} \quad (1.54)$$

Inlocuind pe  $a$  și  $a^2$  cu valorile cunoscute ( rădăcini cubice complexe ale unității ) obținem:

$$\begin{cases} z_1 = z_d + z_i \\ z_2 = -\frac{z_d + z_i}{2} + j\frac{z_i - z_d}{2}\sqrt{3} \\ z_3 = -\frac{z_d + z_i}{2} - j\frac{z_i - z_d}{2}\sqrt{3} \end{cases} \quad (1.55)$$

Presupunem și acum că sistemul tensiunilor de alimentare are numai componenta simetrică directă.

Ecuția matricială a tensiunilor (1.19) ia următoarea formă:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z_i & z_d \\ z_d & 0 & z_i \\ z_i & z_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3z_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

Ecuția curenților (1.17) devine:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} z_d^2 \\ -z_d z_i \\ z_i^2 - 3z_N z_d \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

unde

$$D = z_d^3 + z_i^3 - 3z_N z_d z_i \quad (1.58)$$

Pentru partea dezechilibrată putem scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_D = \begin{bmatrix} 0 & z_i & z_d \\ z_d & 0 & z_i \\ z_i & z_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_D = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} -3z_N z_d^2 \\ z_d^3 + z_i^3 - 3z_N z_d z_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

Pentru firul neutru putem scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} 3z_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_N = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} 3z_N z_d^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

Se observă că avem relațiile:

$$\underline{U}_h = \underline{U}_{hD} + \underline{U}_{hN} = 0 \quad (1.63)$$



$$\underline{U}_d = \underline{U}_{dD} + \underline{U}_{dN}, \text{ cu } \underline{U}_{dN} = 0 \quad (1.64)$$

$$\underline{U}_i = \underline{U}_{iD} + \underline{U}_{iN} = 0, \text{ cu } \underline{U}_{iD} = 0 \text{ și } \underline{U}_{iN} = 0 \quad (1.65)$$

de unde rezultă:

$$\underline{U}_{hD} = -\underline{U}_{hN} \quad (1.66)$$

$$\underline{U}_{dD} = \underline{U}_d \quad (1.67)$$

$$\underline{U}_{iD} = 0 \quad (1.68)$$

Vom calcula puterile absorbite de receptorul extrem dezechilibrat generalizat (**REDG**).

Puterile pentru partea dezechilibrată sunt:

$$\underline{S}_{hD} = 3\underline{U}_{hD} \underline{I}_h^* = -9 \frac{z_N z_d^2}{D} \underline{U}_d \underline{I}_h^* \quad (1.69)$$

$$\underline{S}_{dD} = 3\underline{U}_{dD} \underline{I}_d^* = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.70)$$

$$\underline{S}_{iD} = 3\underline{U}_{iD} \underline{I}_i^* = 0 \quad (1.71)$$

Puterile pentru impedența firului neutru sunt:

$$\underline{S}_{hN} = 3\underline{U}_{hN} \underline{I}_h^* = 9 \frac{z_N z_d^2}{D} \underline{U}_d \underline{I}_h^* \quad (1.72)$$

$$\underline{S}_{dN} = 3\underline{U}_{dN} \underline{I}_d^* = 0 \quad (1.73)$$

$$\underline{S}_{iN} = 3\underline{U}_{iN} \underline{I}_i^* = 0 \quad (1.74)$$

Se observă că:

$$\underline{S}_{hD} = -\underline{S}_{hN} \quad (1.75)$$

$$\underline{S}_{dD} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* = \underline{S}_g \quad (1.76)$$

$$\underline{S}_{iD} = 0 \quad (1.77)$$

Puterea totală absorbită de receptorul extrem dezechilibrat este:

$$\underline{S} = \underline{S}_D + \underline{S}_N \quad (1.78)$$

$$\underline{S}_D = \underline{S}_{hD} + \underline{S}_{dD} + \underline{S}_{iD} \quad (1.79)$$

$$\underline{S}_N = \underline{S}_{hN} + \underline{S}_{dN} + \underline{S}_{iN} \quad (1.80)$$

Rezultă:

$$\underline{S} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* = \underline{S}_g \quad (1.81)$$

Mai putem scrie:

$$\underline{S} = \underline{S}_h + \underline{S}_d + \underline{S}_i \quad (1.82)$$

$$\underline{S}_h = \underline{S}_{hD} + \underline{S}_{hN} = 0 \quad (1.83)$$

$$\underline{S}_d = \underline{S}_{dD} + \underline{S}_{dN} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.84)$$

$$\underline{S}_i = \underline{S}_{iD} + \underline{S}_{iN} = 0 \quad (1.85)$$

Și în acest caz se poate evidenția o circulație de putere internă între partea dezechilibrată și impedanța firului neutru. Impedanța firului neutru consumă numai puterea homopolară  $\underline{S}_{hN}$ . Receptorul fiind alimentat cu un sistem simetric de tensiuni, el primește putere numai pe componenta directă. Puterea homopolară este deci primită de impedanța firului neutru prin intermediul receptorului extrem dezechilibrat.

Partea dezechilibrată consumă puterea:

$$\underline{S}_D = \underline{S}_{hD} + \underline{S}_{dD} + \underline{S}_{iD} = \underline{S} - \underline{S}_{hN} \quad (1.86)$$

Diagrama puterilor complexe este:

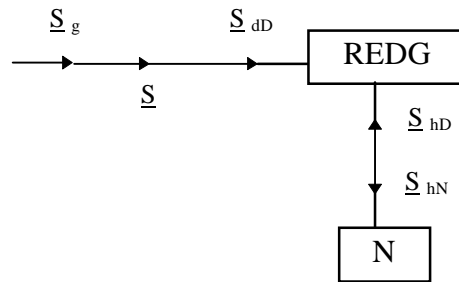


Fig. 1.15 Diagrama puterilor complexe pentru receptorul extrem dezechilibrat generalizat (**REDG**)

Am notat:

- **REDG** = receptorul extrem dezechilibrat generalizat;
- **N** = impedanța firului neutru.

Analiza receptorului extrem dezechilibrat generalizat poate fi extinsă, considerând contribuția componentelor simetrice de calcul  $z_d$ ,  $z_i$ , parcurse de componentele simetrice ale curenților.

Din ecuația de tensiuni (1.59) deducem:

$$\underline{U}_{hD} = z_i \underline{I}_d + z_d \underline{I}_i = \underline{U}_{hd} + \underline{U}_{hi} \quad (1.87)$$

$$\underline{U}_{dD} = z_d \underline{I}_h + z_i \underline{I}_i = \underline{U}_{dh} + \underline{U}_{di} \quad (1.88)$$

$$\underline{U}_{iD} = z_i \underline{I}_h + z_d \underline{I}_d = \underline{U}_{ih} + \underline{U}_{id} \quad (1.89)$$

Din ecuația de curenți (1.57) rezultă:

$$\underline{I}_h = \frac{\underline{U}_d}{D} z_d^2 \quad (1.90)$$

$$\underline{I}_d = \frac{U_d}{D} (-z_d z_i) \quad (1.91)$$

$$\underline{I}_i = \frac{U_d}{D} (z_i^2 - 3z_N z_d) \quad (1.92)$$

Înlocuind curenții (1.90), (1.91), (1.92) în relațiile (1.87), (1.88), (1.89) se calculează imediat componentele tensiunilor  $\underline{U}_{hD}$ ,  $\underline{U}_{dD}$  și  $\underline{U}_{iD}$  și se regăsesc expresiile :

$$\underline{U}_{hD} = -3 \frac{U_d}{D} z_N z_d^2 \quad (1.93)$$

$$\underline{U}_{dD} = \underline{U}_d \quad (1.94)$$

$$\underline{U}_{iD} = 0 \quad (1.95)$$

De asemenea, putem evidenția componentele corespunzătoare ale puterilor.

$$\underline{S}_{hD} = 3(z_i \underline{I}_d + z_d \underline{I}_i) \underline{I}_h^* = \underline{S}_{hd} + \underline{S}_{hi} \quad (1.96)$$

$$\underline{S}_{dD} = 3(z_d \underline{I}_h + z_i \underline{I}_i) \underline{I}_d^* = \underline{S}_{dh} + \underline{S}_{di} \quad (1.97)$$

$$\underline{S}_{iD} = 3(z_i \underline{I}_h + z_d \underline{I}_d) \underline{I}_i^* = \underline{S}_{ih} + \underline{S}_{id} \quad (1.98)$$

Rezultă expresiile finale:

$$\underline{S}_{hD} = -9 \frac{z_N z_d^2}{D} \underline{U}_d \underline{I}_h^* \quad (1.99)$$

$$\underline{S}_{dD} = 3 \underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.100)$$

$$\underline{S}_{iD} = 0 \quad (1.101)$$

## 1.7. Analiza receptorului echilibrat real

Acest receptor este caracterizat de condițiile  $z_d = 0$  și  $z_i = 0$ .

Relațiile (1.4) devin:

$$\begin{cases} z_1 = z_h \\ z_2 = z_h \\ z_3 = z_h \end{cases} \quad (1.102)$$

Considerăm și în acest caz că sistemul tensiunilor de alimentare are numai componenta simetrică directă.

Ecuția matricială a tensiunilor ( 1.19 ) devine în acest caz:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_h & 0 & 0 \\ 0 & z_h & 0 \\ 0 & 0 & z_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3z_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.103)$$

Ecuția curenților ( 1.17 ) va avea forma:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} 0 \\ z_h^2 + 3z_N z_h \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.104)$$

unde:

$$D = z_h^3 + 3z_N z_h^2 \quad (1.105)$$

Pentru partea echilibrată putem scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} z_h & 0 & 0 \\ 0 & z_h & 0 \\ 0 & 0 & z_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.106)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_E = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} 0 \\ z_h^3 + 3z_N z_h^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.107)$$

Pentru firul neutru putem scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} 3z_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.108)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_N = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.109)$$

Observăm că avem relațiile:

$$\underline{U}_h = \underline{U}_{hE} + \underline{U}_{hN} = 0, \text{ cu } \underline{U}_{hN} = 0 \quad (1.110)$$

$$\underline{U}_d = \underline{U}_{dE} + \underline{U}_{dN}, \text{ cu } \underline{U}_{dN} = 0 \quad (1.111)$$

$$\underline{U}_i = \underline{U}_{iE} + \underline{U}_{iN} = 0, \text{ cu } \underline{U}_{iN} = 0 \quad (1.112)$$

de unde rezultă:

$$\underline{U}_{hE} = 0 \quad (1.113)$$

$$\underline{U}_{dE} = \underline{U}_d \quad (1.114)$$

$$\underline{U}_{iE} = 0 \quad (1.115)$$

În continuare vom calcula puterile absorbite de receptorul echilibrat real (**RER**).

Puterile pentru partea echilibrată sunt:

$$\underline{S}_{hE} = 3\underline{U}_{hE} \underline{I}_h^* = 0 \quad (1.116)$$

$$\underline{S}_{dE} = 3\underline{U}_{dE} \underline{I}_d^* = 3 \frac{z_h^3 + 3z_N z_h^2}{D} \underline{U}_d \underline{I}_d^* = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.117)$$

$$\underline{S}_{iE} = 3\underline{U}_{iE} \underline{I}_i^* = 0 \quad (1.118)$$

Puterile pentru impedanța firului neutru sunt:

$$\underline{S}_{hN} = 3\underline{U}_{hN} \underline{I}_h^* = 0 \quad (1.119)$$

$$\underline{S}_{dN} = 3\underline{U}_{dN} \underline{I}_d^* = 0 \quad (1.120)$$

$$\underline{S}_{iN} = 3\underline{U}_{iN} \underline{I}_i^* = 0 \quad (1.121)$$

Se observă că avem relațiile:

$$\underline{S}_{hE} = 0 \quad (1.122)$$

$$\underline{S}_{dE} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* = \underline{S}_g \quad (1.123)$$

$$\underline{S}_{iE} = 0 \quad (1.124)$$

Puterea totală absorbită de receptorul echilibrat este:

$$\underline{S} = \underline{S}_E + \underline{S}_N, \text{ unde } \underline{S}_N = 0 \quad (1.125)$$

$$\underline{S}_E = \underline{S}_{hE} + \underline{S}_{dE} + \underline{S}_{iE} \quad (1.126)$$

Rezultă:

$$\underline{S} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* = \underline{S}_g \quad (1.127)$$

De asemenea, mai putem scrie:

$$\underline{S} = \underline{S}_h + \underline{S}_d + \underline{S}_i \quad (1.128)$$

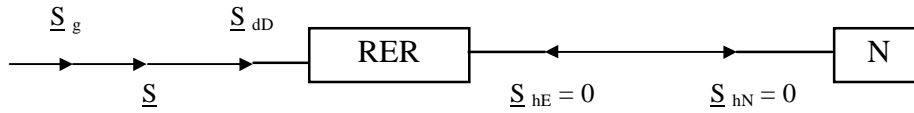
$$\underline{S}_h = \underline{S}_{hE} + \underline{S}_{hN} = 0 \quad (1.129)$$

$$\underline{S}_d = \underline{S}_{dE} + \underline{S}_{dN} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.130)$$

$$\underline{S}_i = \underline{S}_{iE} + \underline{S}_{iN} = 0 \quad (1.131)$$

În acest caz, impedanța firului neutru nu consumă putere. Receptorul fiind alimentat cu un sistem simetric de tensiuni, el primește putere numai pe componenta directă, care se consumă integral în partea echilibrată a receptorului.

Diagrama puterilor complexe este:

Fig. 1.16 Diagrama puterilor complexe pentru receptorul echilibrat real (**RER**)

## 1.8. Analiza receptorului echilibrat real alimentat cu un sistem nesimetric de tensiuni

Pentru această situație, putem utiliza ecuația (1.8) în care facem  $z_N = 0$ ,  $z_d = 0$ ,  $z_i = 0$  și obținem :

$$\underline{U}_h = z_h \underline{I}_h \quad ; \quad \underline{U}_d = z_h \underline{I}_d \quad ; \quad \underline{U}_i = z_h \underline{I}_i \quad (1.132)$$

Puterea totală complexă absorbită este:

$$\underline{S} = 3\underline{U}_h \underline{I}_h^* + 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* + 3\underline{U}_i \underline{I}_i^* \quad (1.133)$$

$$\underline{S} = 3z_h \underline{I}_h \underline{I}_h^* + 3z_h \underline{I}_d \underline{I}_d^* + 3z_h \underline{I}_i \underline{I}_i^* \quad (1.134)$$

$$\underline{S} = 3z_h (\underline{I}_h^2 + \underline{I}_d^2 + \underline{I}_i^2) \quad (1.135)$$

Acesta este și cazul părții echilibrate a receptorului dezechilibrat real.

Deoarece  $\text{Re}(z_h) \geq 0$ , putem afirma că receptorul primește putere activă pe toate cele trei componente simetrice. Puterile homopolare și inverse sunt în general deranjante (nedorite). Ele produc consumuri suplimentare și scăderi de randamente la motoare, la alți consumatori precum și în rețelele de alimentare.

## 1.9. Sinteză privind analiza receptorului dezechilibrat real

O caracterizare a receptorului dezechilibrat real se poate face cu ajutorul coeficienților de dezechilibru de calcul ai impedanțelor [P6], [P7], [P8], [P18], [P21].

Coeficientul de dezechilibru al componentei directe este prin definiție :

$$k_d = \frac{z_d}{z_h} \quad (1.136)$$

Coeficientul de dezechilibru al componentei inverse este prin definiție:

$$k_i = \frac{z_i}{z_h} \quad (1.137)$$

Coeficientul de raportare al impedanței firului neutru este:

$$k_N = \frac{z_N}{z_h} \quad (1.138)$$

Coeficienții  $k_d$ ,  $k_i$ ,  $k_N$  sunt în general numere complexe.

Vom considera și receptorul echilibrat care conține pe fiecare fază impedanța  $z_h$ . Evident, acest receptor se obține din receptorul dezechilibrat real când partea dezechilibrată dispare (triunghiul 123 se “restrânge” în punctul D) Puterea absorbită de acest receptor echilibrat real va fi:

$$\underline{S}_{RER} = 3 \frac{U_d^2}{z_h^*} \quad (1.139)$$

Rezultatele obținute anterior în cazul receptorului dezechilibrat real sunt prezentate în tabelele următoare. Mai precis, prezentăm repartiția căderilor de tensiune și a puterilor pe partea echilibrată, pe partea dezechilibrată și pe impedanța firului neutru.

Alimentarea se face cu un sistem direct de tensiuni ( $\underline{U}_{10}$ ,  $\underline{U}_{20}$ ,  $\underline{U}_{30}$ ).

Tabelul 1.1

Receptor dezechilibrat real (RDR)	Căderi de tensiune
Partea echilibrată (RER)	$\underline{U}_{hE} = \underline{U}_d \frac{k_d^2 - k_i}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i}$
	$\underline{U}_{dE} = \underline{U}_d \frac{1 - k_d k_i + 3k_N}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i}$
	$\underline{U}_{iE} = \underline{U}_d \frac{k_i^2 - k_d - 3k_N k_d}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i}$
Partea dezechilibrată (REDG)	$\underline{U}_{hD} = \underline{U}_d \frac{k_i - k_d^2 + 3k_N k_i - 3k_N k_d^2}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i}$
	$\underline{U}_{dD} = \underline{U}_d \frac{k_d^3 + k_i^3 - 2k_d k_i - 3k_N k_d k_i}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i}$
	$\underline{U}_{iD} = \underline{U}_d \frac{k_d - k_i^2 + 3k_N k_d}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i}$
Impedanța firului neutru (N)	$\underline{U}_{hN} = \underline{U}_d \frac{3k_N k_d^2 - 3k_N k_i}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i}$
	$\underline{U}_{dN} = 0$
	$\underline{U}_{iN} = 0$

Se observă că dacă avem  $k_d = k_i = 0$  se obține  $\underline{U}_{dE} = \underline{U}_d$ , toate celelalte căderi de tensiune devenind egale cu zero. Este cazul unui receptor echilibrat, având pe fiecare fază impedanța  $z_h$ , alimentat cu un sistem simetric direct de tensiuni de fază ale rețelei.

Pentru calculul tabelului cu puteri absorbite exprimate funcție de coeficienții de dezechilibru, procedăm în modul următor. Din relațiile (1.17) obținem curenții:

$$\begin{aligned} \underline{I}_h &= \frac{\underline{U}_d (z_d^2 - z_h z_i)}{z_h^3 + z_d^3 + z_i^3 - 3z_h z_d z_i + 3z_N z_h^2 - 3z_N z_d z_i} \\ \underline{I}_d &= \frac{\underline{U}_d (z_h^2 - z_d z_i + 3z_N z_h)}{z_h^3 + z_d^3 + z_i^3 - 3z_h z_d z_i + 3z_N z_h^2 - 3z_N z_d z_i} \\ \underline{I}_i &= \frac{\underline{U}_d (z_i^2 - z_h z_i + 3z_N z_d)}{z_h^3 + z_d^3 + z_i^3 - 3z_h z_d z_i + 3z_N z_h^2 - 3z_N z_d z_i} \end{aligned} \quad (1.140)$$

Utilizăm relațiile de definiție ale coeficienților de dezechilibru (1.136), (1.137), (1.138).

$$\begin{aligned} \underline{I}_h &= \frac{\frac{\underline{U}_d}{z_h} (k_d^2 - k_i)}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i} \\ \underline{I}_d &= \frac{\frac{\underline{U}_d}{z_h} (1 - k_d k_i + 3k_N)}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i} \\ \underline{I}_i &= \frac{\frac{\underline{U}_d}{z_h} (k_i^2 - k_d - 3k_N k_d)}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i} \end{aligned} \quad (1.141)$$

Să calculăm puterea  $\underline{S}_{hE}$ .

$$\begin{aligned} \underline{S}_{hE} &= 3\underline{U}_{hE} \underline{I}_h^* = 3\underline{U}_d \frac{k_d^2 - k_i}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i} \cdot \frac{\underline{U}_d^*}{z_h^*} \frac{(k_d^2 - k_i)^*}{(1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i)^*} \\ \underline{S}_{hE} &= S_{RER} \frac{|k_d^2 - k_i|^2}{|1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i|^2} \end{aligned}$$

Pentru celelalte puteri se procedează asemănător. Se obține următorul tabel.



Tabelul 1.2

<b>Receptor dezechilibrat real (RDR)</b>	<b>Puteri absorbite</b>
<b>Partea echilibrată (RER)</b>	$\underline{S}_{hE} = \underline{S}_{RER} \frac{ k_d^2 - k_i ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{dE} = \underline{S}_{RER} \frac{ 1 - k_d k_i + 3k_N ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{iE} = \underline{S}_{RER} \frac{ k_i^2 - k_d - 3k_N k_d ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i ^2}$
<b>Partea dezechilibrată (REDG)</b>	$\underline{S}_{hD} = -\underline{S}_{RER} \frac{(1 + 3k_N)  k_d^2 - k_i ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{dD} = \underline{S}_{RER} \frac{(k_d^3 + k_i^3 - 2k_d k_i - 3k_N k_d k_i) (1 - k_d k_i + 3k_N)^*}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{iD} = -\underline{S}_{RER} \frac{ k_i^2 - k_d - 3k_N k_d ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i ^2}$
<b>Impedanța firului neutru (N)</b>	$\underline{S}_{hN} = \underline{S}_{RER} \frac{3k_N  k_d^2 - k_i ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{dN} = 0$
	$\underline{S}_{iN} = 0$

Și în acest tabel făcând  $k_d = k_i = 0$  se obține  $\underline{S}_{dE} = \underline{S}_{RER}$ , cazul consumatorului echilibrat amintit anterior (toate celelalte puteri sunt nule).

Atât în tabelul 1.1 cât și în tabelul 1.2 putem face pe rând  $k_i = 0$  și  $k_d = 0$  și obținem expresiile corespunzătoare cazurilor particulare respective.

Relativ la tabelele 1.1 și 1.2 se pot face unele observații care reprezintă de fapt regăsirea și sublinierea unor proprietăți esențiale puse în evidență anterior.

1. Căderile de tensiune verifică relațiile:

$$\underline{U}_{hE} + \underline{U}_{hD} + \underline{U}_{hN} = 0 \quad (1.142)$$

$$\underline{U}_{dE} + \underline{U}_{dD} + \underline{U}_{dN} = \underline{U}_d \quad (1.143)$$

$$\underline{U}_{iE} + \underline{U}_{iD} + \underline{U}_{iN} = 0 \quad (1.144)$$

2. Pentru puteri se poate face o observație asemănătoare:

$$\underline{S}_{hE} + \underline{S}_{hD} + \underline{S}_{hN} = 0 \quad (1.145)$$

$$\underline{S}_{dE} + \underline{S}_{dD} + \underline{S}_{dN} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* = \underline{S}_g \quad (1.146)$$

$$\underline{S}_{iE} + \underline{S}_{iD} + \underline{S}_{iN} = 0 \quad (1.147)$$

3. Deoarece  $\underline{S}_{\text{RER}}$  are partea reală pozitivă, din tabelul 1.2 rezultă imediat că puterea activă inversă corespunzătoare părții extrem dezechilibrată este negativă, deci este o putere generată de partea extrem dezechilibrată a receptorului.

Puterile active corespunzătoare componentelor homopolară și directă pot fi pozitive sau negative.

4. Relativ la partea echilibrată, puterile active sunt pozitive pe toate cele trei componente.

5. Pentru impedanța firului neutru, puterea activă corespunzătoare componentei homopolare poate să fie pozitivă sau negativă ( eventual nulă ). Dacă  $k_N$  se reduce la un număr real strict pozitiv, această putere este pozitivă ( în această situație  $z_N$  și  $z_h$  au același argument ). Dacă  $z_N$  este o rezistență pură, de asemenea puterea activă corespunzătoare componentei homopolare este pozitivă.

Considerând circulația internă a puterilor active se pot reprezenta cele două situații cu existența fizică ( fig.1.17, cazurile a și b ).

În figura 1.17 s-a notat:

- **REDG** = receptor extrem dezechilibrat generalizat;
- **RER** = receptor echilibrat real;
- **N** = impedanța firului neutru;
- **RDR** = receptor dezechilibrat real.

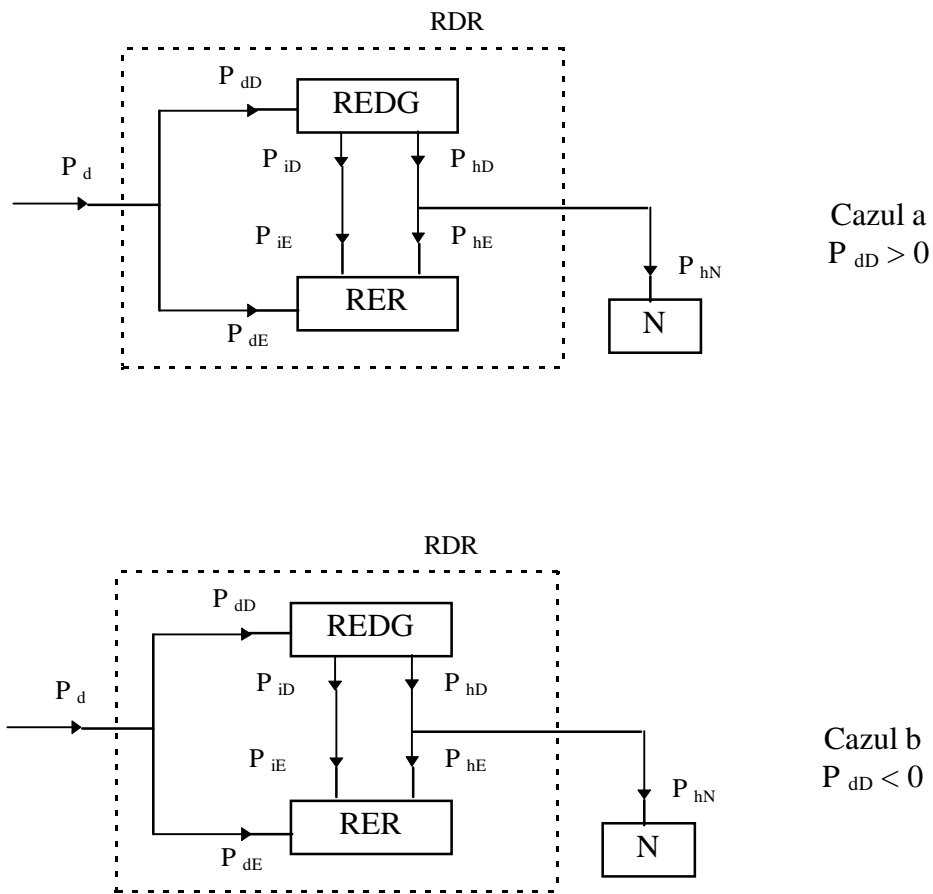


Fig.1.17 Diagrama puterilor active pentru receptorul dezechilibrat real (RDR)

Prezintă interes studierea puterii directe corespunzătoare părții dezechilibrate și echilibrate, respectiv raportul acestor puteri:

$$\frac{\underline{S}_{dD}}{\underline{S}_{dE}} = \frac{(k_d^3 + k_i^3 - 2k_d k_i - 3k_N k_d k_i)(1 - k_d k_i + 3k_N)^*}{|1 - k_d k_i + 3k_N|^2}$$

sau:

$$\frac{\underline{S}_{dD}}{\underline{S}_{dE}} = \frac{k_d^3 + k_i^3 - 2k_d k_i - 3k_N k_d k_i}{1 - k_d k_i + 3k_N} \tag{1.148}$$

Coeficienții  $k_d$ ,  $k_i$ ,  $k_N$  sunt în general numere complexe, ceea ce îngreunează studiul. De asemenea prezintă interes studierea raportului:

$$\frac{\underline{S}_{hD}}{\underline{S}_{hE}} = -1 - 3k_N \tag{1.149}$$

## 1.10. Analiza unor cazuri particulare

Există cazuri particulare de receptoare trifazate dezechilibrate care prezintă interes și au și avantajul unor simplificări de calcule [P6], [P7], [P18].

Un caz particular important este acela în care coeficienții de dezechilibru sunt numere reale. Componentele simetrice de calcul ale impedanțelor vor fi:

$$z_h = ze^{j\alpha} ; z_d = k_d ze^{j\alpha} ; z_i = k_i ze^{j\alpha} ; z_N = k_N ze^{j\alpha} \quad (1.150)$$

unde:  $z, k_d, k_i, k_N$  sunt numere reale,  $z > 0$ .

Impedanțele de fază vor fi:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = (1 + k_d + k_i) ze^{j\alpha} \\ z_2 = \left( 1 - \frac{k_d + k_i}{2} + j\sqrt{3} \frac{k_i - k_d}{2} \right) ze^{j\alpha} \\ z_3 = \left( 1 - \frac{k_d + k_i}{2} - j\sqrt{3} \frac{k_i - k_d}{2} \right) ze^{j\alpha} \end{array} \right. \quad (1.151)$$

Din aceste relații deducem că în acest caz impedanțele de pe fazele 2 și 3 au modulele egale și sunt simetrice față de direcția  $e^{j\alpha}$ .

Coeficienții  $k_d, k_i$  fiind numere reale, se simplifică studiul puterii directe corespunzătoare părții dezechilibrate.

Astfel avem:

$$\frac{\underline{S}_{dD}}{\underline{S}_{dE}} = \frac{P_{dD}}{P_{dE}} = \frac{k_d^3 + k_i^3 - 2k_d k_i - 3k_N k_d k_i}{1 - k_d k_i + 3k_N} \quad (1.152)$$

unde membrul drept este un număr real.

Studiind semnul acestui raport, deducem cazurile când partea dezechilibrată se comportă ca un receptor, respectiv ca un generator (semnul este plus sau minus). Pentru un  $k_N$  fixat, reprezentarea într-un plan raportat la un sistem cartezian cu axele  $k_d$  și  $k_i$  permite delimitarea zonelor pozitive și negative.

In cele ce urmează vom presupune că avem  $k_N = 1/3$ , adică  $z_h = 3 z_N$ . Atunci vom avea:

$$\frac{\underline{S}_{dD}}{\underline{S}_{dE}} = \frac{P_{dD}}{P_{dE}} = \frac{k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i}{2 - k_d k_i} \quad (1.153)$$

Ecuțiile:

$$k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i = 0 \quad (1.154)$$

$$2 - k_d k_i = 0 \quad (1.155)$$

reprezintă un foliu al lui Descartes, respectiv o hiperbolă echilateră.

Reprezentarea grafică a celor două curbe este redată în figura 1.18.

Foliul lui Descartes admite asimptota:

$$k_d + k_i + 1 = 0 \quad (1.156)$$

El este simetric față de prima bisectoare și are “vârful” de coordonate  $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .

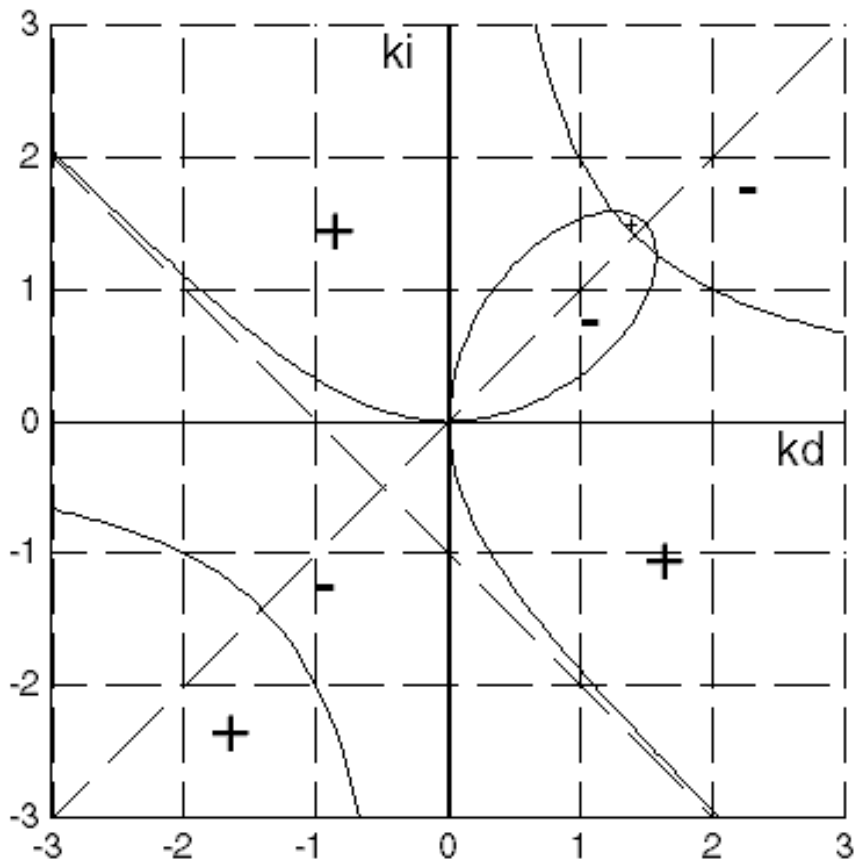


Fig.1.18 Reprezentarea grafică a numărătorului (foliul lui Descartes) respectiv a numitorului (hiperbola echilateră) pentru raportul  $P_{dD} / P_{dE}$

Axele de coordonate sunt tangente la foliu în origine.

Hiperbola echilateră intersectează prima bisectoare în punctele de coordonate  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  și  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ .

Studiind semnul numărătorului și numitorului, rezultă pentru raport 7 regiuni ale planului cu semnele indicate în figură.

În cele patru regiuni ale planului cu semnul plus partea dezechilibrată a receptorului primește putere activă, iar în cele trei regiuni ale planului cu semnul minus partea dezechilibrată a receptorului debitează putere activă.

Considerând punctele de pe prima bisectoare (deci  $k_d = k_i$ ) obținem:

$$\frac{P_{dD}}{P_{dE}} = \frac{2k_d^3 - 3k_d^2}{-k_d^2 + 2} \quad (1.157)$$

cu reprezentarea din figura 1.19. (a).

Asimptota oblică are ecuația  $y = -2x + 3$

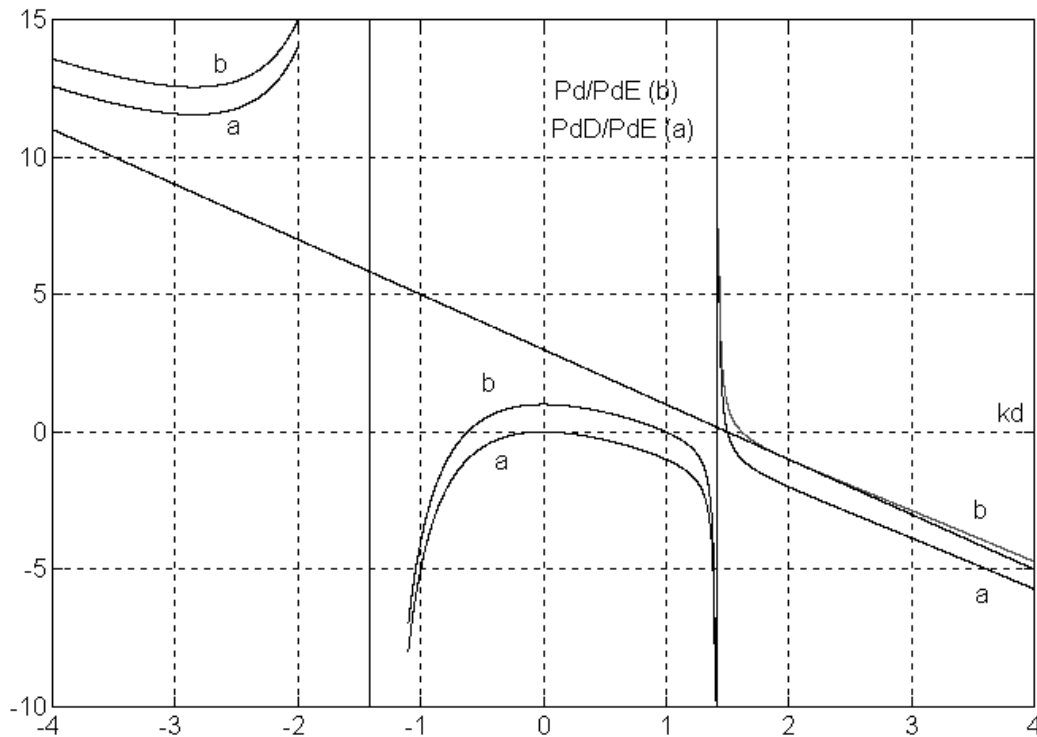


Fig.1.19 Reprezentări grafice pentru situația  $k_d = k_i$

Din figura 1.19 rezultă că partea extrem dezechilibrată este receptor propriu zis pentru

$$k_d \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup \left(\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Partea extrem dezechilibrată se comportă ca un generator pentru:

$$k_d \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

În aceeași figură este reprezentată și curba de variație pentru:

$$\frac{P_d}{P_{dE}} = 1 + \frac{P_{dD}}{P_{dE}} \tag{1.158}$$

( curba b )

Din această curbă deducem că întregul receptor trifazat dezechilibrat devine un generator care debitează putere activă în restul circuitului dacă:

$$k_d \in \left( -\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \cup (1, \sqrt{2}) \cup \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right)$$

In cazul studiat de noi, această situație nu poate avea existență reală. Pentru restul de valori reale ale lui  $k_d$  avem un receptor propriu zis.

Considerând punctele de pe a doua bisectoare (deci  $k_d = -k_i$ ) obținem:

$$\frac{P_{dD}}{P_{dE}} = \frac{3k_d^2}{2 + k_d^2} \tag{1.159}$$

cu reprezentarea din figura 1.20 (curba a)

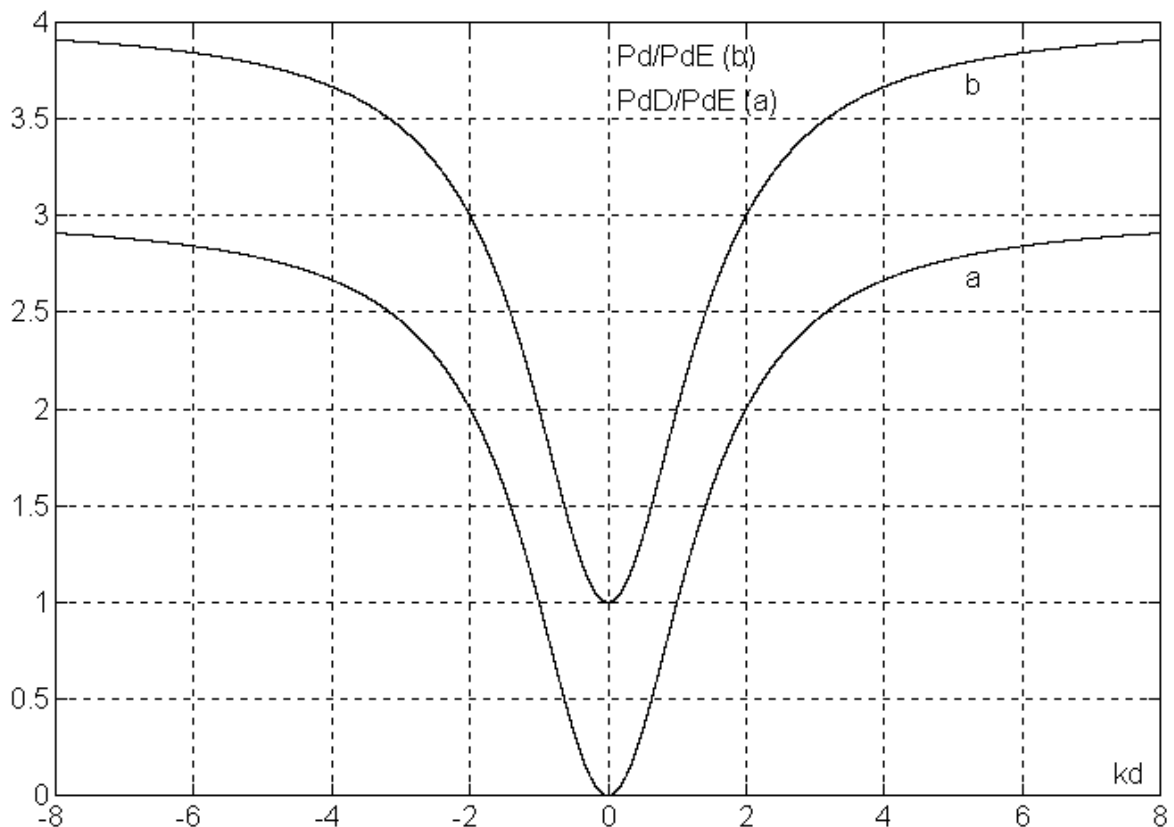


Fig. 1.20 Reprezentări grafice pentru situația  $k_d = -k_i$

În acest caz partea extrem dezechilibrată reprezintă un receptor pentru orice valoare a lui  $k_d$ . S-a reprezentat și curba:

$$\frac{P_d}{P_{dE}} = 1 + \frac{P_{dD}}{P_{dE}} \quad (1.160)$$

( curba b ).

Sistemul trifazat de impedanțe reprezintă un receptor pentru orice valoare a lui  $k_d$ .

Considerând punctele de pe axa absciselor (deci  $k_i = 0$ ) obținem:

$$\frac{P_{dD}}{P_{dE}} = \frac{1}{2} k_d^3 \quad (1.161)$$

$$\frac{P_d}{P_{dE}} = 1 + \frac{1}{2} k_d^3 \quad (1.162)$$

cu reprezentările din figura 1.21

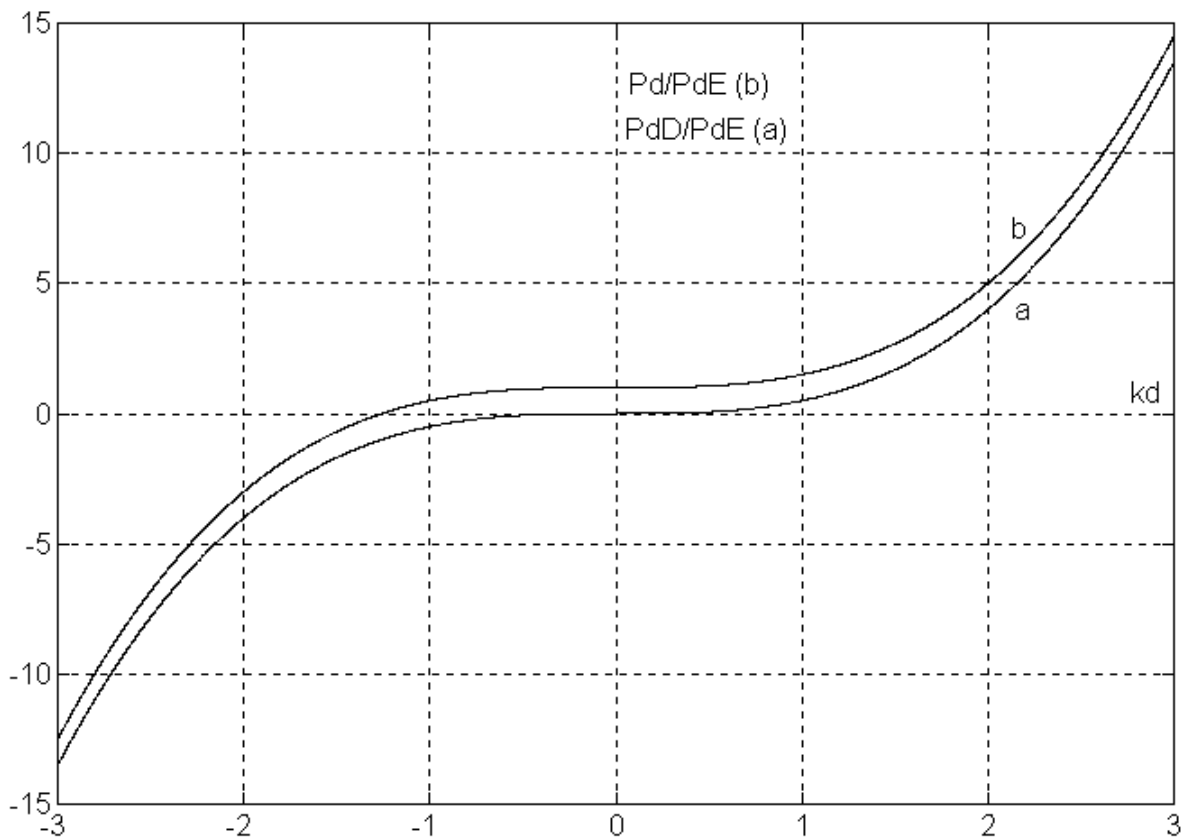


Fig. 1.21 Reprezentări grafice pentru situația  $k_i = 0$

Deci, pentru  $k_d > 0$  (și  $k_i = 0$ ) partea extrem dezechilibrată a receptorului este receptor propriu zis, iar pentru  $k_d < 0$  (și  $k_i = 0$ ) este generator pentru componenta directă a puterii active.



Pentru  $k_d > -\sqrt[3]{2} \approx -1,26$  (și  $k_i = 0$ ) întregul receptor trifazat este un consumator de putere activă. Pentru  $k_d < -\sqrt[3]{2}$  (și  $k_i = 0$ ) întregul receptor trifazat devine un generator care debitează putere activă în restul rețelei. Această situație nu poate avea existență reală în cazul nostru.

Considerând puncte de pe axa ordonatelor (deci  $k_d = 0$ ) obținem:

$$\frac{P_{dD}}{P_{dE}} = \frac{1}{2} k_i^3 \tag{1.163}$$

$$\frac{P_{dD}}{P_{dE}} = 1 + \frac{1}{2} k_i^3 \tag{1.164}$$

cu reprezentările din figura 1.22

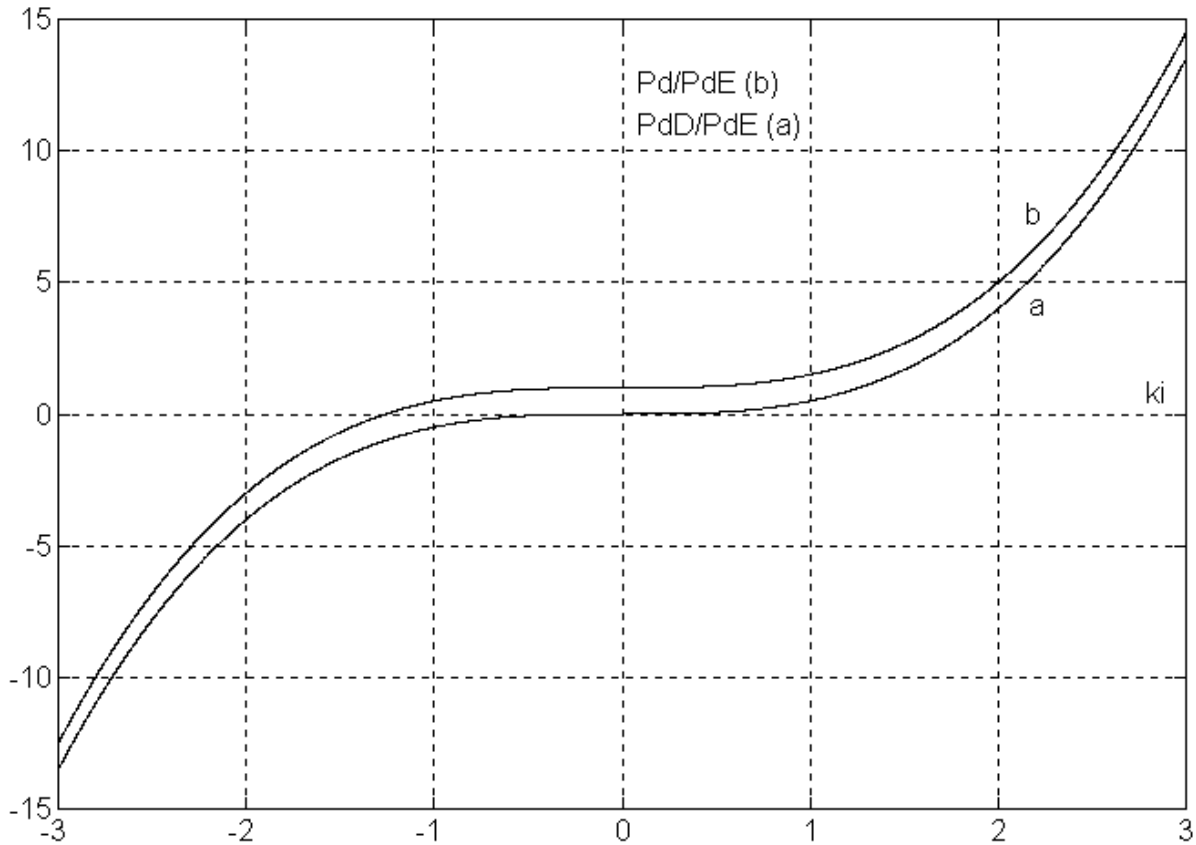


Fig.1.22 Reprezentări grafice pentru situația  $k_d = 0$

Interpretările sunt asemănătoare cu cele de la cazul anterior (schimbând pe  $k_d$  cu  $k_i$ ).

În aceeași ipoteză a coeficienților de dezechilibru  $k_d, k_i, k_N$  numere reale, vom studia raportul:

$$\frac{\underline{S}_{hD}}{\underline{S}_{hE}} = \frac{P_{hD}}{P_{hE}} = -1 - 3k_N \tag{1.165}$$

Reprezentarea grafică a variației acestui raport în funcție de  $k_N$  este redată în figura 1.23 (a).

In figura 1.23 ( b ) este reprezentată variația raportului:

$$\frac{P_{hN}}{P_{hE}} = -\frac{P_{hD}}{P_{hE}} - 1 = 3k_N \quad (1.166)$$

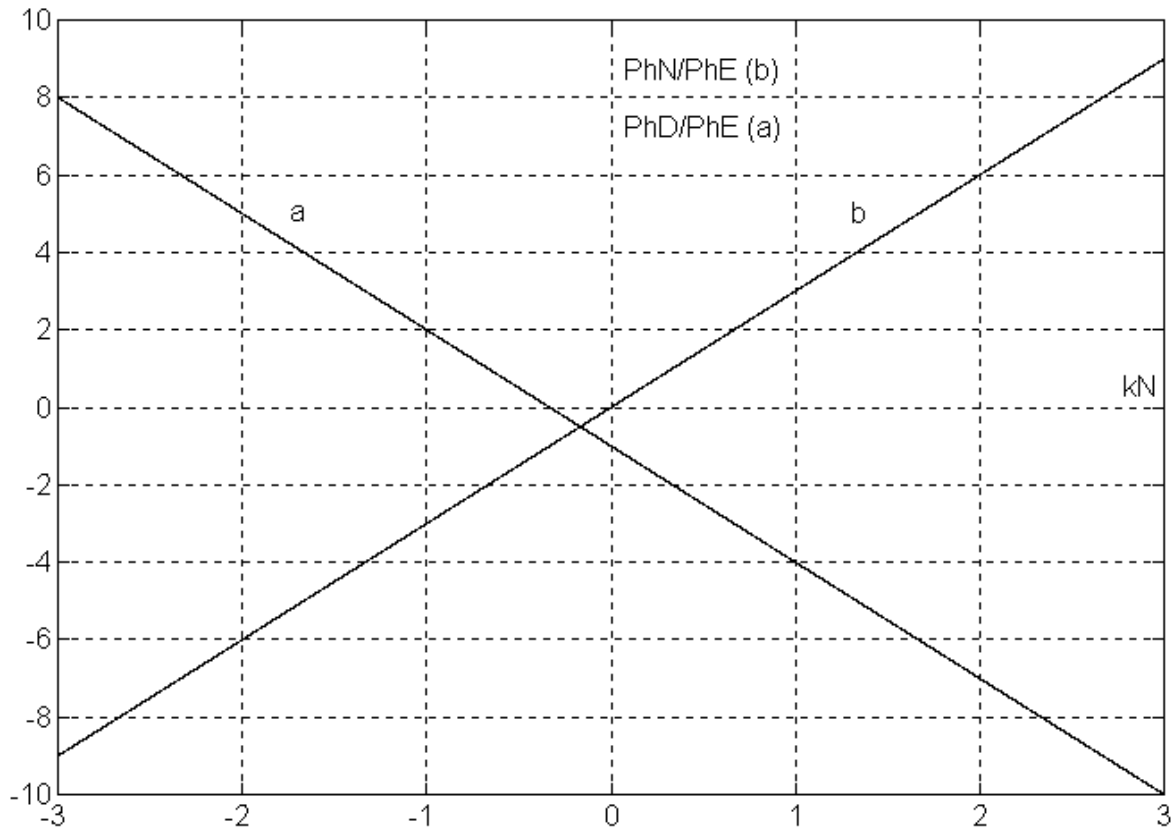


Fig. 1.23 Representări grafice funcție de  $k_N$

Se observă că pentru  $k_N > -\frac{1}{3}$  partea extrem dezechilibrată debitează putere activă pe componenta homopolară.

De asemenea observăm că pentru  $k_N > 0$  impedanța firului neutru absoarbe putere activă pe componenta homopolară.

Revenim la variația raportului considerat anterior, adică:

$$\frac{P_{dD}}{P_{dE}} = \frac{k_d^3 + k_i^3 - 2k_d k_i - 3k_N k_d k_i}{1 - k_d k_i + 3k_N} \quad (1.167)$$

Este utilă și sugestivă reprezentarea 3D a acestui raport, respectiv a suprafeței corespunzătoare, pentru un  $k_N$  fixat. Se observă domeniile din planul variabilelor  $k_d, k_i$  unde raportul este pozitiv sau negativ, cu interpretările aferente.

În continuare, se prezintă câteva reprezentări de acest tip (figurile: 1.24, 1.25, 1.26, 1.27, 1.28).

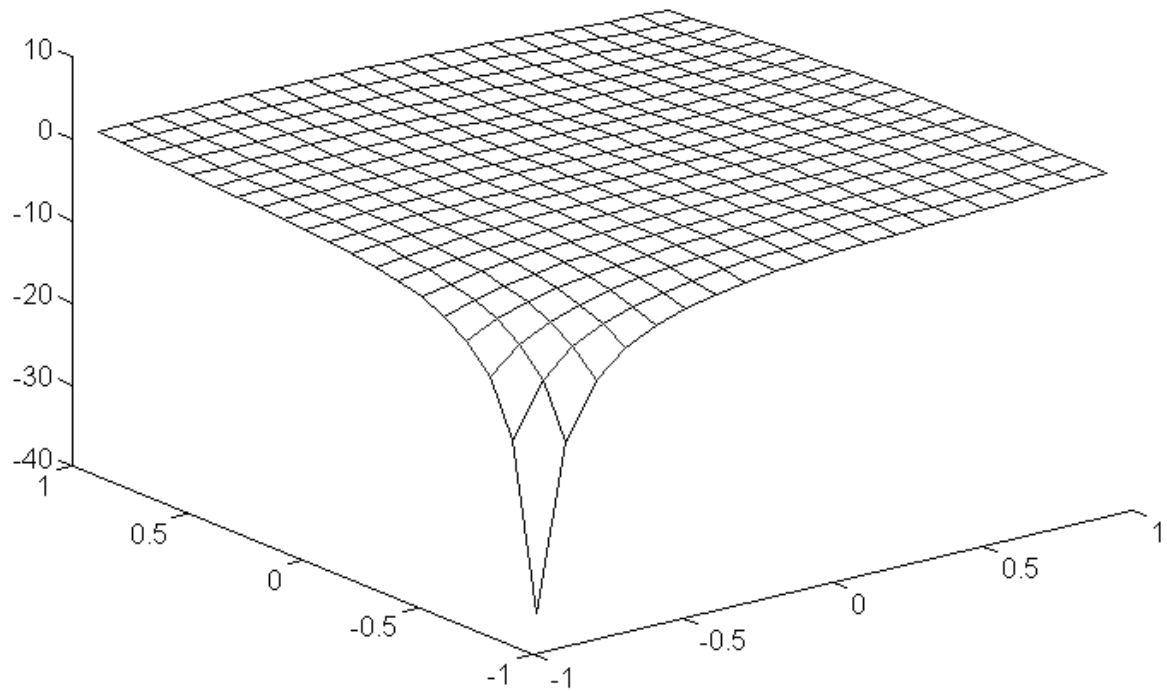


Fig. 1.24. Reprezentarea grafică 3D a variației raportului  $P_{dD}/P_{dE}$  pentru  $k_N = 0$

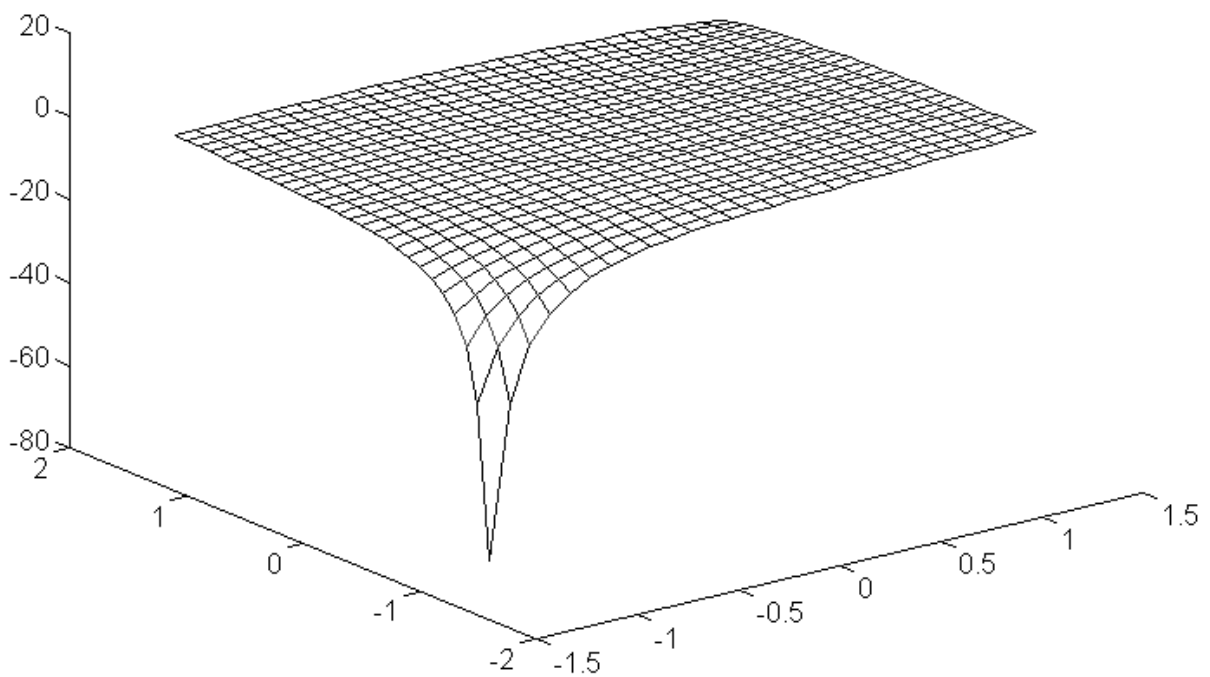


Fig. 1.25. Reprezentarea grafică 3D a variației raportului  $P_{dD}/P_{dE}$  pentru  $k_N = 1/3$

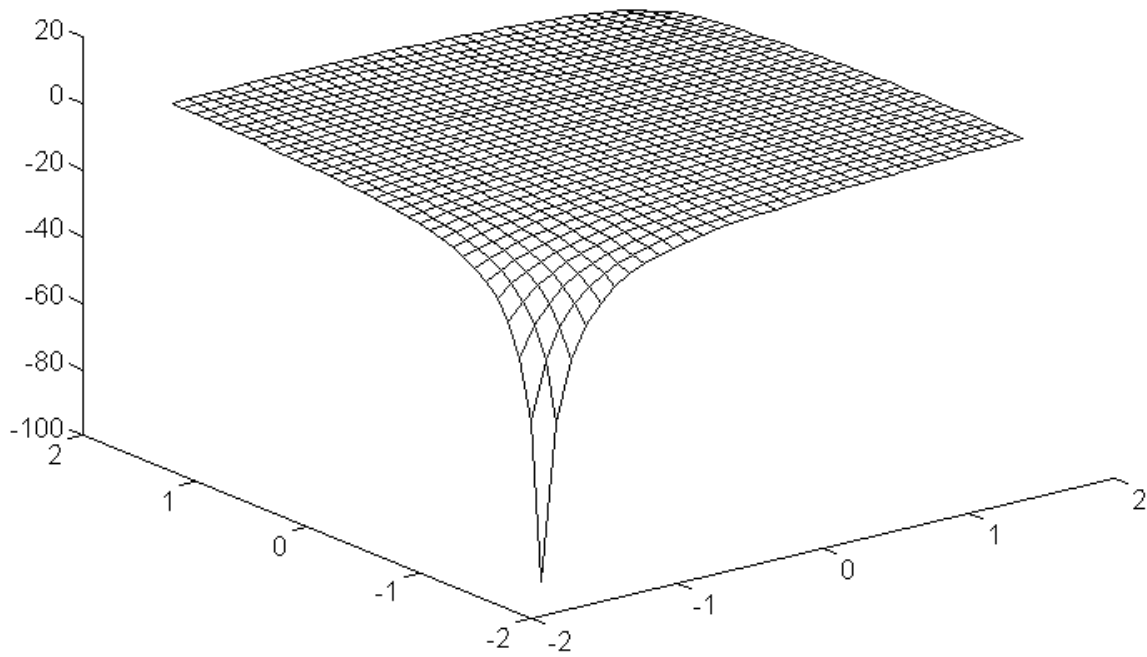


Fig. 1.26. Reprezentarea grafică 3D a variației raportului  $P_{dD}/P_{dE}$  pentru  $k_N = 2/3$

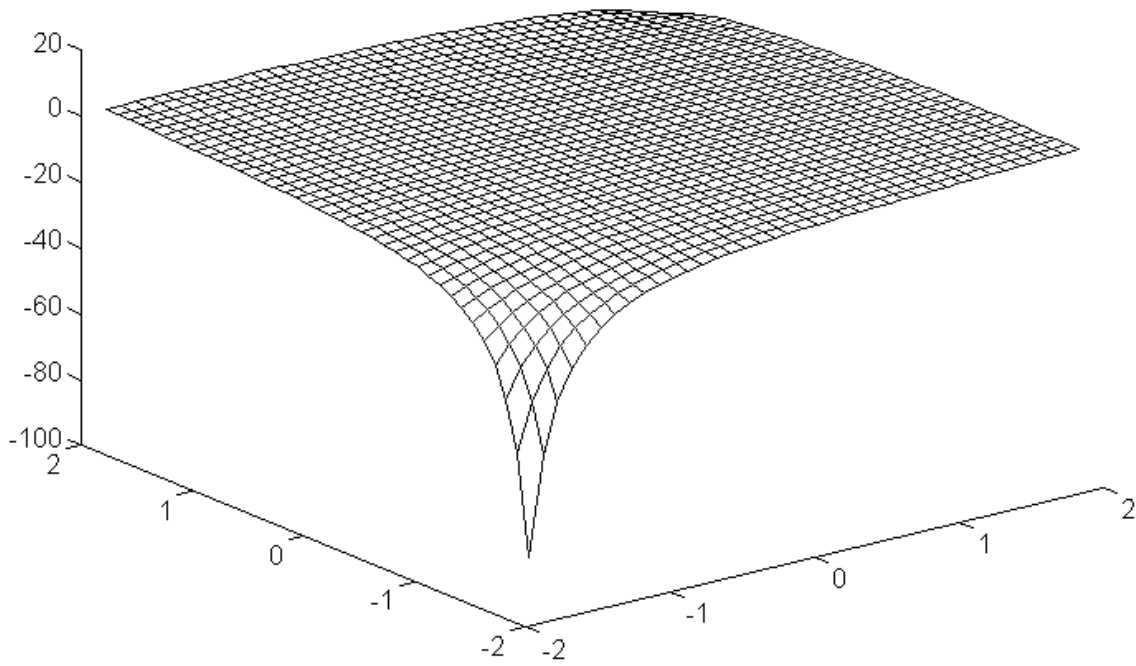


Fig. 1.27. Reprezentarea grafică 3D a variației raportului  $P_{dD}/P_{dE}$  pentru  $k_N = 1$

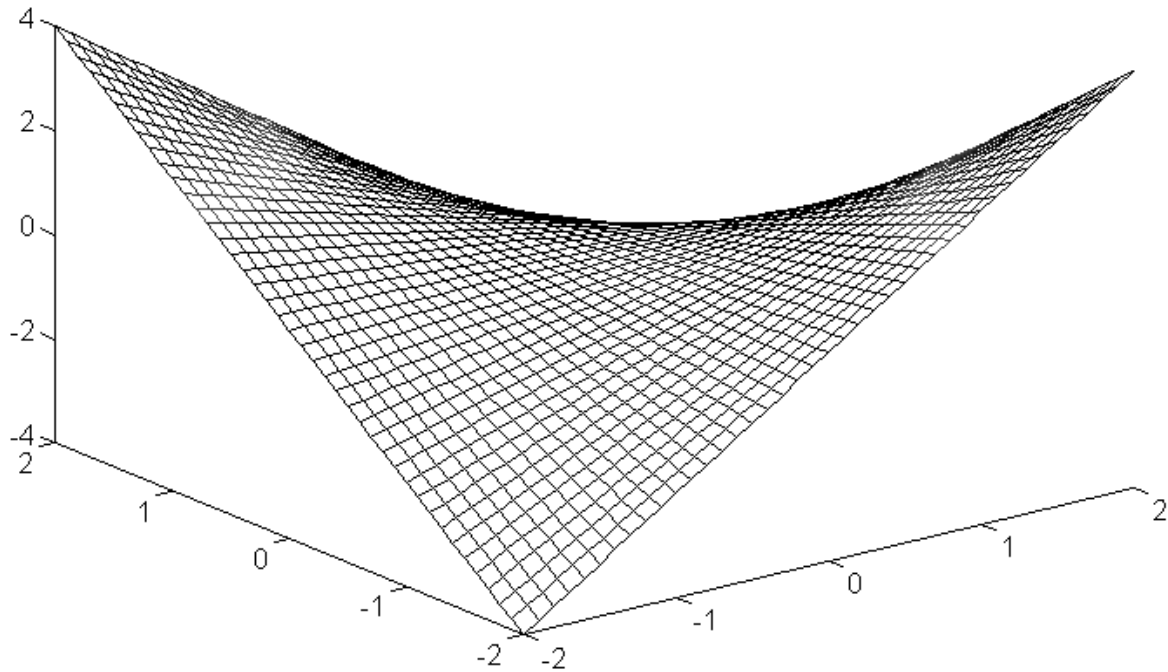


Fig. 1.28. Reprezentarea grafică 3D a variației raportului  $P_{dD}/P_{dE}$  pentru  $k_N = \infty$

### 1.11. Cazurile extreme $z_N = 0$ și $z_N = \infty$

Aceste cazuri extreme (din punctul de vedere al valorii impedanței firului neutru) reprezintă cazurile legării în stea cu fir neutru de impedanță practic nulă, respectiv al legării în stea fără fir neutru.

În fiecare din aceste cazuri se poate face o analiză asemănătoare celei prezentate anterior pentru cazul general al unei impedanțe  $z_N$  oarecare [P6], [P7], [P8], [P18], [P25]. Unele concluzii se pot obține din cazul general, prin trecere la limită.

Astfel, în cazul legării în stea cu fir neutru cu impedanță practic nulă tabelul cu puterile complexe absorbite are următoarea componență (tabelul 1.3).

Tabelul 1.3

<b>Receptor dezechilibrat real (RDR)</b>	<b>Puteri absorbite (<math>z_N = 0</math>)</b>
<b>Partea echilibrată (RER)</b>	$\underline{S}_{hE} = \underline{S}_{RER} \frac{ k_d^2 - k_i ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{dE} = \underline{S}_{RER} \frac{ 1 - k_d k_i ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{iE} = \underline{S}_{RER} \frac{ k_i^2 - k_d ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i ^2}$
<b>Partea dezechilibrată (REDG)</b>	$\underline{S}_{hD} = -\underline{S}_{RER} \frac{ k_d^2 - k_i ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{dD} = \underline{S}_{RER} \frac{(k_d^3 + k_i^3 - 2k_d k_i)(1 - k_d k_i)^*}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{iD} = -\underline{S}_{RER} \frac{ k_i^2 - k_d ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i ^2}$
<b>Impedanța firului neutru (N)</b>	$\underline{S}_{hN} = 0$
	$\underline{S}_{dN} = 0$
	$\underline{S}_{iN} = 0$

Raportul (1.152) studiat anterior primește forma:

$$\frac{P_{dD}}{P_{dE}} = \frac{k_d^3 + k_i^3 - 2k_d k_i}{1 - k_d k_i} \quad (1.168)$$

Studiul acestui raport se face asemănător cu cel al cazului general [P6], [P7], [P18].

În cazul legării în stea fără fir neutru, tabelul cu puterile complexe absorbite va avea următoarea formă (tabelul 1.4)

Tabelul 1.4

<b>Receptor dezechilibrat real (RDR)</b>	<b>Puteri absorbite (<math>z_N = \infty</math>)</b>
<b>Partea echilibrată (RER)</b>	$\underline{S}_{hE} = 0$
	$\underline{S}_{dE} = \underline{S}_{RER} \frac{1}{ 1 - k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{iE} = \underline{S}_{RER} \frac{ k_d ^2}{ 1 - k_d k_i ^2}$
<b>Partea dezechilibrată (REDG)</b>	$\underline{S}_{hD} = 0$
	$\underline{S}_{dD} = \underline{S}_{RER} \frac{-k_d k_i}{ 1 - k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{iD} = -\underline{S}_{RER} \frac{ k_d ^2}{ 1 - k_d k_i ^2}$
<b>Impedanța firului neutru (N)</b>	$\underline{S}_{hN} = 0$
	$\underline{S}_{dN} = 0$
	$\underline{S}_{iN} = 0$

Raportul (1.152) studiat anterior primește forma:

$$\frac{P_{hD}}{P_{hE}} = -k_d k_i \quad (1.169)$$

Studiul acestui raport se face asemănător cu cel al cazului general [P8].

## 1.12. Concluzii și observații

Având în vedere diferitele aspecte relevate în legătură cu receptorul trifazat dezechilibrat alimentat cu un sistem de tensiuni de fază oarecare (în particular, simetric) putem formula o serie de concluzii.

1. Introducând noțiunea de impedanță generalizată se pot utiliza sistematic componentele simetrice de calcul ale impedanțelor și se poate da o schemă echivalentă a receptorului dezechilibrat, conținând o parte echilibrată și o parte extrem dezechilibrată.

2. Din ecuațiile de tensiuni și de curenți și din expresiile puterilor complexe rezultă componentele tensiunilor și puterilor pe cele trei secvențe (homopolară, directă, inversă) și pe cele trei părți ale receptorului considerat (partea echilibrată, partea extrem dezechilibrată și impedanța firului neutru). Este pusă în evidență o circulație internă de putere între aceste părți ale receptorului, redată în figura 1.14. În același timp se demonstrează că partea extrem dezechilibrată se comportă ca un convertizor de putere a componentelor simetrice.

3. Utilizarea coeficienților de dezechilibru  $k_d$ ,  $k_i$ ,  $k_N$  permite o sistematizare a rezultatelor obținute anterior. Dacă ne referim la circulația puterii active, se deduce că puterea activă inversă aferentă părții extrem dezechilibrate este întotdeauna negativă deci este o putere generată de partea extrem dezechilibrată a receptorului. Partea echilibrată a unui receptor sau un receptor echilibrat absoarbe totdeauna putere activă pe toate cele trei componente. Se evidențiază cele două situații cu existență fizică obiectivă (fig.1.17)

4. În cazul coeficienților de dezechilibru reali se face un studiu detaliat al circulației interne a puterilor active.

5. Ca observație, remarcăm că utilizând metoda expusă se poate face un studiu energetic, considerând impedanțele liniei dintre generator și receptor [P8], [T10], [P18], [P29]. Concluzia care rezultă este că receptoarele dezechilibrate sunt surse (cauze) de puteri și energii de componente homopolare și inverse care sunt absorbite de receptoarele echilibrate, inclusiv de rețelele de alimentare care pot fi considerate ca fiind de asemenea echilibrate. Consecința acestor circulații de puteri de componente simetrice este creșterea consumului tehnologic al rețelelor care se adaugă influențelor negative asupra funcționării consumatorilor echilibrați. Astfel, se știe că funcționarea motoarelor asincrone trifazate în regimuri nesimetrice este însoțită de scăderea randamentului și în general a performanțelor de lucru, datorită apariției câmpului magnetic învârtitor invers.



Se impune prin urmare compensarea dezechilibrului la consumatorii trifazați. Această compensare are mari avantaje tehnice și economice, fiind o problemă complexă sub aspect teoretic și practic. În general, problema trebuie rezolvată în corelare cu necesitatea compensării și a armonicilor superioare și bineînțeles a îmbunătățirii factorului de putere [P6], [P7], [P8], [T10], [T11],[T12], [P5], [I1], [P18], [P29].

La elaborarea acestui capitol, autorul a adus o serie de contribuții originale care vor fi enumerate în continuare:

- Propun o nouă clasificare a receptoarelor trifazate și anume în receptoare trifazate dezechilibrate, receptoare trifazate echilibrate și receptoare trifazate extrem dezechilibrate.
- Propun denumirea de impedanță generalizată pentru impedanța cu partea reală negativă. În literatura de specialitate am întâlnit denumirea de impedanță ideală (a se vedea de exemplu lucrarea [P7] aparținând lui E. Pavel), dar consider că denumirea de impedanță generalizată este mai potrivită.
- Introduc noțiunea de receptor extrem dezechilibrat real (**REDR**).
- Propun utilizarea diagramelor energetice pentru puterile complexe aferente celor trei secvențe (homopolară, directă, inversă) și celor trei părți ale receptorului trifazat (partea echilibrată, partea dezechilibrată și impedanța firului neutru). Aceste diagrame energetice permit ilustrarea cu claritate a circulației interne de putere între aceste părți ale receptorului.
- Pun în evidență cele două cazuri cu existență fizică reală care se pot întâlni pentru receptorul dezechilibrat real (**RDR**), considerând circulația internă a puterilor active.
- Efectuez un studiu amănunțit (pentru mai multe situații) al variației raportului  $P_{dD} / P_{dE}$  funcție de coeficienții de dezechilibru ai impedanțelor  $k_d$  și  $k_i$ , în cazul receptorului dezechilibrat real (**RDR**). Pentru evidențierea cât mai sugestivă a variației acestui raport, am realizat și reprezentări 3D (tridimensionale) pentru mai multe valori ale impedanței firului neutru.





**CAPITOLUL 2**  
**RECEPTOARE DEZECHILIBRATE**  
**DISCRETE**



## 2. RECEPTOARE DEZECHILIBRATE DISCRETE

### 2.1. Definiția receptorului dezechilibrat discret

Considerăm un receptor dezechilibrat  $m$  - fazat și schema echivalentă în conexiunea stea (fig. 2.1).

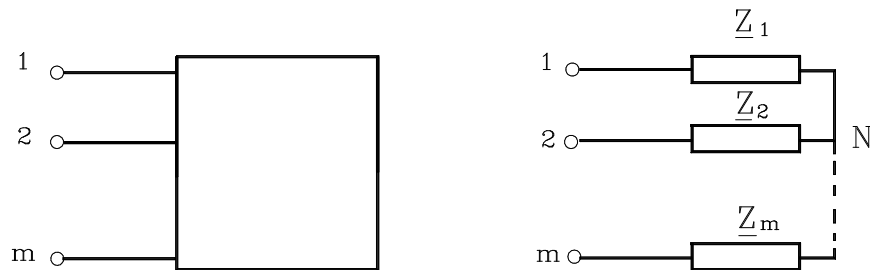


Fig. 2.1 Receptor dezechilibrat  $m$  - fazat și schema echivalentă în stea

În fazele receptorului se găsesc impedanțele complexe  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_m$  și considerăm fazele distincte (discernabile).

Dacă aceste impedanțe sunt formate (prin înseriere) din impedanțe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul  $m$  - fazat receptor dezechilibrat discret (**RDD**). [P19], [P23], [P30].

Presupunem că avem  $n$  impedanțe elementare, anume  $\mu$  clase de impedanțe elementare diferite, clasa  $j$  conținând  $\lambda_j$  impedanțe identice, deci:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n \quad (2.1)$$

Cele  $m$  faze distincte ale receptorului legat în stea conțin câte  $l_i$  impedanțe elementare, cu:

$$\sum_{i=1}^m l_i = n \quad (2.2)$$

Schema unui astfel de receptor dezechilibrat discret este dată în figura 2.2.

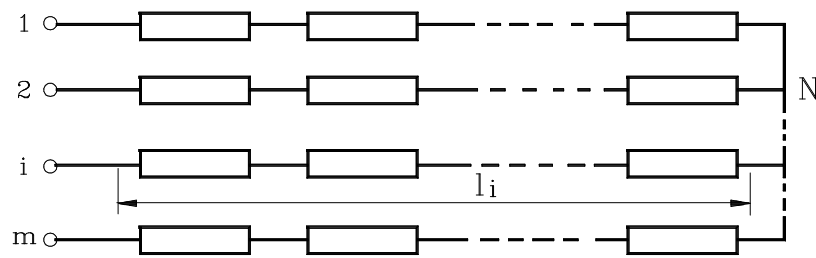


Fig. 2.2 Schema unui receptor dezechilibrat discret (RDD)

Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul  $n$  ( $l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$ ). În cele ce urmează vom subînțelege că receptorii dezechilibrați discreți (**RDD**) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

La transferul unor impedanțe elementare de pe o fază pe alta se obțin receptoare dezechilibrate diferite, care introduc diverse tipuri de dezechilibre în rețeaua din care fac parte.

În particular, unele din aceste receptoare pot fi echilibrate, dar acestea pot fi considerate cazuri limită de receptoare dezechilibrate, în conformitate cu punctul de vedere evidențiat în capitolul 1.

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibrați discreți.

Numărul receptorilor dezechilibrați discreți care pot exista este finit și îl notăm :

$$N = N(\text{RDD}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} \quad (2.3)$$

Pentru calcul numărului  $N = N(\text{RDD})$  se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [P13], [P17].

## 2.2. Modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret

Modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret este bijecția între două mulțimi multiple. [P15], [P23], [P30].

Considerăm două mulțimi finite  $X$  și  $Y$  având același număr de elemente:  $|X| = |Y| = n$ , precum și mulțimea bijecțiilor  $f: X \rightarrow Y$ , mulțime pe care o notăm  $Y^X$ .

Să considerăm o relație de echivalență ( $\rho_1$ ) definită pe mulțimea  $X$ , care determină o partiție a mulțimii  $X$  în  $\mu$  clase de echivalență  $X_j$  conținând câte  $\lambda_j$  elemente, adică  $|X_j| = \lambda_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, \mu$ ). Elementele unei clase de echivalență vor fi denumite echivalente sau identice. La fel,

considerăm o relație de echivalență ( $\rho_2$ ) definită pe mulțimea Y, care determină o partiție a mulțimii Y în m clase de echivalență,  $Y_i$  conținând câte  $l_i$  elemente, adică  $|Y_i| = l_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

În acest fel, mulțimile X și Y devin mulțimi multiple, adică mulțimi în care elementele se pot repeta. Utilizând aceasta terminologie, putem spune că mulțimea X conține  $\mu$  elemente distincte, elementul j rezezându-se de  $\lambda_j$  ori ( $j = 1, 2, \dots, \mu$ ). Asemănător, pentru mulțimea Y ( fig. 2.3 ).

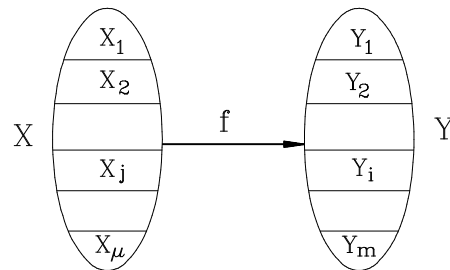


Fig. 2.3 Bijecția între două mulțimi multiple

Vom considera acum un grup G de permutări al mulțimii X și anume produsul simplu (sau direct) al grupurilor simetrice de permutări ale elementelor claselor de echivalență din X [T5], [N2], [P15]. Acest grup se notează astfel:  $G = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_\mu}$  și se definește în felul următor: pentru orice  $\alpha \in G, \alpha_j \in S_{\lambda_j}, x \in X_j$ , avem :

$$\alpha(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_\mu)(x) = \alpha_j(x) \tag{2.4}$$

$$(j = 1, 2, \dots, \mu).$$

Definiția este consistentă. Într-adevăr, deoarece G este o submulțime finită a lui  $S_n$ , pentru ca G să fie un grup de permutări al mulțimii X (subgrup al grupului simetric  $S_n$ ) este suficient să verificăm că pentru orice  $\alpha, \alpha' \in G \Rightarrow \alpha\alpha' \in G$  (am notat cu  $\alpha\alpha'$  compunerea permutărilor  $\alpha$  și  $\alpha'$ ).

Fie  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_\mu)$  și  $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_j, \dots, \alpha'_\mu)$ . Pentru orice  $x \in X_j$ , avem conform definiției :  $\alpha\alpha'(x) = \alpha(\alpha'(x)) = \alpha(\alpha'_j(x)) = \alpha_j(\alpha'_j(x)) = \alpha_j\alpha'_j(x)$ . Se obține deci :

$$\alpha\alpha' = (\alpha_1\alpha'_1, \alpha_2\alpha'_2, \dots, \alpha_j\alpha'_j, \dots, \alpha_\mu\alpha'_\mu)$$
 și se observă că  $\alpha\alpha' \in G$ .

Prin urmare, G este un grup de permutări al mulțimii X. Am utilizat teorema de caracterizare a subgrupurilor finite [T5], [P33], [N2].

Deci, prin permutările acestui grup, orice element x al mulțimii X este transformat într-un element care aparține aceleiași clase de echivalență ca și x.

Analog, considerăm și grupul H de permutări al mulțimii Y:



$$H = S_{l_1} \times S_{l_2} \times K \times S_{l_m}$$

Pentru orice  $\beta \in H, \beta_i \in S_{l_i}, y \in Y_i$ , avem:

$$\beta(y) = (\beta_1, \beta_2, K, \beta_i, K, \beta_m)(y) = \beta_i(y) \quad (2.5)$$

$$(i = 1, 2, K, m)$$

Deci, prin permutările acestui grup, orice element  $y$  al mulțimii  $Y$  este transformat într-un element care aparține aceleiași clase de echivalență ca și  $y$ .

Se poate defini o relație de echivalență ( $\rho$ ) pe mulțimea  $Y^x$ , în modul următor:  $f_1 \sim f_2$  dacă există  $\alpha \in G$  și  $\beta \in H$  astfel încât  $f_2 = \beta f_1 \alpha$ .

Să demonstrăm că relația astfel definită este o relație de echivalență pe mulțimea bijecțiilor  $f: X \rightarrow Y$ , în raport cu grupurile  $G$  și  $H$  de permutări.

Relația este reflexivă:  $f \sim f$ , deoarece  $f = \varepsilon_2 f \varepsilon_1$ , unde  $\varepsilon_1 \in G$  și  $\varepsilon_2 \in H$  sunt permutările identice din cele două grupuri de permutări.

Relația este simetrică:  $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1$ . Într-adevăr,  $f_2 = \beta f_1 \alpha$  conduce la  $f_1 = \beta^{-1} f_2 \alpha^{-1}$ , unde  $\alpha^{-1} \in G$  și  $\beta^{-1} \in H$ , ceea ce probează afirmația.

Relația este tranzitivă:  $f_1 \sim f_2$  și  $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3$ . Într-adevăr, din  $f_2 = \beta f_1 \alpha$  și  $f_3 = \beta' f_2 \alpha'$  rezultă  $f_3 = \beta' \beta f_1 \alpha \alpha' = \beta'' f_1 \alpha''$ , unde  $\beta' \beta = \beta'' \in H$  și  $\alpha \alpha' = \alpha'' \in G$ .

Relația ( $\rho$ ) de echivalență determină o partiție a mulțimii  $Y^x$  în clase de echivalență. Numărul acestor clase de echivalență se notează astfel :

$$\left| Y^x / \rho \right| = G_{n \binom{\lambda_1, \lambda_2, K, \lambda_\mu}{l_1, l_2, K, l_m}} \quad (2.6)$$

Observăm că problema expusă mai sus este echivalentă cu problema definirii receptorului dezechilibrat discret (RDD). Considerăm  $n$  impedanțe elementare ( $\mu$  clase de impedanțe, clasa  $j$  conținând  $\lambda_j$  impedanțe identice, deci  $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n$ ) și  $m$  faze, faza  $i$  primind  $l_i$  impedanțe elementare

înseriate, cu  $\sum_{i=1}^m l_i = n$ . Se distribuie cele  $n$  impedanțe în cele  $m$  faze. Numărul de distribuiri posibile

este :

$$N = N(\text{RDD}) = G_{n \binom{\lambda_1, \lambda_2, K, \lambda_\mu}{l_1, l_2, K, l_m}} \quad (2.7)$$

Prin urmare, modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret este bijecția între două mulțimi multiple iar numărarea receptorilor dezechilibrați discreți (RDD) se reduce la numărarea bijecțiilor între două mulțimi multiple [P15], [P30].

De asemenea, observăm că relația de dezechilibru definită pe mulțimea receptorilor discreți este o relație de echivalență iar clasele de dezechilibru sunt clasele de echivalență corespunzătoare.

În simbolul general  $G_n^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}$ , în cele două paranteze apar partiții ale numărului natural n, cu alte cuvinte mulțimi multiple de numere naturale ale căror sume sunt n. Numărul partițiilor numărului natural n se notează P(n) [T5], [T6], [T7].

Ordinea indicilor din cele două paranteze nu are importanță. Vom prefera așezarea acestor indici în ordine descrescătoare, în ambele paranteze. Dacă în urma aplicării unor formule de calcul ajungem la indici nuli, aceștia trebuie eliminați.

Vom numi numărul n ordinul simbolului general definit mai sus.

Acest simbol general are o proprietate foarte importantă și anume proprietatea de simetrie (sau de dualitate) [P13].

Aceasta afirmă că avem întotdeauna următoarea egalitate:

$$G_n^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)} = G_n^{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}_{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} \tag{2.8}$$

Pentru a justifica această proprietate, considerăm la început un caz particular

$$G_{7(5,1,1)}^{7(4,3)} = G_{7(4,3)}^{7(5,1,1)} = 4 \tag{2.9}$$

Scriem una din distribuiriile posibile de impedanțe elementare în faze, corespunzător membrului stâng al egalității:

$z_1$	$z_1$	$z_1$	$z_2$	$z_2$	$z_1$	$z_2$ (impedanțe)
1	1	1	1	1	2	3 (faze)

(2.10)

Putem interverti rolul literelor cu indici cu al cifrelor și presupune că 1, 2, 3 indică tipurile de impedanțe iar  $z_1, z_2$  fazele. Rearanjăm perechile:

1	1	1	2	1	1	3
$z_1$	$z_1$	$z_1$	$z_1$	$z_2$	$z_2$	$z_2$

(2.11)

Exact aceleași perechi apar în (2.10) și (2.11) numai că au fost inversate rândurile. Dar (2.11) poate fi interpretat ca reprezentând o distribuire a 5 impedanțe elementare de tipul 1, a unei impedanțe elementare de tipul 2 și a unei impedanțe elementare de tipul 3 în fazele  $z_1$  și  $z_2$  care cuprind 4 și respectiv 3 impedanțe elementare. Dar aceasta este una dintre distribuiriile de impedanțe

elementare în faze corespunzătoare membrului drept al egalității (2.9). Rezultă o corespondență biunivocă între cele două mulțimi de distribuiri de impedanțe în faze (deci de **RDD**) care vor avea același număr de elemente și egalitatea (2.8) este justificată, deoarece procedeul expus rămâne evident valabil pe cazul general.

### 2.3. Generalizare

Să presupunem că avem  $k$  impedanțe elementare, anume  $\mu$  clase de impedanțe elementare diferite, clasa  $j$  conținând  $\lambda_j$  impedanțe identice, deci :

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j = k \quad (2.12)$$

Cele  $m$  faze distincte ale receptorului legat în stea pot conține maximum câte  $l_i$  impedanțe elementare, cu:

$$\sum_{i=1}^m l_i = n \quad (2.13)$$

Numărul receptorilor dezechilibrați discreți care pot exista în aceste condiții se notează:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) \quad (2.14)$$

unde avem :  $k \leq n$  [P13]. Pentru  $k = n$  suntem în cazul definit la început, la paragraful 2.1.

Modelul matematic pentru această situație este cel al injecției între două mulțimi multiple.

În conformitate cu definiția, dacă  $l_1 > k$  putem scrie:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) = G_{n-l_1+k}^k(k, l_2, \dots, l_m) \quad (2.15)$$

ceea ce constituie o formulă de reducere a ordinului ( de la  $n$  la  $n - l_1 + k$  ).

Simbolul (2.14) are o proprietate foarte importantă:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu, n-k) \quad (2.16)$$

pe care o vom numi relația de complementaritate. Pe baza acestei relații, putem reduce cazul mai general prezentat în acest paragraf la cazul definit inițial, în paragraful 2.1.

Pentru justificarea relației (2.16), observăm că membrul stâng al relației reprezintă numărul de distribuiri a  $k$  impedanțe elementare ( $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$ ) în  $m$  faze, fiecare putând primi maximum  $l_1, l_2, \dots, l_m$  impedanțe. Introducând o nouă categorie de impedanțe fictive ( în număr de  $n - k$  ), numărul de impedanțe elementare devine egal cu  $n$ , adică la fiecare distribuire se completează toate

locurile din faze ( semnificația simbolului din membrul drept ). Considerând noua categorie de impedanțe ca impedanțe nule în prima distribuie, rezultă că există o corespondență biunivocă între mulțimile celor două distribuiri, deci numărul lor este egal și cu acesta proprietatea este justificată.

De asemenea, pe baza definiției se poate scrie următoarea relație:

$$G_n^k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) = \sum_R G_k^k(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (2.17)$$

unde  $R$  este mulțimea soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = k \quad (2.18)$$

în numere naturale, cu  $0 \leq x_i \leq l_i, i = (1, 2, \dots, m)$ .

Deoarece atât în relația (2.16) cât și în relația (2.17) intervin simboluri de tipul celui definit inițial în paragraful 2.1, rezultă că acest simbol este fundamental (cazul standard).

## 2.4. Calculul numărului $N(\mathbf{RDD})$

Autorul acestei teze a elaborat patru metode pentru calculul numărului  $N(\mathbf{RDD})$ . Acestea sunt :

1. Metoda enumerării
2. Metoda polinoamelor de tip Newton
3. Metoda de recurență
4. Metoda reducerii ordinului

Vom prezenta în continuare aceste metode.

## 2.5. Metoda enumerării

Această metodă, expusă în lucrările [P17], [P19], [P23], [P31] se bazează pe observația că numărul  $N$  este egal cu numărul soluțiilor sistemului:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ji} = \lambda_j; j = 1, 2, \dots, \mu \\ \sum_{j=1}^m x_{ji} = l_i; i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (2.19)$$

unde  $\lambda_j, l_i > 0; x_{ji} \geq 0$  sunt numere naturale.

Acest sistem are  $\mu m$  necunoscute și  $\mu + m - 1$  ecuații independente. (datorită condiției

$\sum_{j=1}^k \lambda_j = \sum_{i=1}^m l_i = n$ ). Prin urmare, gradul de nedeterminare al sistemului este :

$$\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1) \quad (2.20)$$

Se observă că numărul  $N$  reprezintă de asemenea numărul matricilor cu  $\mu$  linii și  $m$  coloane, conținând numere naturale, la care sumele liniilor, respectiv ale coloanelor sunt impuse:

$n$	$l_1$	$l_2$	$\dots$	$l_m$	(2.21)
$\lambda_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	$\dots$	$x_{1m}$	
$\lambda_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	$\dots$	$x_{2m}$	
$\cdot$	$\cdot$				
$\cdot$	$\cdot$				
$\lambda_\mu$	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	$\dots$	$x_{\mu m}$	

Metoda enumerării aplicată “manual” constă în construirea efectivă a matricilor de tipul (2.21) și numărarea lor. Este evident că pentru  $n$  mare aceasta variantă este total nepractică.

Pe baza metodei enumerării s-a realizat un program de calculator (numit programul **RDD**) care generează sistematic matrici de tipul (2.21) și în final dă numărul acestor matrici. Programul pe calculator va fi prezentat în paragraful 2.9.

În continuare vom considera un caz particular și anume vom determina numărul receptorilor dezechilibrați discreți de tipul 7 (3, 2, 2; 4, 3).

Construind sistematic toate matricile posibile de tipul (2.21) obținem:

7	3	2	2	7	3	2	2	7	3	2	2
4	0	2	2	4	1	2	1	4	2	2	0
3	3	0	0	3	2	0	1	3	1	0	2
7	3	2	2	7	3	2	2	7	3	2	2
4	1	1	2	4	2	1	1	4	3	1	0
3	2	1	0	3	1	1	1	3	0	1	2

7	3	2	2
4	2	0	2
3	1	2	0

7	3	2	2
4	3	0	1
3	0	2	1

Prin urmare, avem:  $G_{7(3,2,2)}^{7(4,3)} = 8$ .

Receptorii dezechilibrați discreți corespunzători sunt reprezentați în continuare (fig. 2.4)

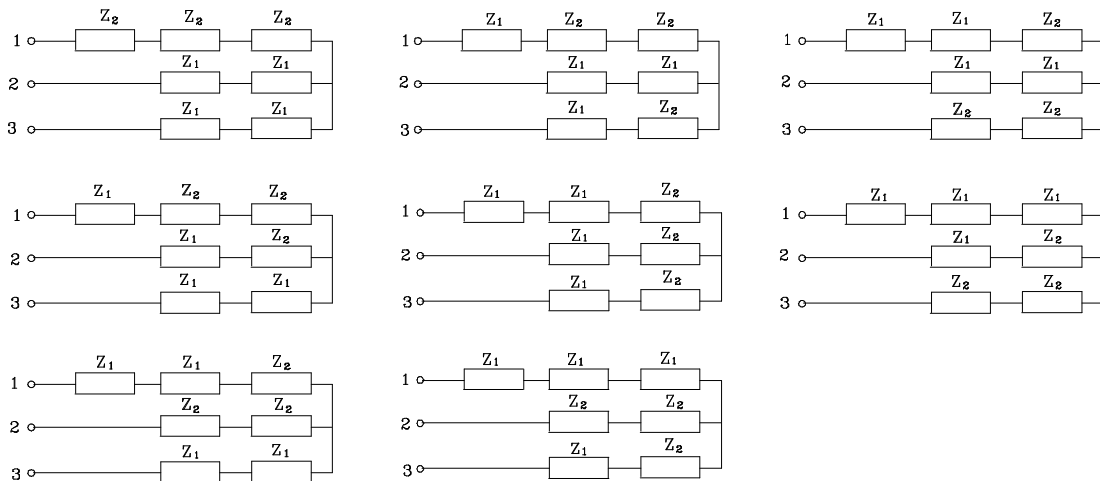


Fig. 2.4 Schemele receptorilor dezechilibrați discreți de tipul 7 (3, 2, 2; 4, 3)

## 2.6. Metoda polinoamelor de tip Newton

Această metodă a fost expusă inițial în lucrările [P15], [P17], [P19], [P23]. Înainte de a prezenta metoda pe cazul general, vom considera un caz particular și anume calculul numărului  $G_{3(1,1,1)}^{3(2,1)}$ . Prin urmare, trebuie să calculăm în câte moduri se pot distribui 3 impedanțe elementare (două de o clasă și una de altă clasă) în trei faze, fiecare fază primind o impedanță elementară.

Să presupunem că fiecare fază ar putea primi toate cele trei impedanțe elementare. Atunci, primele două impedanțe elementare se pot plasa amândouă în prima fază, în a doua, în a treia, o impedanță elementară în prima fază și a doua în a doua, în prima și în a treia sau în a doua și a treia. Acestor posibilități de distribuire a primelor două impedanțe elementare le putem atașa polinomul omogen și simetric de trei variabile :

$$P_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3$$

Gradul polinomului este dat de numărul de impedanțe elementare de aceeași clasă (2) iar numărul de variabile, de numărul de faze (3). Fiecare monom corespunde unei distribuiri.

La fel, a treia impedanță elementară se poate plasa în faza întâi, a doua sau a treia. Scriem polinomul atașat :

$$P_1 = y_1 + y_2 + y_3$$

Fiecărei distribuiri a impedanțelor elementare din prima clasă  $i$  se poate atașa o distribuire a impedanței elementare din cealaltă clasă, totalitatea distribuiriilor care rezultă reprezentându-se prin produsul celor două polinoame:

$$P_2 \cdot P_1 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 2y_1^2y_2 + 2y_1^2y_3 + 2y_2^2y_3 + 2y_1y_2^2 + 2y_1y_3^2 + 2y_2y_3^2 + 3y_1y_2y_3$$

Coeficientul unui monom arată de câte ori apare el în polinomul final, deci câte distribuiri de tipul respectiv sunt posibile. In cazul nostru, fiecare fază primește o impedanță elementară, deci distribuiriile sunt de tipul  $y_1y_2y_3$ . Numărul de distribuiri posibile este deci 3 .Exponentul unei variabile arată câte impedanțe elementare sunt în faza reprezentată de variabila respectivă.

O simplificare remarcabilă a calculelor se poate face considerând reprezentarea polinoamelor simetrice și omogene prin sumele variabilelor de aceeași putere (relații tip Newton [K8]).

Astfel, notând:

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3; \quad x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

avem :

$$P_1 = x_1; \quad P_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$$

$$P = P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{2}(x_1^3 + x_1x_2)$$

$$P = \frac{1}{2} \left[ (y_1 + y_2 + y_3)^3 + (y_1 + y_2 + y_3)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \right]$$

Cu formula multinomului [T5] extragem coeficientul monomului  $y_1y_2y_3$ :

$$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{3!}{1!1!1!} = 3$$

Metoda expusă se poate aplica evident pe cazul general. Deci, pentru calculul numărului

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1, l_2, K, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, K, \lambda_\mu)}$$

se procedează astfel:

a ) Se calculează polinomul:

$$P = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot K \cdot P_{\lambda_\mu} \quad (2.22)$$

unde  $P_{\lambda_j} = P_{\lambda_j}(x_1, x_2, K, x_{\lambda_j})$  este polinomul de tip Newton, de grad  $\lambda_j$  în  $\lambda_j$  variabile.

Deci,  $P = P(x_1, x_2, K, x_{\lambda})$  va avea gradul  $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n$  și  $\lambda$  variabile, unde

$$\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, K, \lambda_{\mu}).$$

b) Se înlocuiește în P:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 + K + y_m \\ x_2 &= y_1^2 + y_2^2 + K + y_m^2 \\ &\dots \\ x_{\lambda} &= y_1^{\lambda} + y_2^{\lambda} + K + y_m^{\lambda} \end{aligned} \tag{2.23}$$

c) Se calculează cu formula multinomului coeficientul monomului  $y_1^{l_1} y_2^{l_2} K y_m^{l_m}$  din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Polinomul simetric de m variabile  $y_1, y_2, K, y_m$  și omogen de gradul n este dat de relația:

$$P_n = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq m} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n} \tag{2.24}$$

De asemenea, el se poate exprima prin relația:

$$P_n = \sum_R y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} K y_m^{\alpha_m} \tag{2.25}$$

unde R este mulțimea soluțiilor în numere naturale ale ecuației:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + K + \alpha_m = n \tag{2.26}$$

Această ecuație are  $|R| = c_m^n$  soluții (combinări cu repetiție).

Polinomul  $P_n$  se poate exprima în funcție de  $x_1, x_2, K, x_n$ , unde :

$$x_j = \sum_{1 \leq i \leq m} y_i^j \quad (j = 1, 2, K, n) \tag{2.27}$$

având următoarea formă [1] :

$$P_n = \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + K + nk_n = n \\ k_1, k_2, K, k_n \geq 0}} \frac{1}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! K n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} K x_n^{k_n} \tag{2.28}$$

Numărul de termeni din sumă este P(n), adică numărul de moduri diferite de a scrie pe n ca o sumă de numere naturale, în care ordinea termenilor nu are importanță (sau numărul partițiilor numărului natural n).

Putem demonstra relația (2.28) construind funcția generatoare:

$$G(z) = 1 + P_1 z + P_2 z^2 + K = \sum_{n \geq 0} P_n z^n \tag{2.29}$$



Folosind regulile de înmulțire a seriilor, obținem:

$$G(z) = (1 + y_1 z + y_1^2 z^2 + K) \mathbf{K} (1 + y_m z + y_m^2 z^2 + K) = \frac{1}{(1 - y_1 z) \mathbf{K} (1 - y_m z)} \quad (2.30)$$

Deci:

$$\ln G(z) = \ln \frac{1}{1 - y_1 z} + K + \ln \frac{1}{1 - y_m z} = \sum_{k \geq 1} \frac{y_1^k z^k}{k} + K + \sum_{k \geq 1} \frac{y_m^k z^k}{k} = \sum_{k \geq 1} \frac{x_k z^k}{k} \quad (2.31)$$

Calculăm din nou dezvoltarea în serie de puteri a lui  $G(z)$  :

$$\begin{aligned} G(z) &= e^{\ln G(z)} = \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{x_k z^k}{k}\right) = \prod_{k \geq 1} \exp \frac{x_k z^k}{k} = \left(1 + x_1 z + \frac{x_1^2 z^2}{2!} + K\right) \left(1 + \frac{x_2 z^2}{2} + \frac{x_2^2 z^4}{2^2 \cdot 2!} + K\right) \mathbf{K} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + K + nk_n = n \\ k_1, k_2, K, k_n \geq 0}} \frac{x_1^{k_1}}{1^{k_1} k_1!} \cdot \frac{x_2^{k_2}}{2^{k_2} k_2!} \wedge \frac{x_n^{k_n}}{2^{k_n} k_n!} \right) z^n \end{aligned} \quad (2.32)$$

Din relațiile (2.29) și (2.32) rezultă (2.28).

Aplicând formula generală (2.28) se obțin ușor primele opt polinoame de tip Newton:

$$P_1 = x_1 \quad (2.33)$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2) \quad (2.34)$$

$$P_3 = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1 x_2 + 2x_3) \quad (2.35)$$

$$P_4 = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_1^2 x_2 + 8x_1 x_3 + 3x_2^2 + 6x_4) \quad (2.36)$$

$$P_5 = \frac{1}{120}(x_1^5 + 10x_1^3 x_2 + 15x_1 x_2^2 + 20x_1^2 x_3 + 20x_2 x_3 + 30x_1 x_4 + 24x_5) \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} P_6 &= \frac{1}{720}(x_1^6 + 45x_1^4 x_2 + 15x_1^2 x_2^2 + 15x_1^4 x_2 + 15x_2^3 + 40x_1^3 x_3 + 120x_1 x_2 x_3 + 40x_3^2 + 90x_1^2 x_4 + \\ &+ 90x_2 x_4 + 144x_1 x_5 + 120x_6) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} P_7 &= \frac{1}{5040}(x_1^7 + 21x_1^5 x_2 + 105x_1^3 x_2^2 + 105x_1 x_2^3 + 70x_1^4 x_3 + 210x_2^2 x_3 + 420x_1^2 x_2 x_3 + 280x_1 x_3^2 + \\ &+ 210x_1^3 x_4 + 630x_1 x_2 x_4 + 420x_3 x_4 + 504x_1^2 x_5 + 504x_2 x_5 + 840x_1 x_6 + 720x_7) \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} P_8 &= \frac{1}{40320}(x_1^8 + 28x_1^6 x_2 + 210x_1^4 x_2^2 + 420x_1^2 x_2^3 + 105x_2^4 + 112x_1^5 x_3 + 1120x_1^3 x_2 x_3 + 1680x_1 x_2^2 x_3 + \\ &+ 1120x_1^2 x_3^2 + 1120x_2 x_3^2 + 2520x_1^2 x_2 x_4 + 420x_1^4 x_4 + 1260x_2^2 x_4 + 3360x_1 x_3 x_4 + 1260x_4^2 + \\ &+ 4032x_1 x_2 x_5 + 1344x_1^3 x_5 + 2688x_3 x_5 + 3360x_1^2 x_6 + 3360x_2 x_6 + 5760x_1 x_7 + 5040x_8) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Polinoamele de tip Newton se pot calcula și cu ajutorul unei formule de recurență [R9].

Notând:

$$P_i = \frac{1}{i!} C_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.41)$$

există următoarea formulă de recurență:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n A_n^k x_{k+1} C_{n-k} \quad (2.42)$$

unde prin convenție vom considera  $P_0 = C_0 = 1$ .

Facem observația că aplicând metoda de numărare Pólya - de Bruijn [T5], [T6] în cazul problemei noastre, se obține în fond metoda de calcul expusă mai sus. Polinoamele  $P_{\lambda_j}$  apar ca polinoamele indicatoare de cicluri pentru grupurile simetrice de permutări.

Vom calcula prin metoda polinoamele de tip Newton numărul  $N = G_{6(3,2,1)}^{6(4,1,1)}$ .

Avem:

$$P = P_4 \cdot P_1^2$$

$$P = \frac{1}{24} (x_1^6 + 6x_1^4 x_2 + 8x_1^3 x_3 + 3x_1^2 x_2^2 + 6x_1^2 x_4)$$

Înlocuim:

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3;$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2;$$

$$x_3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3;$$

$$x_4 = y_1^4 + y_2^4 + y_3^4;$$

$$P = \frac{1}{24} [(y_1 + y_2 + y_3)^6 + 6(y_1 + y_2 + y_3)^4 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + 8(y_1 + y_2 + y_3)^3 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + 3(y_1 + y_2 + y_3)^2 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^2 + 6(y_1 + y_2 + y_3)^2 (y_1^4 + y_2^4 + y_3^4)]$$

Calculăm coeficientul monomului  $y_1^3 y_2^3 y_3$  :

$$N = \frac{1}{24} \left[ \frac{6!}{3!2!1!} + 6 \left( \frac{4!}{1!2!1!} + \frac{4!}{3!0!1!} \right) + 8 \cdot \frac{3!}{0!2!1!} + 3 \cdot \frac{2!}{1!0!1!} \cdot 2 \right] = 8$$

## 2.7. Metoda de recurență

Numărul claselor de dezechilibru pentru receptorii dezechilibrați discreți se poate determina și cu ajutorul unor formule de recurență. Acestea permit calculul numărului **N(RDD)** de ordin  $n$  cu ajutorul unor numere **N(RDD)** de ordine mai mici [P32].

Formulele de recurență se deduc ușor, pornind de la definiția numărului  $\mathbf{N(RDD)}$ . Prin ordonarea descrescătoare a indicilor superiori și inferiori și utilizarea proprietății de simetrie facem ca:

$$\lambda_{\mu} = \min (l_1, l_2, \mathbf{K}, l_m, \lambda_1, \lambda_2, \mathbf{K}, \lambda_{\mu}) \quad (2.43)$$

a) dacă  $\lambda_{\mu} = 1$ , avem:

$$G_{n(l_1, l_2, \mathbf{K}, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{K}, \lambda_{\mu})} = \sum_{\mathbf{R}} G_{n-1(l_1, l_2, \mathbf{K}, l_i-1, \mathbf{K}, l_m)}^{n-1(\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{K}, \lambda_{\mu-1})} \quad (2.44)$$

unde  $\mathbf{R}$  este mulțimea soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + \mathbf{K} + x_m = 1 \quad (2.45)$$

în numere naturale, cu  $0 \leq x_i \leq 1, (i = 1, 2, \mathbf{K}, m)$ .

Numărul soluțiilor acestei ecuații este:

$$|\mathbf{R}| = c_m^1 = m \quad (\text{combinări cu repetiție}) \quad (2.46)$$

b) Dacă  $\lambda_{\mu} = 2$ , avem:

$$G_{n(l_1, l_2, \mathbf{K}, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{K}, \lambda_{\mu})} = \sum_{\mathbf{R}} G_{n-2(l_1, l_2, \mathbf{K}, l_i-2, \mathbf{K}, l_m)}^{n-2(\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{K}, \lambda_{\mu-1})} \quad (2.47)$$

unde  $\mathbf{R}$  este mulțimea soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + \mathbf{K} + x_m = 2 \quad (2.48)$$

în numere naturale, cu  $0 \leq x_i \leq 2, (i = 1, 2, \mathbf{K}, m)$ .

Numărul soluțiilor acestei ecuații este:

$$|\mathbf{R}| = c_m^2 = \frac{m(m+1)}{2} \quad (2.49)$$

c) Dacă  $\lambda_{\mu} = 3$ , avem:

$$G_{n(l_1, l_2, \mathbf{K}, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{K}, \lambda_{\mu})} = \sum_{\mathbf{R}} G_{n-3(l_1, l_2, \mathbf{K}, l_i-3, \mathbf{K}, l_m)}^{n-3(\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{K}, \lambda_{\mu-1})} \quad (2.50)$$

unde  $\mathbf{R}$  este mulțimea soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + \mathbf{K} + x_m = 3 \quad (2.51)$$

în numere naturale, cu  $0 \leq x_i \leq 3, (i = 1, 2, \mathbf{K}, m)$ .

Numărul soluțiilor acestei ecuații este:

$$|\mathbf{R}| = c_m^3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6} \quad (2.52)$$

Lista acestor formule de recurență poate fi continuată, dar aplicarea lor devine tot mai grea, datorită creșterii lui  $|R|$ .

Foarte simplă și avantajoasă este aplicarea primelor două formule de recurență, deci pentru  $\lambda_\mu = 1$  și  $\lambda_\mu = 2$ .

Vom ilustra metoda prin două exemple.

### Exemplul 1

Să se calculeze numărul  $N = G_{10(3,3,2,2)}^{10(4,3,2,1)}$

Aplicând formula ( 2.44 ) obținem:

$$N = G_{9(2,3,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,1,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} = 2 \cdot G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + 2 \cdot G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} = 2 \cdot 109 + 2 \cdot 87 = 392$$

### Exemplul 2

Să se calculeze numărul  $N = G_{10(4,2,2,2)}^{10(3,3,2,2)}$

Aplicând formula ( 2.47 ) obținem:

$$N = G_{8(2,2,2,2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,0,2,2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,2,0,2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,2,2,0)}^{8(3,3,2)} + G_{8(3,1,2,2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(3,2,1,2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(3,2,2,1)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,1,1,2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,1,2,1)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,2,1,1)}^{8(3,3,2)}$$

$$N = G_{8(2,2,2,2)}^{8(3,3,2)} + 3 \cdot G_{8(4,2,2)}^{8(3,3,2)} + 3 \cdot G_{8(3,2,2,1)}^{8(3,3,2)} + 3 \cdot G_{8(4,2,1,1)}^{8(3,3,2)} = 88 + 3 \cdot 29 + 3 \cdot 69 + 3 \cdot 45 = 517$$

Este evident că aplicarea metodei de recurență pentru **N(RDD)** presupune cunoașterea valorii unor astfel de numere de ordine inferioare ( n-1, n-2, ... ).

## 2.8. Metoda reducerii ordinului

Să considerăm simbolul general:

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1, l_2, K, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, K, \lambda_\mu)}$$

Dacă  $l_1 + \lambda_1 > n$ , putem scrie:

$$G_{n(l_1, l_2, K, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, K, \lambda_\mu)} = G_{n(l_1, l_2, K, l_m)}^{n-\lambda_1(\lambda_2, K, \lambda_\mu)} = G_{2n-l_1-\lambda_1(n-\lambda_1, l_2, K, l_m)}^{n-\lambda_1(\lambda_2, K, \lambda_\mu)} = G_{2n-l_1-\lambda_1(n-\lambda_1, l_2, K, l_m)}^{2n-l_1-\lambda_1(n-1, \lambda_2, K, \lambda_\mu)}$$

( am aplicat formulele 2.15 și 2.16 ).

Observăm că dacă  $l_1 + \lambda_1 > n$  se obține reducerea ordinului cu relația:

$$G_n^{(l_1, l_2, K, l_m)} = G_{2n-l_1-l_2}^{(n-l_1, l_2, K, l_m)} \quad (2.53)$$

Să analizăm acum cazurile când  $l_1 + \lambda_1 \leq n$ . Să presupunem că  $l_1 \geq \lambda_1$

Considerăm matricile (2.21) în care sumele laturilor și coloanelor sunt impuse. Numărul acestor matrici este chiar **N(RDD)**.

n	l <sub>1</sub>	l <sub>2</sub>	....	l <sub>m</sub>	(2.54)
λ <sub>1</sub>	x <sub>11</sub>	x <sub>12</sub>	....	x <sub>1m</sub>	
λ <sub>2</sub>	x <sub>21</sub>	x <sub>22</sub>	....	x <sub>2m</sub>	
⋮			....		
λ <sub>μ</sub>	x <sub>μ1</sub>	x <sub>μ2</sub>	....	x <sub>μm</sub>	

Separăm linia întâi și coloana întâi. Elementele de pe aceasta linie și această coloană rezultă la fiecare completare a matricii rămase de dimensiuni  $(\mu - 1)(m - 1)$  cu numere naturale.

Să notăm cu S suma elementelor acestei matrici ("valoarea" matricii):

$$S = \sum_{j=2}^{\mu} \sum_{i=2}^m x_{ji} \quad (2.55)$$

Putem scrie:

$$x_{11} + S + l_1 - x_{11} + \lambda_1 - x_{11} = n$$

deci:

$$x_{11} = S + l_1 + \lambda_1 - n \quad (2.56)$$

Impunem condițiile:

$$0 \leq x_{11} \leq \min(l_1, \lambda_1) = \lambda_1 \quad (2.57)$$

Rezultă:

$$n - l_1 - \lambda_1 \leq S \leq n - l_1 \quad (2.58)$$

a) Dacă  $l_1 + \lambda_1 = n$ , avem  $x_{11} = S$

$$0 \leq S \leq n - l_1 = \lambda_1 \quad (2.59)$$

Notând cu  $G_n$  simbolul general de ordinul n ((2.3), notație prescurtată) și cu  $N_v$  numărul de moduri în care matricea redusă  $(\mu - 1)(m - 1)$  ia valoarea v, putem scrie:

$$G_n = N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_{n-l_1} \quad (2.60)$$

b) Dacă  $l_1 + \lambda_1 = n - 1$ , avem  $x_{11} = S - 1$

$$1 \leq S \leq n - l_1 = \lambda_1 + 1 \quad (2.61)$$

$$G_n = N_1 + N_2 + N_3 + K + N_{n-l_1} \quad (2.62)$$

c) Dacă  $l_1 + \lambda_1 = n - 2$ , avem  $x_{11} = S - 2$

$$2 \leq S \leq n - l_1 = \lambda_1 + 2 \quad (2.63)$$

$$G_n = N_2 + N_3 + K + N_{n-l_1} \quad (2.64)$$

d) Dacă  $l_1 + \lambda_1 = n - 3$ , avem  $x_{11} = S - 3$

$$3 \leq S \leq n - l_1 = \lambda_1 + 3 \quad (2.65)$$

$$G_n = N_3 + K + N_{n-l_1} \quad (2.66)$$

Fie simbolurile:

$$G_n^{n(\lambda_1, \lambda_2, K, \lambda_\mu)} = G_n^{n(l_1, l_2, K, l_m)} \quad (2.67)$$

$$G_n^{n-1(\lambda_1-1, \lambda_2, K, \lambda_\mu)} = G_n^{n-1(l_1-1, l_2, K, l_m)} \quad (2.68)$$

$$G_n^{n-2(\lambda_1-2, \lambda_2, K, \lambda_\mu)} = G_n^{n-2(l_1-2, l_2, K, l_m)} \quad (2.69)$$

$$G_n^{n-3(\lambda_1-3, \lambda_2, K, \lambda_\mu)} = G_n^{n-3(l_1-3, l_2, K, l_m)} \quad (2.70)$$

$$G_n^{n-4(\lambda_1-4, \lambda_2, K, \lambda_\mu)} = G_n^{n-4(l_1-4, l_2, K, l_m)} \quad (2.71)$$

A) În ipoteza:  $l_1 + \lambda_1 = n$ , avem:

$$(l_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) = l_1 + \lambda_1 - 2 = n - 2 = (n - 1) - 1$$

$$(l_1 - 2) + (\lambda_1 - 2) = l_1 + \lambda_1 - 4 = n - 4 = (n - 2) - 2$$

$$(l_1 - 3) + (\lambda_1 - 3) = l_1 + \lambda_1 - 6 = n - 6 = (n - 3) - 3$$

$$(l_1 - 4) + (\lambda_1 - 4) = l_1 + \lambda_1 - 8 = n - 8 = (n - 4) - 4$$

Putem scrie:

$$G_n = N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \dots + N_{n-1}$$

$$G_{n-1} = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \dots + N_{n-1-(1-1)}$$

$$G_{n-2} = N_2 + N_3 + N_4 + \dots + N_{n-2-(1-2)}$$

$$G_{n-3} = N_3 + N_4 + \dots + N_{n-3-(1-3)}$$

$$G_{n-4} = N_4 + \dots + N_{n-4-(1-4)}$$

Rezultă:

$$G_n = G_{n-1} + N_0 \quad (2.72)$$

$$G_n = G_{n-2} + N_0 + N_1 \quad (2.73)$$

$$G_n = G_{n-3} + N_0 + N_1 + N_2 \quad (2.74)$$

$$G_n = G_{n-4} + N_0 + N_1 + N_2 + N_4 \quad (2.75)$$

B) În ipoteza :  $l_1 + \lambda_1 = n - 1$  , avem:

$$(l_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) = l_1 + \lambda_1 - 2 = n - 3 = (n - 1) - 2$$

$$(l_1 - 2) + (\lambda_1 - 2) = l_1 + \lambda_1 - 4 = n - 5 = (n - 2) - 3$$

$$(l_1 - 3) + (\lambda_1 - 3) = l_1 + \lambda_1 - 6 = n - 7 = (n - 3) - 4$$

Putem scrie:

$$G_n = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \dots + N_{n-1}$$

$$G_{n-1} = N_2 + N_3 + N_4 + \dots + N_{n-1-(1-1)}$$

$$G_{n-2} = N_3 + N_4 + \dots + N_{n-2-(1-2)}$$

$$G_{n-3} = N_4 + \dots + N_{n-3-(1-3)}$$

Rezultă:

$$G_n = G_{n-1} + N_1 \quad (2.76)$$

$$G_n = G_{n-2} + N_1 + N_2 \quad (2.77)$$

$$G_n = G_{n-3} + N_1 + N_2 + N_3 \quad (2.78)$$

C) În ipoteza :  $l_1 + \lambda_1 = n - 2$  , avem:

$$(l_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) = n - 4 = (n - 1) - 3$$

$$(l_1 - 2) + (\lambda_1 - 2) = n - 6 = (n - 2) - 4$$

Putem scrie:

$$G_n = N_2 + N_3 + N_4 + \mathbf{K} + N_{n-l_1}$$

$$G_{n-1} = N_3 + N_4 + \mathbf{K} + N_{n-1-(l_1-1)}$$

$$G_{n-2} = N_4 + \mathbf{K} + N_{n-2-(l_1-2)}$$

Rezultă:

$$G_n = G_{n-1} + N_2 \quad (2.79)$$

$$G_n = G_{n-2} + N_2 + N_3 \quad (2.80)$$

D) În ipoteza :  $l_1 + \lambda_1 = n - 3$  , avem:

$$(l_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) = n - 5 = (n - 1) - 4$$

Putem scrie:

$$G_n = N_3 + N_4 + \mathbf{K} + N_{n-l_1}$$

$$G_{n-1} = N_4 + \mathbf{K} + N_{n-1-(l_1-1)}$$

Rezultă:

$$G_n = G_{n-1} + N_3 \quad (2.81)$$

Vom calcula acum numerele  $N_v$ , ( $v = 0, 1, 2, 3$ ).

Numărul  $N_v$  arată în câte moduri matricea redusă  $(\mu - 1) \times (\mu - 1)$  ia valoarea  $v$ .

În simbolul general standard:

$$G_n \begin{matrix} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) \\ (l_1, l_2, \dots, l_m) \end{matrix}$$

prin aplicarea proprietății de simetrie facem ca  $l_1 \geq \lambda_1$ . Indicii inferiori și superiori sunt în ordine descrescătoare:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\mu$$

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_m$$

În mulțimea numerelor:  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_\mu$  notăm cu:

$\alpha_1$  : numărul cifrelor 1

$\alpha_2$  : numărul cifrelor 2

.

.

.

$\alpha_{v-1}$  : numărul cifrelor  $v-1$

$\alpha_v$  : numărul cifrelor  $v$  sau mai mari decât  $v$

Deci putem scrie:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \mu - 1$

Obținem expresiile:

$$N_0 = 1 \quad (2.82)$$

$$N_1 = (\mu - 1)(\mu - 1) \quad (2.83)$$

$$N_2 = C_{\alpha_2}^1 \cdot G_{n-l_1}^{2(2)}(l_2, \dots, l_m) + C_{\alpha_2 + \alpha_1}^2 \cdot G_{n-l_1}^{2(1,1)}(l_2, \dots, l_m)$$

$$N_2 = \alpha_2 \cdot G_{n-l_1}^{n-l_1(2, n-l_1-2)}(l_2, \dots, l_m) + \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)}{2} \cdot G_{n-l_1}^{n-l_1(1,1, n-l_1-2)}(l_2, \dots, l_m) \quad (2.84)$$

$$N_3 = C_{\alpha_3}^1 \cdot G_{n-l_1}^{3(3)}(l_2, \dots, l_m) + C_{\alpha_3 + \alpha_2}^1 \cdot C_{\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1}^1 \cdot G_{n-l_1}^{3(2,1)}(l_2, \dots, l_m) + C_{\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1}^3 \cdot G_{n-l_1}^{3(1,1,1)}(l_2, \dots, l_m)$$

$$N_3 = \alpha_3 \cdot G_{n-l_1}^{n-l_1(3, n-l_1-3)}(l_2, \dots, l_m) + (\alpha_3 + \alpha_2)(\mu - 2) \cdot G_{n-l_1}^{n-l_1(2,1, n-l_1-3)}(l_2, \dots, l_m) + \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)(\mu - 3)}{6} \cdot G_{n-l_1}^{n-l_1(1,1,1, n-l_1-3)}(l_2, \dots, l_m) \quad (2.85)$$

Lista relațiilor expuse mai sus poate fi extinsă, dar expresiile lui  $N_v$  pentru  $v \geq 4$  se complică simțitor.



Metoda reducerii ordinului constă în aplicarea uneia dintre relațiile (2.72) . . . (2.81) și a expresiilor pentru  $N_\nu$ , (2.82) . . . (2.85).

Vom ilustra metoda prin câteva exemple.

#### Exemplul 1

Să se calculeze numărul  $N = G_{10(6,2,1,1)}^{10(4,3,2,1)}$

Aplicând formulele (2.72) și (2.82) avem:

$$N = G_{9(5,2,2,1)}^{9(3,3,2,1)} + N_0 = 105 + 1 = 106$$

#### Exemplul 2

Să se calculeze numărul  $N = G_{10(5,2,2,1)}^{10(4,3,2,1)}$

Aplicând formulele (2.76) și (2.83) avem:

$$N = G_{9(4,2,2,1)}^{9(3,3,2,1)} + N_1 = 188 + 9 = 197$$

#### Exemplul 3

Să se calculeze numărul  $N = G_{10(4,2,2,2)}^{10(4,3,2,1)}$

Aplicând formulele (2.78) avem:

$$N = G_{9(3,2,2,2)}^{9(3,3,2,1)} + N_2$$

Pentru a calcula numărul  $N_2$ , aplicăm formula (2.84), unde  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ .

$$N_2 = 2 \cdot G_{6(2,2,2)}^{6(2,4)} + \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot G_{6(2,2,2)}^{6(1,1,4)} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 9 = 39$$

Obținem:

$$N = 295 + 39 = 334$$

#### Exemplul 4

Să se calculeze numărul  $N = G_{10(4,2,2,2)}^{10(3,3,2,2)}$

Aplicând formulele (2.81) avem:

$$N = G_{9(3,2,2,2)}^{9(2,3,2,2)} + N_3$$

Pentru a calcula numărul  $N_3$ , aplicăm formula (2.84), unde  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1$ .

$$N_3 = G_{6(2,2,2)}^{6(3,3)} + 3 \cdot 2 \cdot G_{6(2,2,2)}^{6(2,1,3)} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6} \cdot G_{6(2,2,2)}^{6(1,1,1,3)} = 7 + 6 \cdot 15 + 24 = 121$$

Obținem:

$$N = 396 + 121 = 517$$

Acest număr a fost calculat anterior prin metoda recurenței, rezultatul obținut fiind evident același.

Ca și la metoda de recurență, metoda reducerii ordinului pentru calculul numărului **N(RDD)** presupune cunoașterea valorii unor astfel de numere de ordine inferioare.

## 2.9. Program de calculator RDD

Pentru valori mari ale lui  $n$ , calculul numărului **N(RDD)** prin metodele expuse anterior este dificil. Pe baza metodei enumerării s-a elaborat un program de calculator care generează sistematic matrici de tipul (2.54) și în final dă numărul acestor matrici. Problema se reduce la determinarea matricilor reduse de dimensiuni  $\mu-1$  și  $m-1$ , în care variabilele  $x_{ji}$  iau valori naturale cuprinse între 0 și o valoare maximă iar suma lor este mai mare sau egală decât numărul  $n - l_1 - \lambda_1$  (a se vedea relația 2.58).

Putem scrie:

$$0 \leq x_{ji} \leq \min(\lambda_j - x_{j2} - x_{j3} - \mathbf{K} - x_{j,i-1}; l_i - x_{2i} - x_{3i} - \mathbf{K} - x_{j-1,i}) \quad (2.86)$$

$$S = \sum_{j=2}^{\mu} \sum_{i=2}^m x_{ji} \geq n - l_1 - \lambda_1 \quad (2.87)$$

cu referire a matricea:

$$M = \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & \mathbf{K} & x_{2i} & \mathbf{K} & x_{2m} \\ x_{32} & x_{33} & \mathbf{K} & x_{3i} & \mathbf{K} & x_{3m} \\ \mathbf{M} & & & & & \\ x_{j2} & x_{j3} & \mathbf{K} & x_{ji} & \mathbf{K} & x_{jm} \\ \mathbf{M} & & & & & \\ x_{\mu 2} & x_{\mu 3} & \mathbf{K} & x_{\mu i} & \mathbf{K} & x_{\mu m} \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Programul de calculator **RDD** generează sistematic toate matricile de tipul (2.88) în care variabilele  $x_{ji}$  verifică relațiile (2.86) și (2.87). Fiecare dintre cele  $(\mu - 1)(m - 1)$  variabile ia valori între 0 și valoarea maximă respectivă și anume  $x_{\mu m}$  variază cel mai rapid iar  $x_{22}$  cel mai lent (se parcurg în sens invers liniile matricii).

Numărul matricilor reduse de tipul (2.88) coincide cu numărul matricilor (2.54) și este deci chiar **N(RDD)**.

Programul **RDD** permite obținerea numerelor  $\mathbf{N}(\mathbf{RDD})$  în timpi variind de la o fracțiune de secundă la câteva minute, în cazul valorilor mari (de ordinul milioanelor).

Listingul programului **RDD** este prezentat în anexele prezentei lucrări.

## 2.10 Rezultatele numerice obținute

Utilizând metodele de calcul prezentate, respectiv programul de calculator **RDD**, s-au obținut următoarele rezultate ( $n = 1, 2, \dots, 10$ ). Tabelele conțin numerele claselor de dezechilibru pentru receptori dezechilibrați discreți de tipul  $n (l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)$ . Numărul  $n$  este notat în colțul din stânga-sus al fiecărui tabel. Indicii inferiori sunt marcați în partea stângă a tabelelor, sub forma  $(l_1, l_2, \dots, l_m)$ . Indicii superiori sunt marcați în partea superioară a tabelelor, sub forma  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)$ . La intersecția liniei și a coloanei respective se citește numărul  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{RDD})$ .

Tabelele sunt exhaustive și prezintă simetrie față de diagonala principală, datorită proprietății de simetrie.

Numerele  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{RDD})$  sunt cu atât mai "simple" (mai mici și mai ușor de calculat) cu atât ordinul  $n$  este mai mic. Din acest motiv, tabelele s-au calculat în ordinea prezentată, adică începând cu  $n = 1$ , continuând cu  $n = 2$  ș.a.m.d. până la  $n = 10$ . Dintre metodele "manuale" de calcul, deosebit de practice sunt formulele de recurență pentru  $\lambda_\mu = 1$  și  $\lambda_\mu = 2$  și formulele de reducere a ordinului pentru  $l_1 + \lambda_1 > n$ ;  $l_1 + \lambda_1 = n$ ;  $l_1 + \lambda_1 = n - 1$ . Deci, 5 formulele de calcul simple cu care se pot calcula din aproape în aproape orice tabel, bazându-ne pe cele existente (anterioare). Totuși un astfel de calcul „manual” al primelor 10 tabele cu numerele  $\mathbf{N}(\mathbf{RDD})$  necesită cca 40 de ore de calcul.

Programul de calculator **RDD**, scris în limbajul C și rulat pe un calculator IBM-Pentium, 150 MHz, 8 MB memorie RAM și 540 MB pentru HDD permite efectuarea aceluiași calcul în cca 10 ore (aici este evident inclus și timpul necesar introducerii datelor).

Dar marele avantaj al utilizării programului de calculator este posibilitatea calculării unor numere  $\mathbf{N}(\mathbf{RDD})$  pentru un  $n$  oarecare, când nu dispunem de tabelele cu numerele  $\mathbf{N}(\mathbf{RDD})$  pentru  $n-1, n-2 \dots$ . În acest caz, comparația cu metoda polinoamelor de tip Newton evidențiază avantajul absolut, incontestabil, al utilizării programului de calculator.

Ecranul programului **RDD** este prezentat în figura 2.5.

```
1. PROGRAM PENTRU ANALIZA CLASELOR DE DEZECHILIBRU
   ALE RECEPTOARELOR DEZECHILIBRATE DISCRETE <RDD>

2. EXIT

ALEGETI OPTIUNEA 1/2:

INTRODUCETI DIMENSIUNILE MATRICII:
Numarul de linii:      5
Numarul de coloane:   5

INTRODUCETI PARAMETRII:
  n = 15

INTRODUCETI COMPONENTELE PE LINII
  la1 = 5
  la2 = 4
  la3 = 2
  la4 = 2
  la5 = 2

INTRODUCETI COMPONENTELE PE COLOANE
  l1 = 7
  l2 = 3
  l3 = 2
  l4 = 2
  l5 = 1

NUMARUL DE DEZECHILIBRE POSIBILE ESTE

  [n = 15] [5 linii]
  G      = 14981
  [n = 15] [5 coloane]

Continuati? [d/n]
```

b)

Fig. 2.5. Ecranul programului RDD și anume de introducere (a) și de lucru (b)

Dăm în continuare câteva valori pentru numere  $\mathbf{N(RDD)}$  cu  $n$  mare.

$$G_{15(7,3,2,2,1)}^{15(5,4,2,2,2)} = 14981 \quad (2.89)$$

$$G_{20(7,5,4,3,1)}^{20(6,5,4,3,2)} = 294243 \quad (2.90)$$

$$G_{30(10,10,10)}^{30(10,10,10)} = 2211 \quad (2.91)$$

$$G_{180(60,60,60)}^{180(90,90)} = 2791 \quad (2.92)$$

$$G_{300(100,100,100)}^{300(150,150)} = 7651 \quad (2.93)$$

$$G_{1200(400,400,400)}^{1200(600,600)} = 120601 \quad (2.94)$$

Tabelele cu numerele  $\mathbf{N(RDD)}$  pentru  $n = 1, 2, \dots, 10$  sunt prezentate în continuare.

**Tabelul 2.1 (n = 1)**

1	(1)
(1)	1

**Tabelul 2.2 (n = 2)**

2	(2)	(1,1)
(2)	1	1
(1,1)	1	2

**Tabelul 2.3 (n = 3)**

3	(3)	(2,1)	(1,1,1)
(3)	1	1	1
(2,1)	1	2	3
(1,1,1)	1	3	6

**Tabelul 2.4 (n = 4)**

4	(4)	(3,1)	(2,2)	(2,1,1)	(1,1,1,1)
(4)	1	1	1	1	1
(3,1)	1	2	2	3	4
(2,2)	1	2	3	4	6
(2,1,1)	1	3	4	7	12
(1,1,1,1)	1	4	6	12	24

**Tabelul 2.5 (n = 5)**

5	(5)	(4,1)	(3,2)	(3,1,1)	(2,2,1)	(2,1,1,1)	(1,1,1,1,1)
(5)	1	1	1	1	1	1	1
(4,1)	1	2	2	3	3	4	5
(3,2)	1	2	3	4	5	7	10
(3,1,1)	1	3	4	7	8	13	20
(2,2,1)	1	3	5	8	11	18	30
(2,1,1,1)	1	4	7	13	18	33	60
(1,1,1,1,1)	1	5	10	20	30	60	120

**Tabelul 2.6 (n = 6)**

6	(6)	(5,1)	(4,2)	(3,3)	(4,1,1)	(3,2,1)	(2,2,2)
(6)	1	1	1	1	1	1	1
(5,1)	1	2	2	2	3	3	3
(4,2)	1	2	3	3	4	5	6
(3,3)	1	2	3	4	4	6	7
(4,1,1)	1	3	4	4	7	8	9
(3,2,1)	1	3	5	6	8	12	15
(2,2,2)	1	3	6	7	9	15	21
(3,1,1,1)	1	4	7	8	13	19	24
(2,2,1,1),	1	4	8	10	14	24	33
(2,1,1,1,1)	1	5	11	14	21	38	54
(1,1,1,1,1,1)	1	6	15	20	30	60	90

6	(3,1,1,1)	(2,2,1,1)	(2,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1)
(6)	1	1	1	1
(5,1)	4	4	5	6
(4,2)	7	8	11	15
(3,3)	8	10	14	20
(4,1,1)	13	14	21	30
(3,2,1)	19	24	38	60
(2,2,2)	24	33	54	90
(3,1,1,1)	34	42	72	120
(2,2,1,1),	42	58	102	180
(2,1,1,1,1)	72	102	192	360
(1,1,1,1,1,1)	120	180	360	720

Tabelul 2.7 (n = 7)

7	(7)	(6,1)	(5,2)	(4,3)	(5,1,1)	(4,2,1)	(3,3,1)	(3,2,2)	(4,1,1,1)
(7)	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(6,1)	1	2	2	2	3	3	3	3	4
(5,2)	1	2	3	3	4	5	5	6	7
(4,3)	1	2	3	4	4	6	7	8	8
(5,1,1)	1	3	4	4	7	8	8	9	13
(4,2,1)	1	3	5	6	8	12	13	16	19
(3,3,1)	1	3	5	7	8	13	16	19	20
(3,2,2)	1	3	6	8	9	16	19	25	25
(4,1,1,1)	1	4	7	8	13	19	20	25	34
(3,2,1,1)	1	4	8	11	14	25	30	39	43
(2,2,2,1)	1	4	9	13	15	30	37	51	51
(3,1,1,1,1)	1	5	11	15	21	39	46	62	73
(2,2,1,1,1)	1	5	12	18	22	46	58	81	84
(2,1,1,1,1,1)	1	6	16	25	31	70	90	130	135
(1,1,1,1,1,1,1)	1	7	21	35	42	105	140	210	210

7	(3,2,1,1)	(2,2,2,1)	(3,1,1,1,1)	(2,2,1,1,1)	(2,1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1,1)
(7)	1	1	1	1	1	1
(6,1)	4	4	5	5	6	7
(5,2)	8	9	11	12	16	21
(4,3)	11	13	15	18	25	35
(5,1,1)	14	15	21	22	31	42
(4,2,1)	25	30	39	46	70	105
(3,3,1)	30	37	46	58	90	140
(3,2,2)	39	51	62	81	130	210
(4,1,1,1)	43	51	73	84	135	210
(3,2,1,1)	67	87	114	148	250	420
(2,2,2,1)	87	120	150	207	360	630
(3,1,1,1,1)	114	150	208	270	480	840
(2,2,1,1,1)	148	207	270	378	690	1260
(2,1,1,1,1,1)	250	360	480	690	1320	2520
(1,1,1,1,1,1,1)	420	630	840	1260	2520	5040



Tabelul 2.8 (n = 8)

8	(8)	(7.1)	(6.2)	(5.3)	(6.1.1)	(4.4)
(8)	1	1	1	1	1	1
(7.1)	1	2	2	2	3	2
(6.2)	1	2	3	3	4	3
(5.3)	1	2	3	4	4	4
(6.1.1)	1	3	4	4	7	4
(4.4)	1	2	3	4	4	5
(5.2.1)	1	3	5	6	8	6
(4.3.1)	1	3	5	7	8	8
(5.1.1.1)	1	4	7	8	13	8
(4.2.2)	1	3	6	8	9	9
(3.3.2)	1	3	6	9	9	10
(4.2.1.1)	1	4	8	11	14	12
(3.3.1.1)	1	4	8	12	14	14
(3.2.2.1)	1	4	9	14	15	16
(4.1.1.1.1)	1	5	11	15	21	16
(2.2.2.2)	1	4	10	16	16	19
(3.2.1.1.1)	1	5	12	19	22	22
(2.2.2.1.1)	1	5	13	22	23	26
(3.1.1.1.1.1)	1	6	16	26	31	30
(2.2.1.1.1.1)	1	6	17	30	32	36
(2.1.1.1.1.1.1)	1	7	22	41	43	50
(1.1.1.1.1.1.1.1)	1	8	28	56	56	70

8	(5.2.1)	(4.3.1)	(5.1.1.1)	(4.2.2)	(3.3.2)
(8)	1	1	1	1	1
(7.1)	3	3	4	3	3
(6.2)	5	5	7	6	6
(5.3)	6	7	8	8	9
(6.1.1)	8	8	13	9	9
(4.4)	6	8	8	9	10
(5.2.1)	12	13	19	16	17
(4.3.1)	13	17	20	20	23
(5.1.1.1)	19	20	34	25	26
(4.2.2)	16	20	25	26	29
(3.3.2)	17	23	26	29	35
(4.2.1.1)	25	31	43	40	45
(3.3.1.1)	26	36	44	45	54
(3.2.2.1)	31	43	52	57	69
(4.1.1.1.1)	39	47	73	63	70
(2.2.2.2)	36	52	60	72	88
(3.2.1.1.1)	47	66	85	89	108
(2.2.2.1.1)	54	80	96	111	139
(3.1.1.1.1.1)	71	100	136	140	170
(2.2.1.1.1.1)	80	122	150	173	220
(2.1.1.1.1.1.1)	117	185	228	270	350
(1.1.1.1.1.1.1.1)	168	280	336	420	560

Tabelul 2.8(continuare)

8	(4,2,1,1)	(3,3,1,1)	(3,2,2,1)	(4,1,1,1,1)	(2,2,2,2)	(3,2,1,1,1)	(2,2,2,1,1)
(8)	1	1	1	1	1	1	1
(7.1)	4	4	4	5	4	5	5
(6.2)	8	8	9	11	10	12	13
(5.3)	11	12	14	15	16	19	22
(6.1.1)	14	14	15	21	16	22	23
(4.4)	12	14	16	16	19	22	26
(5.2.1)	25	26	31	39	36	47	54
(4.3.1)	31	36	43	47	52	66	80
(5.1.1.1)	43	44	52	73	60	85	96
(4.2.2)	40	45	57	63	72	89	111
(3.3.2)	45	54	69	70	88	108	139
(4.2.1.1)	68	76	96	115	120	160	198
(3.3.1.1)	76	92	116	126	148	194	248
(3.2.2.1)	96	116	154	162	204	260	345
(4.1.1.1.1)	115	126	162	209	204	286	354
(2.2.2.2)	120	148	204	204	282	348	480
(3.2.1.1.1)	160	194	260	286	348	463	618
(2.2.2.1.1)	198	248	345	354	480	618	861
(3.1.1.1.1.1)	265	320	440	500	600	820	1110
(2.2.1.1.1.1)	324	412	584	606	828	1092	1548
(2.1.1.1.1.1.1)	525	680	990	1020	1440	1920	2790
(1.1.1.1.1.1.1.1)	840	1120	1680	1680	2520	3360	5040

8	(3.1.1.1.1.1)	(2.2.1.1.1.1)	(2.1.1.1.1.1.1)	(1.1.1.1.1.1.1.1)
(8)	1	1	1	1
(7.1)	6	6	7	8
(6.2)	16	17	22	28
(5.3)	26	30	41	56
(6.1.1)	31	32	43	56
(4.4)	30	36	50	70
(5.2.1)	71	80	117	168
(4.3.1)	100	122	185	280
(5.1.1.1)	136	150	228	336
(4.2.2)	140	173	270	420
(3.3.2)	170	220	350	560
(4.2.1.1)	265	324	525	840
(3.3.1.1)	320	412	680	1120
(3.2.2.1)	440	584	990	1680
(4.1.1.1.1)	500	606	1020	1680
(2.2.2.2)	600	828	1440	2520
(3.2.1.1.1)	820	1092	1920	3360
(2.2.2.1.1)	1110	1548	2790	5040
(3.1.1.1.1.1)	1520	2040	3720	6720
(2.2.1.1.1.1)	2040	2892	5400	10080
(2.1.1.1.1.1.1)	3720	5400	10440	20160
(1.1.1.1.1.1.1.1)	6720	10080	20160	40320

Tabelul 2.9 (n = 9)

9	(9)	(8,1)	(7,2)	(7,1,1)	(6,3)
(9)	1	1	1	1	1
(8,1)	1	2	2	3	2
(7,2)	1	2	3	4	3
(7,1,1)	1	3	4	7	4
(6,3)	1	2	3	4	4
(5,4)	1	2	3	4	4
(6,2,1)	1	3	5	8	6
(5,3,1)	1	3	5	8	7
(6,1,1,1)	1	4	7	13	8
(4,4,1)	1	3	5	8	7
(5,2,2)	1	3	6	9	8
(4,3,2)	1	3	6	9	9
(5,2,1,1)	1	4	8	14	11
(3,3,3)	1	3	6	9	10
(4,3,1,1)	1	4	8	14	12
(5,1,1,1,1)	1	5	11	21	15
(4,2,2,1)	1	4	9	15	14
(3,3,2,1)	1	4	9	15	15
(3,2,2,2)	1	4	10	16	17
(4,2,1,1,1)	1	5	12	22	19
(3,3,1,1,1)	1	5	12	22	20
(3,2,2,1,1)	1	5	13	23	23
(4,1,1,1,1,1)	1	6	16	31	26
(2,2,2,2,1)	1	5	14	24	26
(3,2,1,1,1,1)	1	6	17	32	31
(2,2,2,1,1,1)	1	6	18	33	35
(3,1,1,1,1,1,1)	1	7	22	43	42
(2,2,1,1,1,1,1)	1	7	23	44	47
(2,1,1,1,1,1,1,1)	1	8	29	57	63
(1,1,1,1,1,1,1,1,1)	1	9	36	72	84

9	(5,4)	(6,2,1)	(5,3,1)	(6,1,1,1)	(4,4,1)
(9)	1	1	1	1	1
(8,1)	2	3	3	4	3
(7,2)	3	5	5	7	5
(7,1,1)	4	8	8	13	8
(6,3)	4	6	7	8	7
(5,4)	5	6	8	8	9
(6,2,1)	6	12	13	19	13
(5,3,1)	8	13	17	20	18
(6,1,1,1)	8	19	20	34	20
(4,4,1)	9	13	18	20	21
(5,2,2)	9	16	20	25	21
(4,3,2)	11	17	24	26	27
(5,2,1,1)	12	25	31	43	32
(3,3,3)	12	18	27	27	30
(4,3,1,1)	15	26	37	44	42
(5,1,1,1,1)	16	39	47	73	48
(4,2,2,1)	17	31	44	52	49
(3,3,2,1)	19	32	49	53	56
(3,2,2,2)	22	37	58	61	67
(4,2,1,1,1)	23	47	67	85	74
(3,3,1,1,1)	26	48	74	86	86
(3,2,2,1,1)	30	55	88	97	102
(4,1,1,1,1,1)	31	71	101	136	110
(2,2,2,2,1)	35	62	104	108	123
(3,2,1,1,1,1)	41	81	132	151	154
(2,2,2,1,1,1)	48	90	156	165	186
(3,1,1,1,1,1,1)	56	118	197	229	230
(2,2,1,1,1,1,1)	66	129	232	246	280
(2,1,1,1,1,1,1,1)	91	182	343	357	420
(1,1,1,1,1,1,1,1,1)	126	252	504	504	630

**Tabelul 2.9 (continuare)**

9	(5,2,2)	(4,3,2)	(5,2,1,1)	(3,3,3)	(4,3,1,1)
(9)	1	1	1	1	1
(8,1)	3	3	4	3	4
(7,2)	6	6	8	6	8
(7,1,1)	9	9	14	9	14
(6,3)	8	9	11	10	12
(5,4)	9	11	12	12	15
(6,2,1)	16	17	25	18	26
(5,3,1)	20	24	31	27	37
(6,1,1,1)	25	26	43	27	44
(4,4,1)	21	27	32	30	42
(5,2,2)	26	30	40	33	46
(4,3,2)	30	39	46	45	60
(5,2,1,1)	40	46	68	51	77
(3,3,3)	33	45	51	55	69
(4,3,1,1)	46	60	77	69	101
(5,1,1,1,1)	63	71	115	78	127
(4,2,2,1)	58	75	97	87	125
(3,3,2,1)	63	87	105	105	145
(3,2,2,2)	78	109	129	132	181
(4,2,1,1,1)	90	116	161	135	206
(3,3,1,1,1)	97	135	172	162	240
(3,2,2,1,1)	119	169	210	207	298
(4,1,1,1,1,1)	141	180	266	210	335
(2,2,2,2,1)	144	212	252	264	372
(3,2,1,1,1,1)	183	263	339	324	486
(2,2,2,1,1,1)	219	330	402	417	606
(3,1,1,1,1,1,1)	282	410	543	510	785
(2,2,1,1,1,1,1)	333	515	634	660	980
(2,1,1,1,1,1,1,1)	504	805	987	1050	1575
(1,1,1,1,1,1,1,1,1)	756	1260	1512	1680	2520

9	(5,1,1,1,1)	(4,2,2,1)	(3,3,2,1)	(3,2,2,2)	(4,2,1,1,1)
(9)	1	1	1	1	1
(8,1)	5	4	4	4	5
(7,2)	11	9	9	10	12
(7,1,1)	21	15	15	16	22
(6,3)	15	14	15	17	19
(5,4)	16	17	19	22	23
(6,2,1)	39	31	32	37	47
(5,3,1)	47	44	49	58	67
(6,1,1,1)	73	52	53	61	85
(4,4,1)	48	49	56	67	74
(5,2,2)	63	58	63	78	90
(4,3,2)	71	75	87	109	116
(5,2,1,1)	115	97	105	129	161
(3,3,3)	78	87	105	132	135
(4,3,1,1)	127	125	145	181	206
(5,1,1,1,1)	209	163	174	216	287
(4,2,2,1)	163	163	188	243	272
(3,3,2,1)	174	188	227	295	313
(3,2,2,2)	216	243	295	396	408
(4,2,1,1,1)	287	272	313	408	479
(3,3,1,1,1)	302	313	378	496	548
(3,2,2,1,1)	370	403	493	666	710
(4,1,1,1,1,1)	501	455	520	690	840
(2,2,2,2,1)	444	516	644	894	912
(3,2,1,1,1,1)	626	669	822	1128	1229
(2,2,2,1,1,1)	738	852	1077	1515	1556
(3,1,1,1,1,1,1)	1044	1110	1370	1920	2115
(2,2,1,1,1,1,1)	1206	1405	1800	2580	2670
(2,1,1,1,1,1,1,1)	1932	2310	3010	4410	4515
(1,1,1,1,1,1,1,1,1)	3024	3780	5040	7560	7560



## 2.11 Concluzii și observații

În cadrul acestui capitol s-a început prin definirea receptorului dezechilibrat discret (**RDD**) și elaborarea modelului matematic respectiv. S-a enunțat problema determinării numărului **N(RDD)** al receptorilor dezechilibrați discreți de un anumit tip, cu evidențierea proprietăților acestui număr.

În continuare s-au prezentat patru metode pentru calculul numărului **N(RDD)** împreună cu exemple concrete, precum și un program de calculator elaborat în acest sens și utilizat la calcularea primelor zece tabele.

În încheierea acestui capitol, menționăm că numerele  $G_n^{k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}(l_1, l_2, \dots, l_m)$  (2.14) pot fi utilizate și în alte ramuri ale tehnicii, în care intervin sisteme discrete și finite. Cu alte cuvinte, modelul matematic expus este comun pentru mai multe probleme concrete, numerele (2.14) având și o importanță în sine, deoarece reprezintă o generalizare pentru unele concepte fundamentale din combinatorică [P13], [P15].

În lucrarea [B2] sunt utilizate cazuri particulare ale numerelor (2.14) în cibernetica sistemelor discrete. Cazul general nu este abordat, nici în această lucrare nici în alte lucrări din literatura de specialitate.

Din acest motiv, conținutul prezentului capitol este original atât prin problematica abordată cât și prin metodele de calcul propuse pentru cazul general.

Principalele contribuții originale ale autorului sunt enumerate în continuare:

- Introduc noțiunea de receptor dezechilibrat discret (**RDD**).
- Elaborez modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret.
- Elaborez metoda enumerării pentru calculul numărului **N(RDD)**.
- Elaborez metoda polinoamelor de tip Newton pentru calculul numărului **N(RDD)**.
- Elaborez metoda de recurență pentru calculul numărului **N(RDD)**.
- Elaborez metoda reducerii ordinului pentru calculul numărului **N(RDD)**.
- Elaborez programul de calculator **RDD** pentru calculul numărului **N(RDD)**. Folosind acest program de calculator am calculat toate numerele **N(RDD)** pentru valori ale lui  $n$  mai mici sau egale decât zece.

**CAPITOLUL 3**  
**ARTICOLE PRIVIND RDD**





# A Mathematical Model for Unbalanced Classes Analysis of Polyphasic Loads

Vasile Mircea POPA

**Abstract:** The paper proposes a new method for calculating the number of equivalence classes for discrete unbalanced loads. The determination of this number is a combinatorial problem of distributing  $n$  objects ( $\mu$  classes of objects where the class  $j$  contains  $\lambda_j$  identical objects, so that  $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n$ ) in  $m$  cells of capacity  $l_i$ , having  $\sum_{i=1}^m l_i = n$ .

## 1. Introduction

Consider a polyphasic unbalanced load and equivalent scheme in star connection (fig.1).

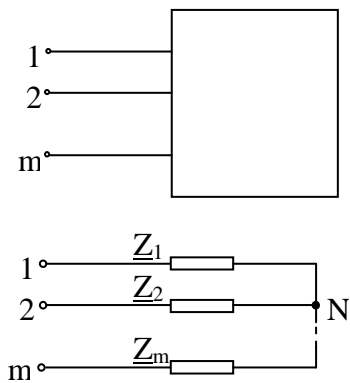


Fig.1

The phase  $i$  of load requires a number  $l_i$  from the elementary impedances ( $i=1,2,\dots,m$ ) (fig.2).

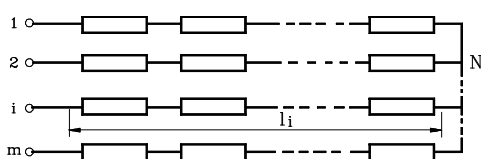


Fig.2

We have  $\mu$  impedance classes, where the class  $j$  contains  $\lambda_j$  identical impedances ( $j=1,2,\dots,\mu$ ).

Supposing that:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = \sum_{i=1}^m l_i = n \tag{1}$$

the number of polyphasic load unbalanced classes is finite.

If we note this number:

$$N = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu})} \tag{2}$$

we can use for his calculation an original algorithm we are going to present below.

## 2. Original algorithm

I propose the following algorithm [3].

a) We solve the polynomial:

$$P = P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} \dots P_{\lambda_{\mu}} \tag{3}$$

where:

$$P_{\lambda_j} = P_{\lambda_j}(x_1, x_2, \dots, x_{\lambda_j})$$

is a Newton type polynomial of degree  $\lambda_j$  in  $\lambda_j$  variables [1].

$$P = P(x_1, x_2, \dots, x_{\lambda}) \tag{4}$$

will have a:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n$$

degree and  $\lambda$  variables, where:

$$\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu).$$

b) We replace in P:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 + \dots + y_m \\ x_2 &= y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2 \\ &\dots \\ x_\lambda &= y_1^\lambda + y_2^\lambda + \dots + y_m^\lambda \end{aligned} \quad (5)$$

c) With the help of the multinomial theorem we calculate the coefficient of the single term  $y_1^{l_1} y_2^{l_2} \dots y_m^{l_m}$  of the expansion of P, which will be the number we are looking for.

The general polynomial of Newton type has the form:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n \\ k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0}} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! \dots n^{k_n} k_n!}. \quad (6)$$

Applying the above mentioned general formula we can easily obtain the first Newton type polynomials:

$$P_1 = x_1$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$$

$$P_3 = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$$

$$P_4 = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4)$$

The algorithm that we displayed before coincides with the Pólya – de Bruijn enumeration method used in our problem case [2].

We can also remark that the number N represents also the number of matrices with  $\mu$  rows and m columns, made of natural numbers, where the sum of the rows and columns are given:

$n$	$l_1$	$l_2$	$\Lambda$	$l_m$	(7)
$\lambda_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	$\Lambda$	$x_{1m}$	
$\lambda_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	$\Lambda$	$x_{2m}$	
$M$	$M$	$M$	$\Lambda$	$M$	
$\lambda_\mu$	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	$\Lambda$	$x_{\mu m}$	

The algorithm was programmed on the electronic computer.

### 3. Conclusions

This paper presents a mathematical model for polyphasic loads unbalances classes analysis. The number N represents also the number of solutions for the system of equations:

$$\sum_{i=1}^m x_{ji} = \lambda_j; \quad \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i; \quad \lambda_j, l_i > 0; \quad x_{ji} \geq 0$$

the numbers  $x_{ji}$  are natural numbers and the numbers  $\lambda_j, l_i$  are strictly positive natural numbers. The system has  $\mu m$  unknowns (because of the equilibrium conditions (1)).

As an application we propose to the reader to check up by calculation the equalities:

$$G_{8(2,2,1,1,1)}^{8(2,2,2,1,1)} = 1548$$

$$G_{8(2,2,1,1,1,1)}^{9(3,2,2,1,1)} = 4900$$

and to formulate the according problems complying with the count of solutions both for the before system and for the matrices (7).

### 4. References:

- [1] D. E. Knuth – *The Art of Computer Programming*, vol.1, *Fundamentals Algorithms*, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1973
- [2] I. Tomescu – *Introduction to Combinatorics*, Collet's (Publishers) Limited, London and Wellingborough, England, 1975
- [3] V. M. Popa – *On a Question of Linear Programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol.X, Sibiu, Romania, 1993

# The Algebraic Characterisation of Discreet Unbalanced Loads

**Vasile Mircea Popa**

**Abstract:** The paper proposes an algebraic characterisation for unbalanced discreet loads. The algebraic model is the bijection between two finite multiple sets. The number of unbalanced discreet loads is the number of equivalence classes for equivalence relation defined onto bijection set.

*Key words:* m-phased load, discreet unbalanced loads, algebraic characterisation for discreet unbalanced loads

## 1. Introduction

We are considering an m-phased unbalanced load and the equivalent scheme in star connection. We assume that the phases are distinct between them (discernible). If the impedances from the m phases are made up (in a series) of elementary impedances (physical elements), we call the m-phased load discreet unbalanced load (DUL). [3],[4]. We assume that we have n elementary impedances, namely  $\mu$  classes of different elementary impedances, the j class containing  $\lambda_j$  identical impedances, thus:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n. \tag{1}$$

The m distinct phases of the load with a star connection, contain  $l_i$  elementary impedances each, with:

$$\sum_{i=1}^m l_i = n. \tag{2}$$

The scheme of such a discreet unbalanced load is given in fig 1.

We call such a discreet unbalanced load of the  $n(l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu})$  type.

We are to imply next that the discreet unbalanced loads (DUL), which we are to consider, do belong to this type.

At the transfer of some elementary impedances from a phase to another we obtain different unbalances loads, which introduce different types of lack of balance into the network where they belong.

Particularly, some of these loads can be balanced but they can be considered as limit cases of unbalanced loads [3].

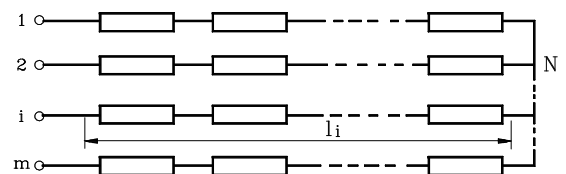


Figure 1.

A question that is raised immediately is determined by the number of possible unbalanced, in other words, the number of the discreet unbalanced load. The number of the discreet unbalanced loads, which may exist, is finite and we note it:

$$N = N(\text{DUL}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu})}. \tag{3}$$

By the  $N=N(\text{DUL})$  number calculation we use methods from the discreet mathematics, to be more exactly, from the combinatorics. [1], [2], [3].

## 2. The algebraic model for RDD

The algebraic model for the discreet unbalanced load is the bijection between two multiple sets [3],[4]. We take into consideration two finite sets X and Y, having the same number of elements:  $|X| = |Y| = n$ , as well as the set of bijections  $f : X \rightarrow Y$ , that we note as  $Y^X$ . Let us assume an equivalence relation  $(\rho_i)$  defined on the set X, which determines a partition of the set X, where  $\mu$  equivalence classes  $X_j$  containing each  $\lambda_j$  elements, that is

$|X_j| = \lambda_j$  ( $j=1,2,\dots,\mu$ ). The elements of an equivalence class will be called equivalent or identical. In the same way, we consider an equivalent relation ( $\rho_2$ ) defined on the set Y, which determines a partition of the set Y in m classes of equivalence,  $Y_i$  containing each  $l_i$  elements, namely  $|Y_i| = l_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ). In this way, the sets X and Y become multiple sets, namely sets where the elements may repeat. Using this terminology, we may say that the set X contains  $\mu$  distinct elements, the j element repeating  $\lambda_j$  times ( $j=1,2,\dots,\mu$ ). Likewise, for the set Y.

Now we are to consider a permutations group G of the set X that is the simple (or direct) product of the symmetrical groups of permutations for the equivalence classes elements from X [1], [2], [3].

This group is noted as:  $G = S_{\lambda_1} \cdot S_{\lambda_2} \cdot \dots \cdot S_{\lambda_\mu}$  and it is defined the following way: for any  $\alpha \in G$ ,  $\alpha_j \in S_{\lambda_j}$ ,  $x \in X_j$ , we have:

$$\alpha(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_\mu)(x) = \alpha_j(x) \quad (4)$$

$(j = 1, 2, \dots, \mu)$

The definition is consistent. Due to the fact that G is a finite subset of  $S_n$ , in order that G may be a permutation group of the set X (a sub-group of the symmetric group  $S_n$ ) it is sufficient for us to check that for any  $\alpha, \alpha' \in G \Rightarrow \alpha\alpha' \in G$  (we noted  $\alpha\alpha'$  the  $\alpha$  and  $\alpha'$  permutation composition). Let  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_\mu)$  and  $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_j, \dots, \alpha'_\mu)$  be. For any  $x \in X_j$ , we get after the definition:

$$\alpha\alpha'(x) = \alpha(\alpha'(x)) = \alpha(\alpha_j'(x)) = \alpha_j(\alpha_j'(x)) = \alpha_j\alpha_j'(x)$$

We thus obtain:

$\alpha\alpha' = (\alpha_1\alpha'_1, \alpha_2\alpha'_2, \dots, \alpha_j\alpha'_j, \dots, \alpha_\mu\alpha'_\mu)$  and we can observe that  $\alpha\alpha' \in G$ .

Therefore G is a permutation group of the X set. We used the finite subgroups characterisation theorem [1],[2]. Thus, through this permutation group, any X element of the X set is changed into an element that belongs to the same equivalence class as X.

Analogously, we also consider the H permutation group of the Y set:

$$H = S_{l_1} \cdot S_{l_2} \cdot \dots \cdot S_{l_m}$$

For any  $\beta \in H$ ,  $\beta_i \in S_{l_i}$ ,  $y \in Y_i$ , we have:

$$\beta(y) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \dots, \beta_m)(y) = \beta_i(y) \quad (5)$$

$(i = 1, 2, \dots, m)$

That is, through the permutation of this group, any y element of the Y set is changed into an element that belong to the same equivalence class as y.

There can be defined an equivalence relation ( $\rho$ ) on the  $Y^x$  set, as follows:  $f_1 \sim f_2$  if  $\alpha \in G$  and  $\beta \in H$  exist, so that  $f_2 = \beta f_1 \alpha$ . We demonstrate that the relation defined like this is an equivalence relation on the bijections set  $f: X \rightarrow Y$ , in ratio with the G and H permutation groups.

The relation is reflexive:  $f \sim f$ , because  $f = \varepsilon_2 f \varepsilon_1$ , where  $\varepsilon_1 \in G$  and  $\varepsilon_2 \in H$  are identical permutations from the two permutation groups. The relation is symmetrical:  $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1$ . It is true that  $f_2 = \beta f_1 \alpha$  leads to  $f_1 = \beta^{-1} f_2 \alpha^{-1}$ , where  $\alpha^{-1} \in G$  and  $\beta^{-1} \in H$ , fact that proves the assertion. The relation is transitive:  $f_1 \sim f_2$  and  $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3$ . That is, from  $f_2 = \beta f_1 \alpha$  and  $f_3 = \beta' f_2 \alpha'$  it results

$$f_3 = \beta' \beta f_1 \alpha \alpha' = \beta'' f_1 \alpha'', \quad \text{where: } \beta' \beta = \beta'' \in H \quad \text{and} \\ \alpha \alpha' = \alpha'' \in G$$

The relation ( $\rho$ ) of equivalence determines a partition of the  $Y^x$  set into classes of equivalence. The number of these classes of equivalence is noted in the following way:

$$|Y^x / \rho| = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} \quad (6)$$

We notice that the setting forth of this problem is equivalent to the problem to define the discreet unbalanced load (DUL).

We take into consideration n elementary impedance ( $\mu$  impedance classes, the j class containing  $\lambda_j$  identical impedances, as  $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n$ ) and m phases, the i phase receiving  $l_i$  elementary inseried impedances, with  $\sum_{i=1}^m l_i = n$ .

The n impedances are distributed in the m phases. The number of possible distribution is:

$$N = N(\text{DUL}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} \quad (7)$$

### 3. Conclusions

Therefore, the mathematical model for the discreet unbalanced load is the bijection between two multiple sets and the counting of the discreet unbalanced loads (DUL) is reduced to the bijections between two multiple sets counting [4].

We also note that the defined relation for the lack of balance on the discreet loads set is an equivalence relation and the classes with lack of balance are corresponding equivalence classes.

The author of this paper has elaborated four methods for the calculation of the N (DUL) number [3].

### Bibliography

- [1] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu – *Bazele algebrei*, vol. I, Editura Academiei, București, 1986.
- [2] D. Popescu, C. Vraciu – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986.
- [3] V. M. Popa – *Aplicații și încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifazate în regimuri nesimetrice*, Referat de doctorat nr. 2, Universitatea Tehnica Cluj - Napoca, Facultatea de Electrotehnică Cluj - Napoca, 1994.
- [4] V.M. Popa – *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 38, nr. 1, 1995.

# Methods for Calculating the Number of Discreet Unbalanced Loads

Vasile Mircea Popa

**Abstract:** This paper presents a method for unbalanced discreet loads number calculation. Four methods are presented and the enumeration method is also detailed. The respective algorithm was programmed on the electronic computer.

*Key words:* m-phased loads, discreet unbalanced loads, methods for discreet unbalanced loads number calculation, enumeration method.

## 1. Introduction

The m- phased discreet unbalanced load of the  $n(l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)$  type has been defined in some previous papers [2], [3].

We are considering an m-phased unbalanced load and the equivalent scheme in star connection. We assume that the phases are distinct between them (discernible). If the impedances from the m phases are made up (in a series) of elementary impedances (physical elements), we call the m-phased load discreet unbalanced load (DUL). [2]. We assume that we have n elementary impedances, namely  $\mu$  classes of different elementary impedances, the j class containing  $\lambda_j$  identical impedances, thus:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n .$$

The m distinct phases of the load with a star connection, contain  $l_i$  elementary impedances each, with:

$$\sum_{i=1}^m l_i = n .$$

The scheme of such a discreet unbalanced load is given in fig 1.

We call such a discreet unbalanced load of the  $n(l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)$  type.

We are to imply next that the discreet unbalanced loads (DUL), which we are to consider, do belong to this type.

At the transfer of some elementary impedances from a phase to another we obtain different unbalances loads, which introduce different types of lack of balance into the network where they belong. Particularly, some of these loads can be balanced but they can be considered as limit cases of unbalanced loads [2]

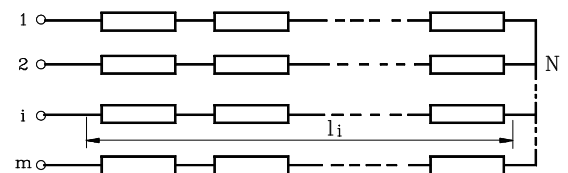


Figure 1.

A question that is raised immediately is determined by the number of possible unbalanced, in other words, the number of the discreet unbalanced load. The number of the discreet unbalanced loads, which may exist, is finite and we note it:

$$N = N(\text{DUL}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}$$

The author of this paper has elaborated four methods for the N (DUL) number calculation. These are:

1. The enumeration method
2. The Newton type polynomials method
3. The recurrence method
4. The order reducing method.

The Newton type polynomials method has been set forth in the [3] paper. Now we are going to present the enumeration method.

## 2. The enumeration method

This method is based on the observation that the N number is equal to the solutions number of the system:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m x_{ji} = \lambda_j; j=1,2,\dots,\mu \\ \sum_{i=1}^{\mu} x_{ji} = l_i; i=1,2,\dots,m \end{cases} \quad (1)$$

Where  $\lambda_j, l_i > 0$ ;  $x_{ji} \geq 0$  are natural numbers.

This system has  $\mu m$  unknowns and  $\mu + m - 1$  independent equations (because of the conditions  $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = \sum_{i=1}^m l_i = n$ ).

Therefore, the non-determination degree of system is:

$$\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1) \quad (2)$$

We notice that the N number also represents the matrices number with  $\mu$  rows and m columns, containing natural numbers, where the sum of the rows, respectively of the columns, are imposed:

n	$l_1$	$l_2$	...	$l_m$
$\lambda_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1m}$
$\lambda_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2m}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$\lambda_{\mu}$	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	...	$x_{\mu m}$

(3)

The enumeration method “manually” applied, consist of the effective construction of the matrices of the type (3) and their counting. It is obvious that for n capital, this variant is totally unpractical. Based on the enumeration method, we made up a computer program (called the RDD program) which systematically generates matrices of the (3) type and finally it gives the number of these matrices. The problem is reduced to the determination of the reduced matrices with  $\mu-1$  and  $m - 1$  dimensions, where the  $x_{ji}$  variables take natural values between 0 and a maximum value and their sum is higher than or equal to the  $n - l_1 - \lambda_1$ .

We may write:

$$0 \leq x_{ji} \leq \min(\lambda_j - x_{j2} - \dots - x_{j,i-1}; l_i - x_{2i} - \dots - x_{j-1,i}) \quad (4)$$

$$S = \sum_{j=2}^{\mu} \sum_{i=2}^m x_{ji} \geq n - l_1 - \lambda_1 \quad (5)$$

referring to the matrix:

$$M = \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2i} & \dots & x_{2m} \\ x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3i} & \dots & x_{3m} \\ \dots & & & & & \\ x_{j2} & x_{j3} & \dots & x_{ji} & \dots & x_{jm} \\ \dots & & & & & \\ x_{\mu 2} & x_{\mu 3} & \dots & x_{\mu j} & \dots & x_{\mu m} \end{bmatrix} \quad (6)$$

The number of the reduced matrices of the (6) type coincides with the (3) matrices number and it is exactly N (DUL)

A numeric example obtained:

$$G_{30(10,10,10)}^{30(10,10,10)} = 2211 \quad (7)$$

### Bibliography:

- [1] V. M. Popa – *On a question linear programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol. X (1), Sibiu, 1993.
- [2] V. M. Popa - *Aplicații și încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifazate în regimuri nesimetrice*, Referat de doctorat nr. 2, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică Cluj-Napoca, 1994.
- [3] V. M. Popa – *A Mathematical Model for Polyplastic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 38, nr. 1, 1995.

# The Recurrence Method for Calculating the Unbalanced Classes Number of m-Phased Loads

**Vasile Mircea Popa**

**Abstract:** This work shows a recurrence method for m-phased loads unbalanced classes number calculation. The numbers N(DUL) can be determined recursively, using recurrence relations. At the end of the paper a numerical computational example is presented.

*Key words: m-phased loads, discreet unbalanced loads, recurrence method.*

## 1. Introduction

In some previous papers[3], [4] it was defined the m-phased load of the  $n(l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)$  type.

We are considering an m-phased unbalanced load and the equivalent scheme in star connection. We assume that the phases are distinct between them (discernible). If the impedances from the m phases are made up (in a series) of elementary impedances (physical elements), we call the m-phased load discreet unbalanced load (DUL). [2]. We assume that we have n elementary impedances, namely  $\mu$  classes of different elementary impedances, the j class containing  $\lambda_j$  identical impedances, thus:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n . \tag{1}$$

The m distinct phases of the load with a star connection, contain  $l_i$  elementary impedances each, with:

$$\sum_{i=1}^m l_i = n . \tag{2}$$

The scheme of such a discreet unbalanced load is given in fig 1.

We call such a discreet unbalanced load of the  $n(l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)$  type.

We are to imply next that the discreet unbalanced loads

(DUL), which we are to consider, do belong to this type.

At the transfer of some elementary impedances from a phase to another we obtain different unbalances loads, which introduce different types of lack of balance into the network where they belong.

Particularly, some of these loads can be balanced but they can be considered as limit cases of unbalanced loads [2]

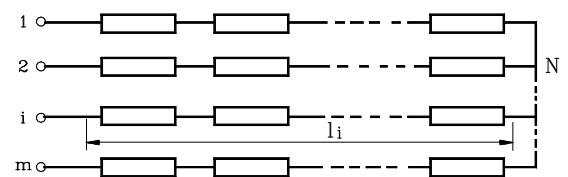


Figure 1.

A question that is raised immediately is determined by the number of possible unbalanced, in other words, the number of the discreet unbalanced load. The number of the discreet unbalanced loads, which may exist, is finite and we note it:

$$N = N(\text{DUL}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} . \tag{3}$$

This paper shows the recurrence method for the discreet unbalanced loads for the N (DUL) number calculation.

## 2. The recurrence method

The number of the unbalanced classes for the discreet unbalanced loads can be determined with the aid of some N (DUL) numbers with lesser order.

The recurrence relations are easily deduced starting from the definition of the number N (DUL). By the decreasing order of the superior and inferior indices and the using of the symmetrical properties it was determined that:

$$\lambda_{\mu} = \min(l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu}) \quad (4)$$

a) if  $\lambda_{\mu}=1$ , it results:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu})} = \sum_R G_{n-1(l_1, l_2, \dots, l_i-1, \dots, l_m)}^{n-1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu-1})} \quad (5)$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \quad (6)$$

in natural numbers, with  $0 \leq x_i \leq 1$ , ( $i=1, 2, \dots, m$ ).

The solutions number of this equation is:

$$|R| = c_m^1 = m \quad (\text{combinations with repetition}). \quad (7)$$

b) if  $\lambda_{\mu}=2$ , it results:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu})} = \sum_R G_{n-2(l_1, l_2, \dots, l_i-2, \dots, l_m)}^{n-2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu-1})} \quad (8)$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 2 \quad (9)$$

in natural numbers, with  $0 \leq x_i \leq 2$ , ( $i=1, 2, \dots, m$ ).

The solutions number of this equation is:

$$|R| = c_m^2 = \frac{m(m+1)}{2}. \quad (10)$$

c) if  $\lambda_{\mu}=3$  it results:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu})} = \sum_R G_{n-3(l_1, l_2, \dots, l_i-3, \dots, l_m)}^{n-3(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu-1})} \quad (11)$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 3 \quad (12)$$

in natural numbers, with  $0 \leq x_i \leq 3$ , ( $i=1, 2, \dots, m$ ).

The number of solutions for this equation is:

$$|R| = c_m^3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}. \quad (13)$$

The list of these recurrence relations may continue, but their application becomes more and more difficult, because of the increasing of  $|R|$ .

Very simple and advantageously is the applying of the first two recurrence relation, that is for:

$$\lambda_{\mu}=1, \text{ and } \lambda_{\mu}=2$$

We illustrate the method giving an example.

Calculate the number:  $N = G_{10(3, 3, 2, 2)}^{10(4, 3, 2, 1)}$ .

Applying the relation (2), we obtain:

$$\begin{aligned} N &= G_{9(2, 3, 2, 2)}^{9(4, 3, 2)} + G_{9(3, 2, 2, 2)}^{9(4, 3, 2)} + G_{9(3, 3, 1, 2)}^{9(4, 3, 2)} + G_{9(3, 3, 2, 1)}^{9(4, 3, 2)} = \\ &= 2 \cdot G_{9(3, 2, 2, 2)}^{9(4, 3, 2)} + 2 \cdot G_{9(3, 3, 2, 1)}^{9(4, 3, 2)} = 2 \cdot 109 + 2 \cdot 87 = 392 \end{aligned}$$

It is obvious that the applying of the recurrence relation for N (DUL) it is assumed the knowledge of the value for this type of inferior order numbers ( $n-1, n-2, \dots$ ).

## Bibliography:

- [1] D. Popescu, C. Vraciu – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986.
- [2] V. M. Popa – *On a question of linear programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol.X (1), Sibiu, 1993.
- [3] V. M. Popa – *Aplicații și încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifazate în regimuri nesimetrice*, Referat de doctorat nr. 2, Universitatea Tehnică Cluj- Napoca, Facultatea de Electrotehnică Cluj – Napoca, 1994.
- [4] V. M. Popa- *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 38, nr. 1, 1995.



# The Order Reducing Method for Determining the Number of Discreet Unbalanced Loads

Vasile Mircea POPA

**Abstract:** The paper proposes a new method for calculating the number of equivalence classes for discreet unbalanced loads, the order reducing method. The determination of this number is a combinatorial problem of distributing  $n$  impedances ( $\mu$  classes of impedances where the class  $j$  contains  $\lambda_j$  equivalent impedances) in  $m$  phases of capacity

$l_i$ . The discreet unbalanced load is defined in this paper. The paper proposes an algebraic characterization for unbalanced discreet loads. The algebraic model is the bijection between two finite multiple sets. The number of unbalanced discreet loads is the number of equivalence classes for equivalence relation defined onto bijection set. This paper presents a method for unbalanced discreet loads number calculation. Four methods are presented and the order reducing method is detailed. The enumeration method algorithm was programmed on the electronic computer. In the paper numerical computational examples are given. At the end of the paper the conclusions and references are presented.

*Key words:*  $m$ -phased load, discreet unbalanced load, mathematical model for the discreet unbalanced load, methods for the discreet unbalanced loads calculation, order reducing method.

## 1. Introduction

We are considering an  $m$ -phased unbalanced load and the equivalent scheme in star connection (fig. 1, fig. 2).

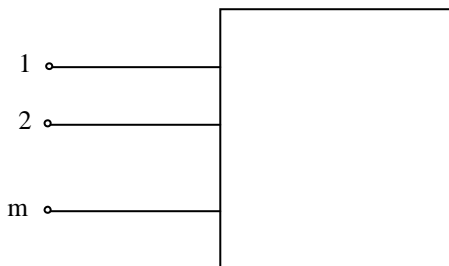


Figure 1 – A polyphasic unbalanced load

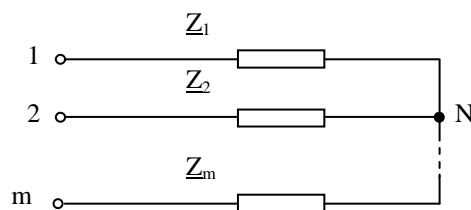


Figure 2 – Equivalent scheme in star connection

We assume that the phases are distinct between them (discernible). If the impedances from the  $m$  phases are made up (in a series) of elementary impedances (physical elements), we call the  $m$ -phased load discreet unbalanced load (DUL). [4], [5], [9]. We assume that we have  $n$  elementary impedances, namely  $\mu$  classes of different elementary impedances, the  $j$  class containing  $\lambda_j$  identical impedances, thus:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n \tag{1}$$

The  $m$  distinct phases of the load with a star connection, contain  $l_i$  elementary impedances each, with:

$$\sum_{i=1}^m l_i = n \tag{2}$$

The scheme of such a discreet unbalanced load is given in fig. 3.

We call such a discreet unbalanced load of the  $n(l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu})$  type.

We are to imply next that the discreet unbalanced

loads (DUL), which we are to consider, do belong to this type.

At the transfer of some elementary impedances from a phase to another we obtain different unbalances loads, which introduce different types of lack of balance into the network where they belong.

Particularly, some of these loads can be balanced but they can be considered as limit cases of unbalanced loads [5]

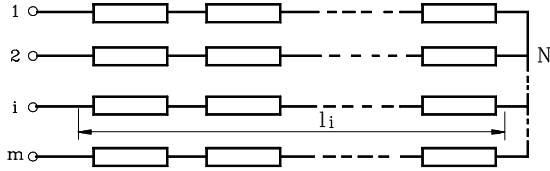


Figure 3 – Discreet unbalanced load

A question that is raised immediately is determined by the number of possible unbalanced, in other words, the number of the discreet unbalanced load. The number of the discreet unbalanced loads, which may exist, is finite and we note it:

$$N = N(\text{DUL}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} \quad (3)$$

By the  $N = N(\text{DUL})$  number calculation we use methods from the discreet mathematics, to be more exactly, from the combinatorics. [5], [2], [17], [18].

## 2. The mathematical model for DUL [6]

The mathematical model for the discreet unbalanced load is the bijection between two multiple sets [4],[5]. We take into consideration two finite sets X and Y, having the same number of elements:  $|X|=|Y|=n$ , as well as the set of bijections  $f : X \rightarrow Y$  that we note as  $Y^X$ . Let us assume an equivalence relation  $(\rho_1)$  defined on the set X, which determines a partition of the set X, where  $\mu$  equivalence classes  $X_j$  containing each  $\lambda_j$  elements, that is  $|X_j| = \lambda_j, (j=1, 2, \dots, \mu)$ . The elements of an equivalence class will be called equivalent or identical. In the same way, we consider an equivalent relation  $(\rho_2)$  defined on the set Y, which determines a partition of the set Y in m classes of equivalence,  $Y_i$  containing each  $l_i$  elements, namely  $|Y_i|=l_i (i=1, 2, \dots, m)$ . In this way, the sets X and Y become multiple sets, namely sets where the elements may repeat. Using this terminology, we may say that the set X contains  $\mu$  distinct elements, the j element repeating  $\lambda_j$  times  $(j=1, 2, \dots, \mu)$ . Likewise, for the set Y.

Now we are to consider a permutations group G of the set X that is the simple (or direct) product of the symmetrical groups of permutations for the equivalence classes elements from X [5], [2], [17], [18].

This group is noted as:  $G = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_\mu}$  and it is defined the following way: for any  $\alpha \in G, \alpha_j \in S_{\lambda_j},$

$x \in X_j,$  we have:

$$\alpha(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_\mu)(x) = \alpha_j(x) \quad (4)$$

$$(j=1, 2, \dots, \mu)$$

The definition is consistent. Due to the fact that G is a finite subset of  $S_n$ , in order that G may be a permutation group of the set X (a sub-group of the symmetric group  $S_n$ ) it is sufficient for us to check that for any  $\alpha, \alpha' \in G \Rightarrow \alpha\alpha' \in G$  (we noted  $\alpha\alpha'$  the  $\alpha$  and  $\alpha'$  permutation composition). Let  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_\mu)$  and  $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_j, \dots, \alpha'_\mu)$  be. For any  $x \in X_j,$  we get after the definition:

$$\alpha\alpha'(x) = \alpha(\alpha'(x)) = \alpha(\alpha_j(x)) = \alpha_j(\alpha_j(x)) = \alpha_j\alpha_j(x)$$

We thus obtain:

$$\alpha\alpha' = (\alpha_1\alpha'_1, \alpha_2\alpha'_2, \dots, \alpha_j\alpha'_j, \dots, \alpha_\mu\alpha'_\mu)$$

and we can observe that  $\alpha\alpha' \in G$ .

Therefore G is a permutation group of the X set. We used the finite subgroups characterisation theorem [2],[17],[18]. Thus, through this permutation group, any X element of the X set is changed into an element that belongs to the same equivalence class as X.

Analogously, we also consider the H permutation group of the Y set:

$$H = S_{l_1} \times S_{l_2} \times \dots \times S_{l_m}$$

For any  $\beta \in H, \beta_i \in S_{l_i}, y \in Y_i,$  we have:

$$\beta(y) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \dots, \beta_m)(y) = \beta_i(y) \quad (5)$$

$$(i=1, 2, \dots, m)$$

That is, through the permutation of this group, any y element of the Y set is changed into an element that belong to the same equivalence class as y.

There can be defined an equivalence relation  $(\rho)$  on the  $Y^X$  set, as follows:  $f_1 \sim f_2$  if  $\alpha \in G$  and  $\beta \in H$  exist, so that  $f_2 = \beta f_1 \alpha$ . We demonstrate that the relation defined like this is an equivalence relation on the bijections set  $f : X \rightarrow Y,$  in ratio with the G and H permutation groups.

The relation is reflexive:  $f \sim f,$  because  $f = \varepsilon_2 f \varepsilon_1,$  where  $\varepsilon_1 \in G$  and  $\varepsilon_2 \in H$  are identical permutations from the two permutation groups. The relation is symmetrical:  $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1.$  It is true that  $f_2 = \beta f_1 \alpha$  leads to  $f_1 = \beta^{-1} f_2 \alpha^{-1},$  where  $\alpha^{-1} \in G$  and  $\beta^{-1} \in H,$  fact that proves the assertion. The relation is transitive:  $f_1 \sim f_2$  and  $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3.$  That is, from  $f_2 = \beta f_1 \alpha$  and  $f_3 = \beta' f_2 \alpha'$  it results  $f_3 = \beta' \beta f_1 \alpha \alpha' = \beta'' f_1 \alpha'',$  where:  $\beta' \beta = \beta'' \in H$  and  $\alpha' \alpha = \alpha'' \in G.$

The relation  $(\rho)$  of equivalence determines a partition of the  $Y^X$  set into classes of equivalence. The number of these classes of equivalence is noted in the following way:

$$|Y^X / \rho| = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} \quad (6)$$

We notice that the setting forth of this problem is equivalent to the problem to define the discreet unbalanced load (DUL). We take into consideration n

elementary impedance ( $\mu$  impedance classes, the  $j$  class containing  $\lambda_j$  identical impedances, as  $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n$ ) and  $m$  phases, the  $i$  phase receiving  $l_i$  elementary inserted impedances, with  $\sum_{i=1}^m l_i = n$ .

The  $n$  impedances are distributed in the  $m$  phases. The number of possible distribution is:

$$N = N(\text{DUL}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} \quad (7)$$

### 3. Methods for the N(DUL) number calculation

The author of this paper has elaborated four methods for the N (DUL) number calculation. These are:

1. The enumeration method
2. The Newton type polynomials method
3. The recurrence method
4. The order reducing method.

#### 3.1. The enumeration method [7]

The enumeration method is based on the observation that the  $N$  number is equal to the solutions number of the system:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m x_{ji} = \lambda_j; & j=1, 2, \dots, \mu \\ \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i; & i=1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (8)$$

where  $\lambda_j, l_i > 0$ ;  $x_{ji} \geq 0$  are natural numbers.

This system has  $\mu m$  unknowns and  $\mu + m - 1$  independent equations (because of the conditions

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = \sum_{i=1}^m l_i = n)$$

Therefore, the non-determination degree of system is:

$$\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1) \quad (9)$$

We notice that the  $N$  number also represents the matrices number with  $\mu$  rows and  $m$  columns, containing natural numbers, where the sum of the rows, respectively of the columns, are imposed:

$n$	$l_1$	$l_2$	$\Lambda$	$l_m$
$\lambda_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	$\Lambda$	$x_{1m}$
$\lambda_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	$\Lambda$	$x_{2m}$
$M$	$M$	$M$	$\Lambda$	$M$
$\lambda_\mu$	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	$\Lambda$	$x_{\mu m}$

(10)

The enumeration method “manually” applied consists of the effective construction of the matrices of the type (10) and their counting. It is obvious that for  $n$  capital, this variant is totally unpractical. Based on the enumeration method, we made up a computer program (called the DUL program) which systematically

generates matrices of the (10) type and finally it gives the number of these matrices. The problem is reduced to the determination of the reduced matrices with  $\mu - 1$  and  $m - 1$  dimensions, where the  $x_{ji}$  variables take natural values between 0 and a maximum value and their sum is higher than or equal to the  $n - l_1 - \lambda_1$ .

We may write:

$$0 \leq x_{ji} \leq \min(\lambda_j - x_{j2} - x_{j3} - \dots - x_{j,i-1}; l_i - x_{2i} - x_{3i} - \dots - x_{j-1,i}) \quad (11)$$

$$S = \sum_{j=2}^{\mu} \sum_{i=2}^m x_{ji} \geq n - l_1 - \lambda_1 \quad (12)$$

referring to the matrix:

$$M = \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & \Lambda & x_{2i} & \Lambda & x_{2m} \\ x_{32} & x_{33} & \Lambda & x_{3i} & \Lambda & x_{3m} \\ M & & & & & \\ x_{j2} & x_{j3} & \Lambda & x_{ji} & \Lambda & x_{jm} \\ M & & & & & \\ x_{\mu 2} & x_{\mu 3} & \Lambda & x_{\mu i} & \Lambda & x_{\mu m} \end{bmatrix} \quad (13)$$

The number of the reduced matrices of the (13) type coincides with the (10) matrices number and it is exactly  $N(\text{DUL})$

A numeric example obtained:

$$G_{30(10,10,10)}^{30(10,10,10)} = 2211 \quad (14)$$

#### 3.2. The Newton type polynomials method [4]

I propose the following algorithm [4], the Newton type polynomials method.

a) We solve the polynomial:

$$P = P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} \dots P_{\lambda_\mu} \quad (15)$$

where:  $P_{\lambda_j} = P_{\lambda_j}(x_1, x_2, \dots, x_{\lambda_j})$  is a Newton type polynomial of degree  $\lambda_j$  in  $\lambda_j$  variables [1].

$$P = P(x_1, x_2, \dots, x_\lambda) \quad (16)$$

will have a:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n$$

degree and  $\lambda$  variables, where:

$$\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu).$$

b) We replace in  $P$ :

$$x_1 = y_1 + y_2 + \dots + y_m$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2$$

$M$

$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + \dots + y_m^\lambda$$

c) With the help of the multinomial theorem we calculate the coefficient of the single term  $y_1^{l_1} y_2^{l_2} \dots y_m^{l_m}$  of the expansion of  $P$ , which will be the number we are looking for.

The general polynomial of Newton type has the form:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n \\ k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0}} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! \dots n^{k_n} k_n!} \quad (17)$$

Applying the above mentioned general formula we can easily obtain the first Newton type polynomials:

$$P_1 = x_1$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$$

$$P_3 = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$$

$$P_4 = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4).$$

The algorithm that we displayed before coincides with the Pólya – de Bruijn enumeration method used in our problem case [2].

### 3.3. The recurrence method [8]

The number of the unbalanced classes for the discreet unbalanced loads can be determined with the aid of some N (DUL) numbers with lesser order.

The recurrence relations are easily deduced starting from the definition of the number N (DUL). By the decreasing order of the superior and inferior indices and the using of the symmetrical properties it was determined that:

$$\lambda_\mu = \min(l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu). \quad (18)$$

If  $\lambda_\mu = 1$ , it results:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-1(l_1, l_2, \dots, l_1-1, \dots, l_m)}^{n-1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu-1})} \quad (19)$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \quad (20)$$

in natural numbers, with  $0 \leq x_i \leq 1$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

The solutions number of this equation is:

$$|R| = c_m^1 = m \text{ (combinations with repetition)}. \quad (21)$$

If  $\lambda_\mu = 2$ , it results:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-2(l_1, l_2, \dots, l_1-2, \dots, l_m)}^{n-2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu-1})} \quad (22)$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 2 \quad (23)$$

in natural number, with  $0 \leq x_i \leq 2$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

The solutions number of this equation is:

$$|R| = c_m^2 = \frac{m(m+1)}{2}. \quad (24)$$

If  $\lambda_\mu = 3$  it results:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-3(l_1, l_2, \dots, l_1-3, \dots, l_m)}^{n-3(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu-1})} \quad (25)$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 3 \quad (26)$$

in natural numbers, with  $0 \leq x_i \leq 3$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

The number of solutions for this equation is:

$$|R| = c_m^3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}. \quad (27)$$

The list of these recurrence relations may continue, but their application becomes more and more difficult, because of the increasing of  $|R|$ .

Very simple and advantageously is the applying of the

first two recurrence relation, that is for:

$$\lambda_\mu = 1, \text{ and } \lambda_\mu = 2.$$

We illustrate the method giving an example.

Calculate the number:  $N = G_{10(3,3,2,2)}^{10(4,3,2,1)}$ .

Applying the relation (2), we obtain:

$$\begin{aligned} N &= G_{9(2,3,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,1,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} = \\ &= 2 \cdot G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + 2 \cdot G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} = 2 \cdot 109 + 2 \cdot 87 = 392 \end{aligned}$$

It is obvious that the applying of the recurrence relation for N (DUL) it is assumed the knowledge of the value for this type of inferior order numbers ( $n-1$ ,  $n-2, \dots$ ).

### 4. The order reducing method

We consider the general symbol:

$$N = N(\text{DUL}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} \quad (28)$$

If  $l_1 + \lambda_1 > n$  we may affirm that:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = G_{2n-1-\lambda_1(n-1, l_2, \dots, l_m)}^{2n-1-\lambda_1(n-1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} \quad (29)$$

and the order is reduced.

Let's consider the matrix:

$n$	$l_1$	$l_2$	$\Lambda$	$l_m$
$\lambda_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	$\Lambda$	$x_{1m}$
$\lambda_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	$\Lambda$	$x_{2m}$
$M$	$M$			
$\lambda_\mu$	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	$\Lambda$	$x_{\mu m}$

By separating the first row and the first column, we obtain the reduced matrix, of dimensions  $(\mu-1)(m-1)$ .

Let  $N_v$  be the number of cases in which the reduced matrix has the value  $v$ .

Let the symbols:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = G_n \quad (31)$$

$$G_{n-1(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n-1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = G_{n-1} \quad (32)$$

$$G_{n-2(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n-2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = G_{n-2} \quad (33)$$

$$G_{n-3(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n-3(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = G_{n-3}. \quad (34)$$

We may affirm that:

a) if  $l_1 + \lambda_1 = n$

$$G_n = G_{n-1} + N_0 \quad (35)$$

$$G_n = G_{n-2} + N_0 + N_1 \quad (36)$$

$$G_n = G_{n-3} + N_0 + N_1 + N_2 \quad (37)$$

b) if  $l_1 + \lambda_1 = n-1$

$$G_n = G_{n-1} + N_1 \quad (38)$$

$$G_n = G_{n-2} + N_1 + N_2 \quad (39)$$

c) if  $l_1 + \lambda_1 = n-2$

$$G_n = G_{n-1} + N_2 \quad (40)$$

We will now calculate the numbers  $N_v, (v=0,1,2)$ .

In the general symbol:

$$N = N(DUL) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} \quad (41)$$

we apply the symmetry property, so that  $l_1 \geq \lambda_1$ . The inferior and superior indexes are in decreasing order:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\mu \quad (42)$$

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_m. \quad (43)$$

In the set of numbers  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$ , we make the following notations:

$\alpha_1$  - the number of digits 1

$\alpha_2$  - the number of digits 2

$\dots$

$\alpha_{\mu-1}$  - the number of digits  $\mu - 1$

$\alpha_\mu$  - the number of digits  $v$  or greater then  $\mu$ .

We may affirm that:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \mu - 1 \quad (44)$$

We obtain the expressions:

$$N_0 = 1 \quad (45)$$

$$N_1 = (\mu - 1)(m - 1) \quad (46)$$

$$N_2 = \alpha_2 G_{n-1(l_2, \dots, l_m)}^{n-1(2, n-1-2)} + \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)}{2} G_{n-1(l_2, \dots, l_m)}^{n-1(1, 1, n-1-2)} \quad (47)$$

The order reducing method consists of applying the relations: (29), (35), ..., (40) and (45), (46), (47).

Similar to the recurrence method, the order reducing method for the N(DUL) number calculation assumes knowing the value of several such numbers of inferior orders.

### 5. Numerical results obtained

In the following tables are given the numbers N(DUL) for  $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$  and 7.

**Table 1 (n=1)**

1	(1)
(1)	1

**Table 2 (n=2)**

2	(2)	(1,1)
(2)	1	1
(1,1)	1	2

**Table 3 (n=3)**

3	(3)	(2,1)	(1,1,1)
(3)	1	1	1
(2,1)	1	2	3
(1,1,1)	1	3	6

**Table 4 (n=4)**

4	(4)	(3,1)	(2,2)	(2,1,1)	(1,1,1,1)
(4)	1	1	1	1	1
(3,1)	1	2	2	3	4
(2,2)	1	2	3	4	6
(2,1,1)	1	3	4	7	12
(1,1,1,1)	1	4	6	12	24

**Table 5 (n=5)**

5	(5)	(4,1)	(3,2)	(3,1,1)	(2,2,1)	(2,1,1,1)	(1,1,1,1,1)
(5)	1	1	1	1	1	1	1
(4,1)	1	2	2	3	3	4	5
(3,2)	1	2	3	4	5	7	10
(3,1,1)	1	3	4	7	8	13	20
(2,2,1)	1	3	5	8	11	18	30
(2,1,1,1)	1	4	7	13	18	33	60
(1,1,1,1,1)	1	5	10	20	30	60	120

**Table 6 (n=6)**

6	(6)	(5,1)	(4,2)	(3,3)	(4,1,1)	(3,2,1)	(2,2,2)	(3,1,1,1)	(2,2,1,1)	(2,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1)
(6)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(5,1)	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	6
(4,2)	1	2	3	3	4	5	6	7	8	11	15
(3,3)	1	2	3	4	4	6	7	8	10	14	20
(4,1,1)	1	3	4	4	7	8	9	13	14	21	30
(3,2,1)	1	3	5	6	8	12	15	19	24	38	60
(2,2,2)	1	3	6	7	9	15	21	24	33	54	90
(3,1,1,1)	1	4	7	8	13	19	24	34	42	72	120
(2,2,1,1)	1	4	8	10	14	24	33	42	58	102	180
(2,1,1,1,1)	1	5	11	14	21	38	54	72	102	192	360
(1,1,1,1,1,1)	1	6	15	20	30	60	90	120	180	360	720

**Table 7 (n=7; partial)**

7	(7)	(6,1)	(5,2)	(4,3)	(5,1,1)	(4,2,1)	(3,3,1)	(3,2,2)	(4,1,1,1)
(7)	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(6,1)	1	2	2	2	3	3	3	3	4
(5,2)	1	2	3	3	4	5	5	6	7
(4,3)	1	2	3	4	4	6	7	8	8
(5,1,1)	1	3	4	4	7	8	8	9	13
(4,2,1)	1	3	5	6	8	12	13	16	19
(3,3,1)	1	3	5	7	8	13	16	19	20

## 6. Conclusions

Therefore, the mathematical model for the discreet unbalanced load is the bijection between two multiple sets and the counting of the discreet unbalanced loads (DUL) is reduced to the bijections between two multiple sets counting [4], [5].

We also note that the defined relation for the lack of balance on the discreet loads set is an equivalence relation and the classes with lack of balance are corresponding equivalence classes.

The author of this paper has elaborated four methods for the calculation of the N (DUL) number [4], [5].

This paper presents a mathematical model for polyphasic loads unbalances classes analysis. The number N represents also the number of solutions for the system of equations:

$$\sum_{i=1}^m x_{ji} = \lambda_j; \quad \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i; \quad \lambda_j, l_i > 0; \quad x_{ji} \geq 0$$

The numbers  $x_{ji}$  are natural numbers and the numbers  $\lambda_j, l_i$  are strictly positive natural numbers. The system has  $\mu m$  unknowns (because of the equilibrium conditions).

As an application we urge the reader to check up by calculation the equalities:

$$G_{8(2,2,1,1,1)}^{8(2,2,2,1,1)} = 1548$$

$$G_{8(2,2,1,1,1,1)}^{9(3,2,2,1,1)} = 4900$$

and to formulate the according problems complying with the count of solutions both for the before system and for the matrices (10).

## References:

- [1] D. E. Knuth – “*The Art of Computer Programming*”, vol.1, Fundamentals Algorithms, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1973
- [2] I. Tomescu – “*Introduction to Combinatorics*”, Collet’s (Publishers) Limited, London and Wellingborough, England, 1975
- [3] V. M. Popa – “*On a Question of Linear Programming*”, Acta Universitatis Cibiniensis, vol.X, Sibiu, Romania, 1993
- [4] V. M. Popa – “*A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*”, Acta Electrotehnica Napocensis, vol.36, nr. 1, pg. 91-92, 1995
- [5] V. M. Popa – “*Contribuții la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicații*”, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj-Napoca, 1999
- [6] V. M. Popa – “*The Algebraic Characterization of the Discreet Unbalanced Loads*”, Acta Universitatis Cibiniensis, vol.XXXII, Technical Series, A. Electrical Engineering and Electronics, pg. 33-34, Sibiu, 1999
- [7] V. M. Popa – “*Methods for the Discreet Unbalanced Load Number Calculation*”, Acta Universitatis Cibiniensis, vol.XXXII, Technical Series, A. Electrical Engineering and Electronics, pg. 31-32, Sibiu, 1999
- [8] V. M. Popa – “*The Recurrence Method for m-Phased Loads Unbalanced Classes Number Calculation*”, Acta Universitatis Cibiniensis, vol.XXXII, Technical Series, A. Electrical Engineering and Electronics, pg. 29-30, Sibiu, 1999
- [9] V. M. Popa – “*Aplicații și încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifazate în regimuri nesimetrice*”, Referat de doctorat nr.2, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj-Napoca, 1994
- [10] V. M. Popa – “*On a Classification of the Three-Phase Loads*”, Acta Universitatis Cibiniensis, vol.XIV (2), pg. 87-90, Sibiu, 1995
- [11] V. M. Popa – “*A New Approach to be Characterized the Unbalanced Three-Phase Loads*”, Acta Universitatis Cibiniensis, vol. XIV (2), pg. 91-93, Sibiu, 1995
- [12] V. M. Popa – “*On an Analysis for the Unbalanced Loads*”, Acta Electrotehnica Napocensis, vol.36, nr.1, pg. 93-94, Cluj-Napoca, 1995
- [13] V. M. Popa – “*Using Generalized Impedances in the study of a Real Unbalanced Load*”, Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Workshop CAD in Electromagnetism and Electrical Circuits – CADEMEC 99, Cluj-Napoca, 7-9 September 1999, volume, pg. 91-94
- [14] V. M. Popa – “*A Synthesis Regarding the Study of the Real Unbalanced Load*”, Universitatea “Politehnica” din Timișoara, Analele Facultății de Inginerie din Hunedoara, Tomul II, Fascicula 2, ISSN 1454-6531, pag. 9-12, Hunedoara, 2000
- [15] V. M. Popa – “*The Study of the Real Unbalanced Load for Extreme Functioning Situations*”, Universitatea “Politehnica” din Timișoara, Analele Facultății de Inginerie din Hunedoara, Tomul II, Fascicula 2, ISSN 1454-6531, pag. 13-16, Hunedoara, 2000
- [16] E. Simion, E. Man, R. V. Ciupa, P. Roșca, V. Neamțu, V. M. Popa – “*Teoria circuitelor electrice*”, Editura Universității Tehnice Cluj-Napoca, 1996
- [17] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu – “*Bazele algebrei*”, vol. I, Editura Academiei, București, 1986
- [18] D. Popescu, C. Vraciu – “*Elemente de teoria grupurilor finite*”, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986
- [19] E. Pavel – “*Considerații privind receptoarele electrice trifazate dezechilibrate*”, ENERGA, vol.VII, pag. 194-220, Editura Tehnică, București, 1989
- [20] E. Pavel – “*Noi aspecte ale teoriei receptoarelor trifazate statice dezechilibrate*”, Energetica, vol.37, nr.11, noiembrie 1989, pag. 481-492

## Model matematic al receptorului dezechilibrat discret

Vasile Mircea Popa

### Abstract

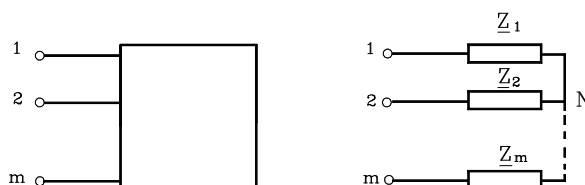
Mathematical model for the discrete unbalanced load.

This paper presents a mathematical model for a discrete unbalanced load. We are considering an  $m$ -phased unbalanced load and the equivalent scheme in star connection. We assume that the phases are distinct between them (discernable). If the impedances from the  $m$  phases are made up (in a series) of elementary impedances (physical elements), we call the  $m$ -phased load discrete unbalanced load (DUL) [1], [3], [4]. We assume that we have  $n$  elementary impedances, namely  $\mu$  classes of different elementary impedances, the  $j$  class containing  $\lambda_j$  identical impedances, thus:  $\sum \lambda_j = n$ . The  $m$  distinct phases of the load with a star connection contain  $l_i$  elementary impedances each, with:  $\sum l_i = n$ .

### 1. Introducere

Considerăm un receptor dezechilibrat  $m$ -fazat și schema echivalentă în conexiunea stea (fig. 1).

În fazele receptorului se găsesc impedanțele complexe  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_m$  și considerăm fazele



distincte (discernabile).

Fig. 1 Receptor dezechilibrat  $m$ -fazat și schema echivalentă în stea

Dacă aceste impedanțe sunt formate (prin înscriere) din impedanțe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul m-fazat receptor dezechilibrat discret (RDD) [1], [2], [3], [4].

Presupunem că avem  $n$  impedanțe elementare, anume  $\mu$  clase de impedanțe elementare diferite, clasa  $j$  conținând  $\lambda_j$  impedanțe identice, deci:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n. \quad (1)$$

Cele  $m$  faze distincte ale receptorului legat în stea conțin câte  $l_i$  impedanțe elementare, cu:

$$\sum_{i=1}^m l_i = n. \quad (2)$$

Schema unui astfel de receptor dezechilibrat discret este dată în figura 2.

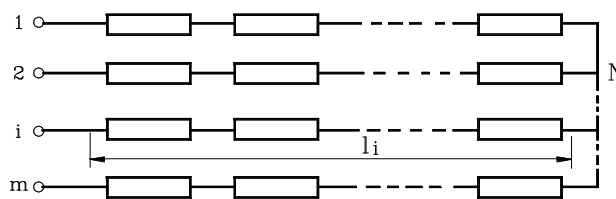


Fig. 2 Schema unui receptor dezechilibrat discret (RDD)

Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul  $n(n(l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu))$ . În cele ce urmează vom subînțelege că receptorii dezechilibrați discreți (RDD) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

La transferul unor impedanțe elementare de pe o fază pe alta se obțin receptoare dezechilibrate diferite, care introduc diverse tipuri de dezechilibre în rețeaua din care fac parte.

În particular, unele din aceste receptoare pot fi echilibrate, dar acestea pot fi considerate cazuri limită de receptoare dezechilibrate, în conformitate cu punctul de vedere evidențiat în [1].

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibrați discreți.

Numărul receptorilor dezechilibrați discreți care pot exista este finit și îl notăm :

$$N = N(\text{RDD}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}. \quad (3)$$

Pentru calculul numărului  $N=N(\text{RDD})$  se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [1], [3].



## 2. Modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret

Modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret este bijecția între două mulțimi multiple. [1], [3], [4].

Considerăm două mulțimi finite  $X$  și  $Y$  având același număr de elemente:  $|X|=|Y|=n$ , precum și mulțimea bijecțiilor  $f : X \rightarrow Y$ , mulțime pe care o notăm  $B(X, Y)$ .

Să considerăm o relație de echivalență ( $\rho_1$ ) definită pe mulțimea  $X$ , care determină o partiție a mulțimii  $X$  în  $\mu$  clase de echivalență  $X_j$  conținând câte  $\lambda_j$  elemente, adică  $|X_j| = \lambda_j$  ( $j=1,2,\dots,\mu$ ). Elementele unei clase de echivalență vor fi denumite echivalente sau identice. La fel, considerăm o relație de echivalență ( $\rho_2$ ) definită pe mulțimea  $Y$ , care determină o partiție a mulțimii  $Y$  în  $m$  clase de echivalență  $Y_i$  conținând câte  $l_i$  elemente, adică  $|Y_i| = l_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ).

În acest fel, mulțimile  $X$  și  $Y$  devin mulțimi multiple, adică mulțimi în care elementele se pot repeta. Utilizând această terminologie, putem spune că mulțimea  $X$  conține  $\mu$  elemente distincte, elementul  $j$  repetându-se de  $\lambda_j$  ori ( $j=1,2,\dots,\mu$ ). Asemănător, pentru mulțimea  $Y$  (fig. 3).

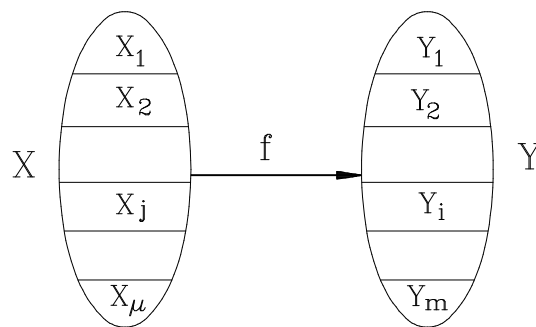


Fig. 3 Bijecția între două mulțimi multiple

Vom considera acum un grup  $G$  de permutări al mulțimii  $X$  și anume produsul simplu (sau direct) al grupurilor simetrice de permutări ale elementelor claselor de echivalență din  $X$  [1], [3], [4]. Acest grup se notează astfel:  $G = S_{\lambda_1} \cdot S_{\lambda_2} \cdot \dots \cdot S_{\lambda_\mu}$  și se definește în felul următor: pentru orice  $\alpha \in G$ ,  $\alpha_j \in S_{\lambda_j}$ ,  $x \in X_j$ , avem:

$$\alpha(x)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_\mu)(x) = \alpha_j(x), \quad j = (1, 2, \dots, \mu). \tag{4}$$

Deci, prin permutările acestui grup, orice element  $x$  al mulțimii  $X$  este transformat într-un element care aparține aceleiași clase de echivalență ca și  $x$ .

Analog, considerăm și grupul  $H$  de permutări al mulțimii  $Y$ :

$$H = S_{i_1} \cdot S_{i_2} \cdot \dots \cdot S_{i_m}$$

Pentru orice  $\beta \in H$ ,  $\beta_i \in S_{i_i}$ ,  $y \in Y_i$ , avem:

$$\beta(y) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \dots, \beta_m)(y) = \beta_i(y), \quad i = (1, 2, \dots, m). \quad (5)$$

Deci, prin permutările acestui grup, orice element  $y$  al mulțimii  $Y$  este transformat într-un element care aparține aceleiași clase de echivalență ca și  $y$ .

Se poate defini o relație de echivalență ( $\rho$ ) pe mulțimea  $B(X, Y)$ , în modul următor:  $f_1 \sim f_2$  dacă există  $\alpha \in G$  și  $\beta \in H$  astfel încât  $f_2 = \beta f_1 \alpha$ .

Se poate demonstra că relația astfel definită este o relație de echivalență pe mulțimea bijecțiilor [1].

Relația ( $\rho$ ) de echivalență determină o partiție a mulțimii  $B(X, Y)$  în clase de echivalență. Numărul acestor clase de echivalență se notează astfel:

$$|B(X, Y)/\rho| = G_{n(i_1, i_2, \dots, i_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)}. \quad (6)$$

Observăm că problema expusă mai sus este echivalentă cu problema definirii receptorului dezechilibrat discret (RDD).

Prin urmare, modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret este bijecția între două mulțimi multiple iar numărarea receptorilor dezechilibrați discreți (RDD) se reduce la numărarea bijecțiilor între două mulțimi multiple [1], [3].

De asemenea, observăm că relația de dezechilibru definită pe mulțimea receptorilor discreți este o relație de echivalență iar clasele de dezechilibru sunt clasele de echivalență corespunzătoare.

### **3. Exemplu privind structura receptorilor dezechilibrați discreți de un anumit tip**

În continuare vom considera un caz particular și anume vom determina numărul receptorilor dezechilibrați discreți de tipul  $7(3, 2, 2; 4, 3)$ . Avem:  $G_{7(3, 2, 2)}^{7(4, 3)} = 8$ .

Receptorii dezechilibrați discreți corespunzători sunt reprezentați în continuare (fig. 4).

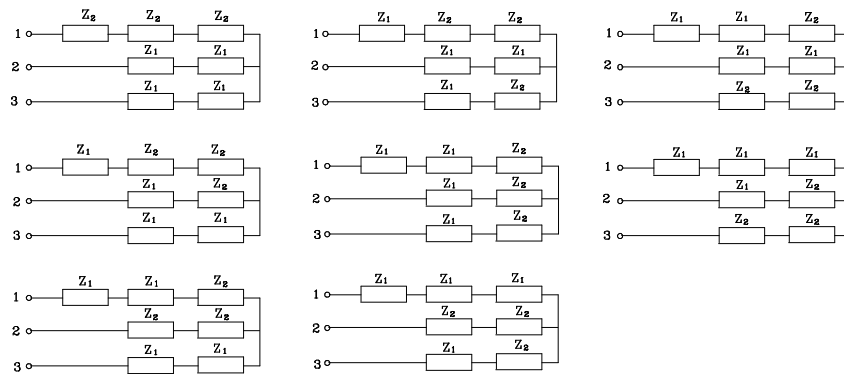


Fig. 4 Schemele receptorilor dezechilibrați discreți de tipul 7 (3, 2, 2; 4, 3)

#### 4. Algoritm de calcul pentru numărul $N=N(\text{RDD})$

Pentru calculul numărului:

$$N = N(\text{RDD}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}$$

putem utiliza algoritmul dedus în [1],[3] și pe care îl reproducem în continuare:

a) Se calculează polinomul:

$$P = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot \dots \cdot P_{\lambda_\mu},$$

unde  $P_{\lambda_i} = P_{\lambda_i}(x_1, x_2, \dots, x_{\lambda_i})$  este polinomul de tip Newton, de grad  $\lambda_i$ , în  $\lambda_i$  nedeterminate.

Deci,  $P = P(x_1, x_2, \dots, x_\lambda)$  va avea gradul  $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$  și  $\lambda$  nedeterminate, unde  $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)$ .

b) Se înlocuiește în P :

$$x_1 = y_1 + y_2 + \dots + y_m$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2$$

$$\vdots$$

$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + \dots + y_m^\lambda.$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului  $y_1^{l_1} y_2^{l_2} \dots y_m^{l_m}$  din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Polinomul general de tip Newton are forma:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n \\ k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0}} \frac{1}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! \dots n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

Aplicând formula generală de mai sus se obțin ușor primele patru polinoame de tip Newton:

$$P_1 = x_1; \quad P_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2); \quad P_3 = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3);$$

$$P_4 = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_2^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4).$$

Algoritmul expus mai sus coincide cu metoda de numărare Pólya – de Bruijn aplicată în cazul problemei noastre [1].

## 5. Concluzii

În prezenta lucrare s-a definit și apoi s-a considerat un model matematic pentru receptorul dezechilibrat discret. Relația de dezechilibru definită pe mulțimea receptorilor dezechilibrați discreți este o relație de echivalență iar clasele de dezechilibru sunt clasele de echivalență corespunzătoare. Se determină numărul claselor de dezechilibru prin metode speciale de calcul. Printr-un program de calculator elaborat în acest sens, se obține lista reprezentanților claselor de dezechilibru, deci lista receptorilor dezechilibrați discreți de un anumit tip care pot exista. Cu alte cuvinte, folosind modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret se poate studia structura receptorilor dezechilibrați de un anumit tip, se poate calcula numărul claselor de dezechilibru și se poate obține lista exhaustivă a reprezentanților claselor de dezechilibru respective. Unele aspecte ale problematicii abordate în lucrarea de față au fost inițiate în teza de doctorat a autorului și au fost dezvoltate în unele lucrări ulterioare (a se vedea lista bibliografică).

## Bibliografie

- [1] Popa V.M. – *Contribuții la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicații*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, 1999
- [2] Popa V.M. – *Program de calculator pentru analiza structurii receptoarelor dezechilibrate discrete*, Lucrările primei Conferințe tehnico-stiințifice “Profesorul Dorin Pavel-fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 8-9 iunie 2001, Volumul Tehnică și Inginerie, ISBN 973-8254-07-8, Sebeș, 2001
- [3] Popa V.M. - *The Order Reducing Method for Discreet Unbalanced Loads Number Determination*, Acta Universitatis Cibiniensis, volumul XLII, Seria Tehnică, H. Inginerie Electrică și Electronică (nivel internațional), Sibiu, 2001
- [4] Popa V.M. - *The Newton Type Polynomials Method for the Discreet Unbalanced Loads Classes Analysis*, www.roger-univ.ro, Publicații, Analele Universității Româno-Germane din Sibiu, Secțiunea Tehnică, Sibiu, 2003

# Aspecte algebrice privind receptoarele dezechilibrate discrete m-fazate

Vasile Mircea Popa

## Abstract

The paper proposes an algebraic characterisation for unbalanced discrete loads. The algebraic model is the bijection between two finite multiple sets. The number of unbalanced discrete loads is the number of equivalence classes for equivalence relation defined onto bijection set.

## 1. Introducere

Vom considera un receptor dezechilibrat m - fazat și schema echivalentă în conexiune stea. Presupunem că fazele sunt distincte între ele (discernabile). Dacă impedanțele din cele m faze sunt formate (prin înseriere) din impedanțe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul m - fazat receptor dezechilibrat discret (RDD). [3], [4].

Presupunem că avem n impedanțe elementare, anume  $\mu$  clase de impedanțe elementare diferite, clasa j conținând  $\lambda_j$  impedanțe identice, deci:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n. \quad (1)$$

Cele m faze distincte ale receptorului legat în stea conțin câte  $l_i$  impedanțe elementare, cu:

$$\sum_{i=1}^m l_i = n. \quad (2)$$

Schema unui astfel de receptor dezechilibrat discret este dată în figura 1.

Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul n ( $l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu}$ ). În cele ce urmează vom subînțelege că receptorii dezechilibrați discreți (RDD) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

La transferul unor impedanțe elementare de pe o fază pe alta se obțin receptoare dezechilibrate diferite, care introduc diverse tipuri de dezechilibre în rețeaua din care fac parte. În particular, unele din aceste receptoare pot fi echilibrate, dar acestea pot fi considerate cazuri limită de receptoare dezechilibrate [3].

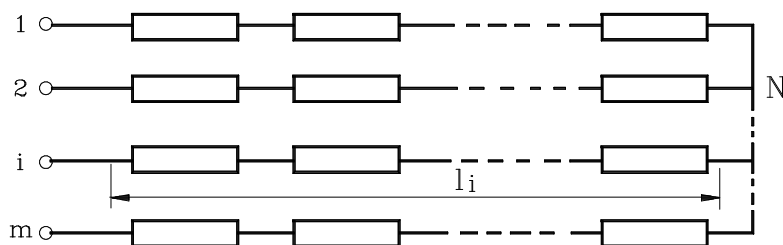


Fig.1

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibrați discreți. Numărul receptorilor dezechilibrați discreți care pot exista este finit și îl notăm:

$$N = N(\text{RDD}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} \quad (3)$$

Pentru calcul numărului  $N = N(\text{RDD})$  se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [1], [2], [3].

## 2. Modelul algebric pentru RDD

Modelul algebric pentru receptorul dezechilibrat discret este bijecția între două mulțimi multiple. [3], [4]. Considerăm două mulțimi finite  $X$  și  $Y$  având același număr de elemente:  $|X| = |Y| = n$ , precum și mulțimea bijecțiilor  $f : X \rightarrow Y$ , mulțime pe care o notăm  $Y^X$ .

Să considerăm o relație de echivalență ( $\rho_1$ ) definită pe mulțimea  $X$ , care determină o partiție a mulțimii  $X$  în  $\mu$  clase de echivalență  $X_j$  conținând câte  $\lambda_j$  elemente, adică  $|X_j| = \lambda_j$ ,  $j = (1, 2, \dots, \mu)$ . Elementele unei clase de echivalență vor fi denumite echivalente sau identice. La fel, considerăm o relație de echivalență ( $\rho_2$ ) definită pe mulțimea  $Y$ , care determină o partiție a mulțimii  $Y$  în  $m$  clase de echivalență  $Y_i$  conținând câte  $l_i$  elemente, adică  $|Y_i| = l_i$ ,  $i = (1, 2, \dots, m)$ . În acest fel, mulțimile  $X$  și  $Y$  devin mulțimi multiple, adică mulțimi în care elementele se pot repeta. Utilizând această terminologie, putem spune că mulțimea  $X$  conține  $\mu$  elemente distincte, elementul  $j$  rezezându-se de  $\lambda_j$  ori ( $j = 1, 2, \dots, \mu$ ). Asemănător, pentru mulțimea  $Y$ .

Vom considera acum un grup  $G$  de permutări al mulțimii  $X$  și anume produsul simplu (sau direct) al grupurilor simetrice de permutări ale elementelor claselor de echivalență din  $X$  [1], [2], [3].

Acest grup se notează astfel:  $G = S_{\lambda_1} \cdot S_{\lambda_2} \cdot \dots \cdot S_{\lambda_\mu}$  și se definește în felul următor: pentru orice  $\alpha \in G$ ,  $\alpha_j \in S_{\lambda_j}$ ,  $x \in X_j$ , avem:

$$\alpha(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_\mu)(x) = \alpha_j(x), \quad j = (1, 2, \dots, \mu). \quad (4)$$

Definiția este consistentă. Într-adevăr, deoarece  $G$  este o submulțime finită a lui  $S_n$ , pentru ca  $G$  să fie un grup de permutări al mulțimii  $X$  (subgrup al grupului simetric  $S_n$ ) este suficient să verificăm că pentru orice  $\alpha, \alpha' \in G \Rightarrow \alpha\alpha' \in G$  (am notat cu  $\alpha\alpha'$  compunerea permutărilor  $\alpha$  și  $\alpha'$ ). Fie  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_\mu)$  și  $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_j, \dots, \alpha'_\mu)$ . Pentru orice  $x \in X_j$ , avem conform definiției:

$$\alpha\alpha'(x) = \alpha(\alpha'(x)) = \alpha(\alpha'_j(x)) = \alpha_j(\alpha'_j(x)) = \alpha_j\alpha'_j(x).$$

Se obține deci:

$$\alpha\alpha' = (\alpha_1\alpha'_1, \alpha_2\alpha'_2, \dots, \alpha_j\alpha'_j, \dots, \alpha_\mu\alpha'_\mu),$$

și se observă că  $\alpha\alpha' \in G$ .

Prin urmare  $G$  este un grup de permutări al mulțimii  $X$ . Am utilizat teorema de caracterizare a subgrupurilor finite [1], [2]. Deci, prin permutările acestui grup, orice element  $x$  al mulțimii  $X$  este transformat într-un element care aparține aceleiași clase de echivalență ca și  $x$ .

Analog, considerăm și grupul  $H$  de permutări al mulțimii  $Y$ :

$$H = S_{l_1} \cdot S_{l_2} \cdot \dots \cdot S_{l_m}.$$

Pentru orice  $\beta \in H$ ,  $\beta_i \in S_{l_i}$ ,  $y \in Y_i$ , avem:

$$\beta(y) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \dots, \beta_m)(y) = \beta_i(y), \quad i = (1, 2, \dots, m). \quad (5)$$

Deci, prin permutările acestui grup, orice element  $y$  al mulțimii  $Y$  este transformat într-un element care aparține aceleiași clase de echivalență ca și  $y$ .

Se poate defini o relație de echivalență ( $\rho$ ) pe mulțimea  $Y^X$ , în modul următor:  $f_1 \sim f_2$  dacă există  $\alpha \in G$  și  $\beta \in H$  astfel încât  $f_2 = \beta f_1 \alpha$ . Să demonstrăm că relația astfel definită este o relație de echivalență pe mulțimea bijecțiilor  $f : X \rightarrow Y$ , în raport cu grupurile  $G$  și  $H$  de permutări.

Relația este reflexivă:  $f \sim f$ , deoarece  $f = \varepsilon_2 f \varepsilon_1$ , unde  $\varepsilon_1 \in G$  și  $\varepsilon_2 \in H$  sunt permutările identice din cele două grupuri de permutări. Relația este simetrică:  $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1$ . Într-adevăr,  $f_2 = \beta f_1 \alpha$  conduce la  $f_1 = \beta^{-1} f_2 \alpha^{-1}$ , unde  $\alpha^{-1} \in G$  și  $\beta^{-1} \in H$ , ceea ce probează afirmația. Relația este tranzitivă:  $f_1 \sim f_2$  și  $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3$ . Într-adevăr, din  $f_2 = \beta f_1 \alpha$  și  $f_3 = \beta' f_2 \alpha'$  rezultă  $f_3 = \beta' \beta f_1 \alpha \alpha' = \beta'' f_1 \alpha''$ , unde  $\beta \beta' = \beta'' \in H$  și  $\alpha \alpha' = \alpha'' \in G$ .

Relația ( $\rho$ ) de echivalență determină o partiție a mulțimii  $Y^X$  în clase de echivalență. Numărul acestor clase de echivalență se notează astfel:

$$|Y^X / \rho| = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}. \quad (6)$$

Observăm că problema expusă mai sus este echivalentă cu problema definirii receptorului dezechilibrat discret (RDD). Considerăm  $n$  impedanțe elementare ( $\mu$  clase de impedanțe, clasa  $j$  conținând  $\lambda_j$  impedanțe identice, deci  $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n$ ) și  $m$  faze, faza  $i$  primind  $l_i$  impedanțe elementare înseriate, cu  $\sum_{i=1}^m l_i = n$ . Se distribuie cele  $n$  impedanțe în cele  $m$  faze.

Numărul de distribuiri posibile este:

$$N = N(\text{RDD}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu})}. \quad (7)$$

### 3. Concluzii

Prin urmare, modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret este bijecția între două mulțimi multiple iar numărarea receptorilor dezechilibrați discreți (RDD) se reduce la numărarea bijecțiilor între două mulțimi multiple [4].

De asemenea, observăm că relația de dezechilibru definită pe mulțimea receptorilor discreți este o relație de echivalență iar clasele de dezechilibru sunt clasele de echivalență corespunzătoare. Autorul aceste lucrari a elaborat patru metode pentru calculul numărului  $N(\text{RDD})$  [3].

### Bibliografie

- [1] C. Năstăsescu , C. Niță , C. Vraciu – *Bazele algebrei*, vol. I , Editura Academiei, București, 1986
- [2] D. Popescu , C. Vraciu – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986
- [3] V. M. Popa – *Aplicații și încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifazate în regimuri nesimetrice*, Referat de doctorat nr. 2, Universitatea Tehnica Cluj - Napoca, Facultatea de Electrotehnică Cluj - Napoca, 1994
- [4] V.M. Popa – *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 38, nr. 1, 1995

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu  
 Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”  
 Catedra de Inginerie Electrică și Electronică  
 Str. Emil Cioran, nr. 4  
 Sibiu, România  
 E-mail: vasile\_mircea.popa@ulbsibiu.ro  
 Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile\_mircea.popa



# Metode pentru analiza claselor de dezechilibru ale receptoarelor m-fazate

Vasile Mircea Popa

## Abstract

This paper presents methods for m – phased loads unbalanced classes analysis. Four methods are presented and the enumeration method is detailed. The respective algorithm was programmed on the electronic computer.

## 1. Introducere

Receptorul dezechilibrat discret m - fazat de tipul  $n(l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)$  a fost definit în unele lucrări anterioare [4], [5].

Autorul prezentei lucrări a elaborat patru metode pentru calculul numărului  $N(RDD)$ . Acestea sunt:

1. Metoda enumerării
2. Metoda polinoamelor de tip Newton
3. Metoda de recurență
4. Metoda reducerii ordinului.

Metoda polinoamelor de tip Newton a fost expusă în lucrarea [4]. În continuare vom prezenta metoda enumerării.

## 2. Metoda enumerării

Această metodă se bazează pe observația că numărul  $N$  este egal cu numărul soluțiilor sistemului:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ji} = \lambda_j; & j = 1, 2, \dots, \mu \\ \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i; & i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (1)$$

unde  $\lambda_j, l_i > 0$ ;  $x_{ji} \geq 0$  sunt numere naturale.

Acest sistem are  $\mu m$  necunoscute și  $\mu + m - 1$  ecuații independente (datorită condiției  $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = \sum_{i=1}^m l_i = n$ ). Prin urmare, gradul de nedeterminare al sistemului este:

$$\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1). \quad (2)$$

Se observă că numărul  $N$  reprezintă de asemenea numărul matricilor cu  $\mu$  linii și  $m$  coloane, conținând numere naturale, la care sumele liniilor, respectiv ale coloanelor sunt impuse:

$n$	$l_1$	$l_2$	$\mathbf{K}$	$l_m$	(3)
$\lambda_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	$\mathbf{K}$	$x_{1m}$	
$\lambda_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	$\mathbf{K}$	$x_{2m}$	
$\mathbf{M}$					
$\lambda_{\mu}$	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	$\mathbf{K}$	$x_{\mu m}$	

Metoda enumerării aplicată "manual" constă în construirea efectivă a matricilor de tipul (3) și numărarea lor. Este evident că pentru  $n$  mare această variantă este total nepractică.

Pe baza metodei enumerării s-a realizat un program de calculator (numit programul RDD) care generează sistematic matrici de tipul (3) și în final dă numărul acestor matrici. Problema se reduce la determinarea matricilor reduse de dimensiuni  $\mu - 1$  și  $m - 1$ , în care variabilele  $x_{ji}$  iau valori naturale cuprinse între 0 și o valoare maximă iar suma lor este mai mare sau egală decât numărul  $n - l_1 - \lambda_1$ .

Putem scrie :

$$0 \leq x_{ji} \leq \min(\lambda_j - x_{j2} - x_{j3} - \dots - x_{j,i-1}; l_i - x_{2i} - x_{3i} - \dots - x_{j-1,i}) \quad (4)$$

$$S = \sum_{j=2}^{\mu} \sum_{i=2}^m x_{ji} \geq n - l_1 - \lambda_1 \quad (5)$$

cu referire la matricea :

$$M = \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & \mathbf{K} & x_{2i} & \mathbf{K} & x_{2m} \\ x_{32} & x_{33} & \mathbf{K} & x_{3i} & \mathbf{K} & x_{3m} \\ \mathbf{M} & & & & & \\ x_{j2} & x_{j3} & \mathbf{K} & x_{ji} & \mathbf{K} & x_{jm} \\ \mathbf{M} & & & & & \\ x_{\mu 2} & x_{\mu 3} & \mathbf{K} & x_{\mu i} & \mathbf{K} & x_{\mu m} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Numărul matricilor reduse de tipul (6) coincide cu numărul matricilor (3) și este deci chiar  $N(\text{RDD})$ .

Câteva exemple numerice obținute:

$$G_{8(3,2,1,1,1)}^{8(2,2,2,1,1)} = 618 \quad (7)$$

$$G_{9(3,2,2,1,1)}^{9(3,2,2,1,1)} = 1173 \quad (8)$$

$$G_{9(2,2,2,1,1,1)}^{9(3,3,1,1,1)} = 1980 \quad (9)$$

$$G_{10(2,2,2,2,2)}^{10(3,3,2,2)} = 1830 \quad (10)$$

$$G_{10(5,2,2,1)}^{10(2,2,2,1,1,1,1)} = 1875 \quad (11)$$

$$G_{10(5,2,1,1,1)}^{10(2,2,2,1,1,1,1)} = 3510 \quad (12)$$

$$G_{30(10,10,10)}^{30(10,10,10)} = 2211 \quad (13)$$

Programul RDD permite obținerea numerelor  $N(\text{RDD})$  în timpi variind de la o fracțiune de secundă la câteva minute, în cazul valorilor mari (de ordinul milioane). Utilizând metoda enumerării, respectiv programul de calculator RDD, s-au calculat toate valorile lui  $N(\text{RDD})$  pentru  $n \leq 10$ . Tabelele cu numerele  $N(\text{RDD})$  sunt date în lucrarea [5].

Tabelele conțin numerele claselor de dezechilibru pentru receptori dezechilibrați discreți de tipul  $n(l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)$ . Numărul  $n$  este notat în colțul din stânga-sus al fiecărui tabel. Indicii inferiori sunt marcați în partea stângă a tabelului, sub forma  $(l_1, l_2, \dots, l_m)$ . Indicii superiori sunt marcați în partea superioară a tabelului, sub forma  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)$ . La intersecția liniei și a coloanei respective se citește numărul  $N=N(\text{RDD})$ .

Tabelele sunt exhaustive și prezintă simetrie față de diagonala principală, datorită proprietății de simetrie.

Marele avantaj al utilizării programului de calculator este posibilitatea calculării unor numere  $N(\text{RDD})$  pentru un  $n$  oarecare, când nu dispunem de tabelele cu numerele  $N(\text{RDD})$  pentru  $n-1$ ,  $n-2$ , ... (necesare pentru metoda recursivă). În acest caz, comparația cu una din metodele manuale de calcul (metoda enumerării, metoda polinoamelor de tip Newton, metoda de recurență, metoda reducerii ordinului) evidențiază avantajul absolut, incontestabil al utilizării programului de calculator.

## Bibliografie

[1] D. Popescu, C. Vraciu – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986

[2] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu – *Bazele algebrei*, vol. I, Editura Academiei, București, 1986

[3] V. M. Popa – *On a Question of Linear Programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol. X (1), Sibiu, 1993, pag. 65 – 67

[4] V.M. Popa – *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 36, nr. 1, Cluj – Napoca, 1995, pag. 91 – 92

[5] V. M. Popa – *Contribuții la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicații*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj-Napoca, 1999

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu  
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”  
Catedra de Inginerie Electrică și Electronică  
Str. Emil Cioran, nr. 4  
Sibiu, România  
E-mail: [vasile\\_mircea.popa@ulbsibiu.ro](mailto:vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro)  
Web: [webspaces.ulbsibiu.ro/vasile\\_mircea.popa](http://webspaces.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa)

# Metodă recursivă pentru determinarea numărului receptoarelor dezechilibrate discrete

Vasile Mircea Popa

## Abstract

The paper proposes a recursive method for unbalanced discrete loads number calculation. The numbers  $N$  (RDD) can be determined recursively, using recurrence relations. At the end of the paper a numerical computational example is presented.

## 1. Introducere

Vom considera un receptor dezechilibrat  $m$ -fazat și schema echivalentă în conexiune stea. Presupunem că fazele sunt distincte între ele (discernabile). Dacă impedanțele din cele  $m$  faze sunt formate (prin înseriere) din impedanțe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul  $m$ -fazat receptor dezechilibrat discret (RDD) [3], [4].

Presupunem că avem  $n$  impedanțe elementare, anume  $\mu$  clase de impedanțe elementare diferite, clasa  $j$  conținând  $\lambda_j$  impedanțe identice, deci:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n. \quad (1)$$

Cele  $m$  faze distincte ale receptorului legat în stea conțin câte  $l_i$  impedanțe elementare, cu:

$$\sum_{i=1}^m l_i = n. \quad (2)$$

Schema unui astfel de receptor dezechilibrat discret este dată în figura 1.

Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul  $n(l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)$ . În cele ce urmează vom subînțelege că receptorii dezechilibrați discreți (RDD) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

La transferul unor impedanțe elementare de pe o fază pe alta se obțin receptoare dezechilibrate diferite, care introduc diverse tipuri de dezechilibre în rețeaua din care fac parte. În particular, unele din aceste receptoare pot fi echilibrate, dar acestea pot fi considerate cazuri limită de receptoare dezechilibrate [4].

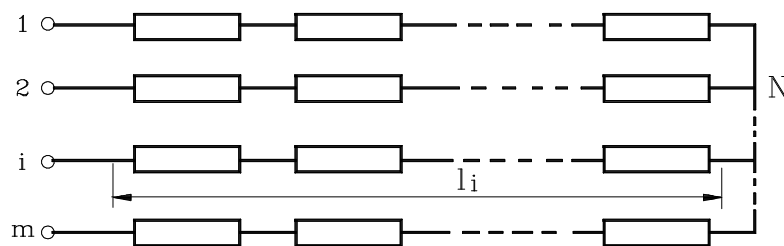


Fig.1

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibrați discreți. Numărul receptorilor dezechilibrați discreți care pot exista este finit și îl notăm :

$$N = N(\text{RDD}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}. \quad (3)$$

Pentru calcul numărului  $N = N(\text{RDD})$  se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [1], [2], [4].

În prezenta lucrare va fi expusă metoda recursivă pentru calculul numărului  $N(\text{RDD})$  al receptoarelor dezechilibrate discrete.

## 2. Metoda recursivă (de recurență)

Numărul claselor de dezechilibru pentru receptoarele dezechilibrate discrete se poate determina cu ajutorul unor formule de recurență. Acestea permit calculul numărului  $N(\text{RDD})$  de ordin  $n$  cu ajutorul unor numere  $N(\text{RDD})$  de ordine mai mici. Formulele de recurență se deduc ușor, pornind de la definiția numărului  $N(\text{RDD})$ . Prin ordonarea descrescătoare a indicilor superiori și inferiori și utilizarea proprietății de simetrie facem ca :

$$\lambda_{\mu} = \min(l_1, l_2, \dots, l_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \quad (4)$$

a) dacă  $\lambda_{\mu} = 1$ , avem:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu})} = \sum_R G_{n-1(l_1, l_2, \dots, l_1-1, \dots, l_m)}^{n-1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu-1})} \quad (5)$$

unde  $R$  este mulțimea soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \quad (6)$$

în numere naturale, cu  $0 \leq x_i \leq 1$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Numărul soluțiilor acestei ecuații este:

$$|R| = c_m^1 = m \text{ (combinări cu repetiție)}. \quad (7)$$

b) Dacă  $\lambda_{\mu} = 2$ , avem:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu})} = \sum_R G_{n-2(l_1, l_2, \dots, l_1-2, \dots, l_m)}^{n-2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu-1})} \quad (8)$$

unde  $R$  este mulțimea soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 2 \quad (9)$$

în numere naturale, cu  $0 \leq x_i \leq 2$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Numărul soluțiilor acestei ecuații este:

$$|R| = c_m^2 = \frac{m(m+1)}{2}. \quad (10)$$

c) Dacă  $\lambda_{\mu} = 3$ , avem:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu})} = \sum_R G_{n-3(l_1, l_2, \dots, l_1-3, \dots, l_m)}^{n-3(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu-1})} \quad (11)$$

unde  $R$  este mulțimea soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 3 \quad (12)$$

în numere naturale, cu  $0 \leq x_i \leq 3$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Numărul soluțiilor acestei ecuații este:

$$|R| = c_m^3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}. \quad (13)$$

Lista acestor formule de recurență poate fi continuată, dar aplicarea lor devine tot mai grea, datorită creșterii lui  $|R|$ .

Foarte simplă și avantajoasă este aplicarea primelor două formule de recurență, deci pentru  $\lambda_\mu = 1$  și  $\lambda_\mu = 2$ .

Vom ilustra metoda printr-un exemplu.

Să se calculeze numărul  $N = G_{10(3,3,2,2)}^{10(4,3,2,1)}$ .

Aplicând formula (5) obținem:

$$\begin{aligned} N &= G_{9(2,3,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,1,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} = 2 \cdot G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + 2 \cdot G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} = \\ &= 2 \cdot 109 + 2 \cdot 87 = 392 \end{aligned}$$

Este evident că aplicarea metodei de recurență pentru  $N(\text{RDD})$  presupune cunoașterea valorii unor astfel de numere de ordine inferioare ( $n-1$ ,  $n-2$ , ...).

## Bibliografie

- [1] D. Popescu , C. Vraciu – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986
- [2] V.M. Popa – *On a Question of Linear Programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol. X (1), Sibiu, 1993, pag. 65-67
- [3] V.M. Popa – *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 36, nr. 1, Cluj-Napoca, 1995, pag. 91-92
- [4] V.M. Popa – *Contribuții la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicații*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj-Napoca, 1999

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu  
 Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”  
 Catedra de Inginerie Electrică și Electronică  
 Str. Emil Cioran, nr. 4  
 Sibiu, România  
 E-mail: vasile\_mircea.popa@ulbsibiu.ro  
 Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile\_mircea.popa



# O metodă de reducere pentru calculul numărului receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate

Vasile Mircea Popa

## Abstract

A Reducing Method for the m-Phased Discreet Unbalanced Loads Number Calculation

The paper proposes a new method for calculating the number of equivalence classes for discreet unbalanced loads, the order reducing method. The discreet unbalanced load is defined in this paper. This paper presents a method for unbalanced discreet loads number calculation. Four methods are presented and the reducing method is also detailed. At the end of the paper the conclusions and references are presented.

## 1. Introducere

Considerăm un receptor dezechilibrat m-fazat și schema echivalentă în conexiunea stea (fig. 1).

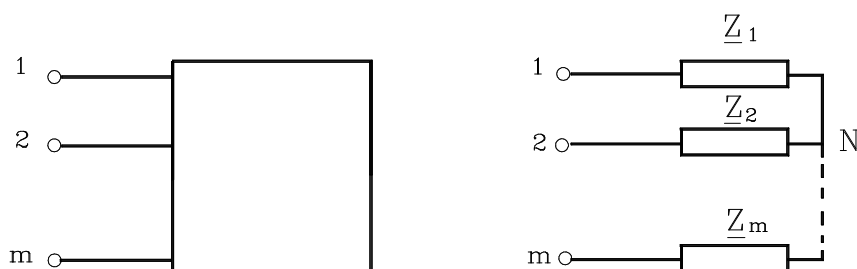


Fig. 1. Receptor dezechilibrat m-fazat și schema echivalentă în stea

În fazele receptorului se găsesc impedanțele complexe  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_m$  și considerăm fazele distincte (discernabile).

Dacă aceste impedanțe sunt formate (prin înseriere) din impedanțe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul m-fazat receptor dezechilibrat discret (RDD) [4], [5], [6].

Presupunem că avem  $n$  impedanțe elementare, anume  $\mu$  clase de impedanțe elementare diferite, clasa  $j$  conținând  $\lambda_j$  impedanțe identice, deci:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n. \quad (1)$$

Cele  $m$  faze distincte ale receptorului legat în stea conțin câte  $l_i$  impedanțe elementare, cu:

$$\sum_{i=1}^m l_i = n. \quad (2)$$

Schema unui astfel de receptor dezechilibrat discret este dată în figura 2.

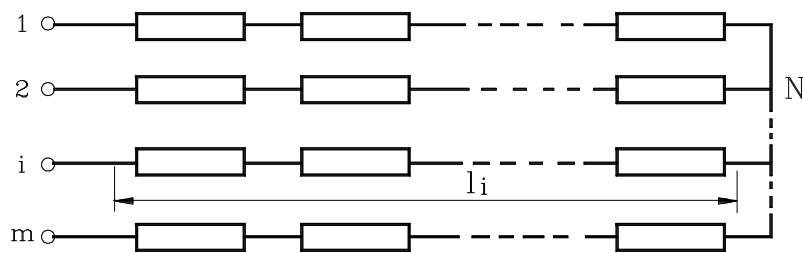


Fig.2. Schema unui receptor dezechilibrat discret (RDD)

Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul  $n$  ( $l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$ ). În cele ce urmează vom subînțelege că receptorii dezechilibrați discreți (RDD) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

La transferul unor impedanțe elementare de pe o fază pe alta se obțin receptoare dezechilibrate diferite, care introduc diverse tipuri de dezechilibre în rețeaua din care fac parte.

În particular, unele din aceste receptoare pot fi echilibrate, dar acestea pot fi considerate cazuri limită de receptoare dezechilibrate, în conformitate cu punctul de vedere evidențiat în lucrarea [5].

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibrați discreți.

Numărul receptorilor dezechilibrați discreți care pot exista este finit și îl notăm:

$$N = N(\text{RDD}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}. \quad (3)$$

Pentru calcul numărului  $N = N(\text{RDD})$  se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [4], [5].

## 2. Metode pentru calculul numărului $N(\text{RDD})$

Autorul prezentei lucrări a elaborat patru metode pentru calculul numărului  $N(\text{RDD})$ . Acestea sunt:

1. Metoda enumerării [5], [6]
2. Metoda polinoamelor de tip Newton [4]
3. Metoda de recurență [5]
4. Metoda reducerii ordinului.

Primele trei metode sunt dezvoltate în referințele bibliografice indicate.

În continuare vom prezenta metoda reducerii ordinului.

### 3. O metodă de reducere a ordinului

Considerăm simbolul general:

$$N = N(\text{RDD}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} \quad (4)$$

Dacă  $l_1 + \lambda_1 > n$ , putem afirma că:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = G_{2n-l_1-\lambda_1(n-l_1, l_2, \dots, l_m)}^{2n-l_1-\lambda_1(n-l_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} \quad (5)$$

și ordinul este redus.

Să considerăm matricea:

n	l <sub>1</sub>	l <sub>2</sub>	Λ	l <sub>m</sub>	(6)
λ <sub>1</sub>	x <sub>11</sub>	x <sub>12</sub>	Λ	x <sub>1m</sub>	
λ <sub>2</sub>	x <sub>21</sub>	x <sub>22</sub>	Λ	x <sub>2m</sub>	
M	M				
λ <sub>μ</sub>	x <sub>μ1</sub>	x <sub>μ2</sub>	Λ	x <sub>μm</sub>	

Separând primul rând și prima coloană, obținem matricea redusă, de dimensiuni  $(\mu - 1)(m - 1)$ .

Fie  $N_v$  numărul de cazuri în care matricea redusă ia valoarea  $v$  (suma elementelor).

Fie simbolurile:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = G_n \quad (7)$$

$$G_{n-1(l_1-1, l_2, \dots, l_m)}^{n-1(\lambda_1-1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = G_{n-1} \quad (8)$$

$$G_{n-2(l_1-2, l_2, \dots, l_m)}^{n-2(\lambda_1-2, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = G_{n-2} \quad (9)$$

$$G_{n-3(l_1-3, l_2, \dots, l_m)}^{n-3(\lambda_1-3, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = G_{n-3} \quad (10)$$

Putem afirma că:

-dacă  $l_1 + \lambda_1 = n$

$$G_n = G_{n-1} + N_0 \quad (11)$$

$$G_n = G_{n-2} + N_0 + N_1 \quad (12)$$

$$G_n = G_{n-3} + N_0 + N_1 + N_2 \quad (13)$$

-dacă  $l_1 + \lambda_1 = n - 1$

$$G_n = G_{n-1} + N_1 \quad (14)$$

$$G_n = G_{n-2} + N_1 + N_2 \quad (15)$$

-dacă  $l_1 + \lambda_1 = n - 2$

$$G_n = G_{n-1} + N_2 \quad (16)$$

Vom calcula numerele  $N_v$ , ( $v = 0, 1, 2$ ).

În simbolul general:

$$N = N(\text{RDD}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} \quad (17)$$

aplicăm proprietatea de simetrie, astfel încât  $l_1 \geq \lambda_1$ . Indicii inferiori și superiori sunt în ordine descrescătoare:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\mu \quad (18)$$

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_m \quad (19)$$

În mulțimea de numere  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$ , facem următoarele notații:

$\alpha_1 =$  numărul de cifre 1;  $\alpha_2 =$  numărul de cifre 2; ...,  $\alpha_{v-1} =$  numărul de cifre  $v-1$ ,  $\alpha_v =$  numărul de cifre  $v$  sau mai mari decât  $v$ .

$$\text{Putem afirma că: } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \mu - 1 \quad (20)$$

$$\text{Obținem expresiile: } N_0 = 1 \quad (21)$$

$$N_1 = (\mu - 1)(m - 1) \quad (22)$$

$$N_2 = \alpha_2 G_{n-1}(l_2, \dots, l_m)^{n-1(2, n-1-2)} + \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)}{2} G_{n-1}(l_2, \dots, l_n)^{n-1(1, 1, n-1-2)}. \quad (23)$$

Metoda reducerii ordinului constă în aplicarea relațiilor: (5), (11), ..., (16) și (21), (22), (23).

Similar cu metoda de recurență, metoda reducerii ordinului pentru calculul numerelor  $N(\text{RDD})$  presupune cunoașterea valorilor unor asemenea numere de ordin inferior.

#### 4. Concluzii

Dintre metodele “manuale” de calcul, deosebit de practice sunt formulele de reducere a ordinului pentru  $l_1 + \lambda_1 > n$ ;  $l_1 + \lambda_1 = n$ ;  $l_1 + \lambda_1 = n - 1$ . Deci, 3 formulele de calcul simple cu care se pot calcula din aproape în aproape orice tabele cu numere  $N(\text{RDD})$ , bazându-ne pe cele existente (anterioare, cu  $n$  mai mic).

#### Bibliografie

- [1] Popescu, D., Vraciu, C. – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986
- [2] Năstăsescu, C., Niță, C., Vraciu, C. – *Bazele algebrei*, vol. I, Editura Academiei, București, 1986
- [3] Popa, V. M. – *On a Question of Linear Programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol. X (1), Sibiu, 1993, pag. 65 – 67
- [4] Popa, V. M. – *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 36, nr. 1, Cluj - Napoca, 1995, pag. 91 – 92
- [5] Popa, V. M. – *Contribuții la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicații*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj - Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj - Napoca, 1999
- [6] Popa, V. M. – *Program de calculator pentru analiza structurii receptoarelor dezzechilibrate discrete*, Lucrările primei conferințe tehnico-științifice “Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, volumul Tehnică și Inginerie, pag. 121-126, Sebeș, 8-10 iunie 2001

# Analiza asistată de calculator a receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate

Vasile Mircea Popa

## Abstract

The Computer Aided Analysis of the m-Phased Discreet Unbalanced Loads

The paper proposes a computer program for calculating the number of equivalence classes for discreet unbalanced loads. The determination of this number is a combinatorial problem of distributing  $n$  impedances ( $\mu$  classes of impedances where the class  $j$  contains  $\lambda_j$  equivalent impedances) in  $m$  phases of capacity  $l_i$ . The enumeration method algorithm was programmed on the electronic computer. In the paper numerical computational examples are given.

## 1. Introducere

Considerăm un receptor dezechilibrat m-fazat și schema echivalentă în conexiunea stea. În fazele receptorului se găsesc impedanțele complexe  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_m$  și considerăm fazele distincte (discernabile). Dacă aceste impedanțe sunt formate (prin înseriere) din impedanțe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul m-fazat receptor dezechilibrat discret (RDD). [4], [5], [6].

Presupunem că avem  $n$  impedanțe elementare, anume  $\mu$  clase de impedanțe elementare diferite, clasa  $j$  conținând  $\lambda_j$  impedanțe identice. Cele  $m$  faze distincte ale receptorului legat în stea conțin câte  $l_i$  impedanțe elementare. Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul  $n(l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)$ . În cele ce urmează vom subînțelege că receptorii dezechilibrați discreți (RDD) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibrați discreți.

Numărul receptorilor dezechilibrați discreți care pot exista este finit și îl notăm :

$$N = N(\text{RDD}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}. \quad (1)$$

Pentru calcul numărului  $N = N(\text{RDD})$  se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [4], [5].

## 2. Metode pentru analiza receptoarelor dezechilibrate discrete

Autorul prezentei lucrări a elaborat patru metode pentru calculul numărului  $N(\text{RDD})$ . Acestea sunt:

1. Metoda enumerării
2. Metoda polinoamelor de tip Newton
3. Metoda de recurență
4. Metoda reducerii ordinului.

În continuare vom prezenta metoda enumerării.

Această metodă se bazează pe observația că numărul  $N$  este egal cu numărul soluțiilor

$$\text{sistemului: } \begin{cases} \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = \lambda_j; & j = 1, 2, \dots, \mu \\ \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i; & i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (2)$$

unde  $\lambda_j, l_i > 0$ ;  $x_{ji} \geq 0$  sunt numere naturale.

Acest sistem are  $\mu m$  necunoscute și  $\mu + m - 1$  ecuații independente (datorită condiției  $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = \sum_{i=1}^m l_i = n$ ). Prin urmare, gradul de nedeterminare al sistemului este:

$$\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1) \quad (3)$$

Se observă că numărul  $N$  reprezintă de asemenea numărul matricilor cu  $\mu$  linii și  $m$  coloane, conținând numere naturale, la care sumele liniilor, respectiv ale coloanelor sunt impuse:

$$\begin{array}{c|cccc} n & l_1 & l_2 & K & l_m \\ \hline \lambda_1 & x_{11} & x_{12} & K & x_{1m} \\ \lambda_2 & x_{21} & x_{22} & K & x_{2m} \\ M & & & & \\ \lambda_\mu & x_{\mu 1} & x_{\mu 2} & K & x_{\mu m} \end{array} \quad (4)$$

Metoda enumerării aplicată "manual" constă în construirea efectivă a matricilor de tipul (4) și numărarea lor. Este evident că pentru  $n$  mare această variantă este total nepractică.

## 3. Analiză asistată de calculator

Pentru valori mari ale lui  $n$ , calculul numărului  $N(\text{RDD})$  prin metodele arătate anterior este dificil.

Pe baza metodei enumerării s-a realizat un program de calculator (numit programul RDD) care generează sistematic matrici de tipul (4) și în final dă numărul acestor matrici. Problema se reduce la determinarea matricilor reduse de dimensiuni  $\mu - 1$  și  $m - 1$ , în care variabilele  $x_{ji}$  iau valori naturale cuprinse între 0 și o valoare maximă iar suma lor este mai mare sau egală decât numărul  $n - l_1 - \lambda_1$ .

Putem scrie :

$$0 \leq x_{ji} \leq \min(\lambda_j - x_{j2} - x_{j3} - \dots - x_{j,i-1}; l_i - x_{2i} - x_{3i} - \dots - x_{j-1,i}) \quad (5)$$

$$S = \sum_{j=2}^{\mu} \sum_{i=2}^m x_{ji} \geq n - l_1 - \lambda_1 \quad (6)$$

cu referire la matricea:

$$M = \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & K & x_{2i} & K & x_{2m} \\ x_{32} & x_{33} & K & x_{3i} & K & x_{3m} \\ M & & & & & \\ x_{j2} & x_{j3} & K & x_{ji} & K & x_{jm} \\ M & & & & & \\ x_{\mu 2} & x_{\mu 3} & K & x_{\mu i} & K & x_{\mu m} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Numărul matricilor reduse de tipul (7) coincide cu numărul matricilor (4) și este deci chiar  $N(\text{RDD})$ .

În continuare vom prezenta câteva rezultate numerice obținute utilizând programul de calculator RDD. Primele cinci rezultate ar putea fi obținute și prin una din metodele “manuale” de calcul.

$G_{8(3,2,1,1,1)}^{8(2,2,2,1,1)} = 618$	$G_{9(3,2,2,1,1)}^{9(3,2,2,1,1)} = 1173$
$G_{9(2,2,2,1,1,1)}^{9(3,3,1,1,1)} = 1980$	$G_{10(2,2,2,2,2)}^{10(3,3,2,2)} = 1830$
$G_{10(5,2,2,1)}^{10(2,2,2,1,1,1,1)} = 1875$	$G_{30(10,10,10)}^{30(10,10,10)} = 2211$

Ecranul programului RDD este prezentat în figura 1:

```

INTRODUCETI DIMENSIUNILE MATRICII:
Numarul de linii:      5
Numarul de coloane:   5

INTRODUCETI PARAMETRII:
n = 15

INTRODUCETI COMPONENTELE PE LINII
la1 = 5
la2 = 4
la3 = 2
la4 = 2
la5 = 2

INTRODUCETI COMPONENTELE PE COLDANE
l1 = 7
l2 = 3
l3 = 2
l4 = 2
l5 = 1

NUMARUL DE DEZECHILIBRE POSIBILE ESTE
G
  [n = 15] [5 linii]
  [n = 15] [5 coloane] = 14981

Continuati? [d/n]

```

Fig. 1 Ecranul programului RDD (ecranul de lucru)

Programul RDD permite obținerea numerelor  $N(\text{RDD})$  în timp variind de la o fracțiune de secundă la câteva minute, în cazul valorilor mari (de ordinul milioane). Utilizând metoda enumerării, respectiv programul de calculator RDD, s-au calculat toate valorile lui  $N(\text{RDD})$  pentru  $n \leq 10$ . Tabelele cu numerele  $N(\text{RDD})$  sunt date în lucrarea [5]. Tabelele conțin numerele claselor de dezechilibru pentru receptori dezechilibrați discreți de tipul  $n(l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)$ . Numărul  $n$  este notat în colțul stânga-sus al fiecărui tabel. Indicii

inferiori sunt marcați în partea stângă a tabelelor, sub forma  $(l_1, l_2, \dots, l_m)$ . Indicii superiori sunt marcați în partea superioară a tabelelor, sub forma  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)$ .

La intersecția liniei și a coloanei respective se citește numărul  $N=N(\text{RDD})$ .  
Tabelele sunt exhaustive și prezintă simetrie față de diagonala principală.

## 4. Concluzii

Numerele  $N = N(\text{RDD})$  sunt cu atât mai “simple” (mai mici și mai ușor de calculat) cu atât ordinul  $n$  este mai mic. Din acest motiv, tabelele s-au calculat în ordinea prezentată, adică începând cu  $n = 1$ , continuând cu  $n = 2$  ș.a.m.d. până la  $n = 10$ . Dintre metodele “manuale” de calcul, deosebit de practice sunt formulele de recurență pentru  $\lambda_\mu = 1$  și  $\lambda_\mu = 2$  și formulele de reducere a ordinului pentru  $l_1 + \lambda_1 > n$ ;  $l_1 + \lambda_1 = n$ ;  $l_1 + \lambda_1 = n - 1$ . Deci, 5 formulele de calcul simple cu care se pot calcula din aproape în aproape orice tabel, bazându-ne pe cele existente (anterioare). Totuși un astfel de calcul „manual” al primelor 10 tabele cu numerele  $N(\text{RDD})$  necesită circa 40 de ore de calcul.

Programul de calculator RDD, scris în limbajul C și rulat pe un calculator AMD K7 750 MHz, 128 MB memorie RAM și 20 GB pentru HDD permite efectuarea aceluiași calcul în circa 8 ore (aici este evident inclus și timpul necesar introducerii datelor). Marele avantaj al utilizării programului de calculator este posibilitatea calculării unor numere  $N(\text{RDD})$  pentru un  $n$  oarecare, când nu dispunem de tabelele cu numerele  $N(\text{RDD})$  pentru  $n-1$ ,  $n-2$ , ... (necesare pentru metoda recursivă). În acest caz, comparația cu una din metodele manuale de calcul (metoda enumerării, metoda polinoamelor de tip Newton, metoda de recurență, metoda reducerii ordinului) evidențiază avantajul absolut, incontestabil al utilizării programului de calculator.

Programul de calculator RDD, cu o minimă modificare, permite și afișarea structurii receptoarelor dezechilibrate discrete prin intermediul matricii reprezentative (4).

## Bibliografie

- [1] Popescu, D., Vraciu, C. – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986.
- [2] Năstăsescu, C., Niță, C., Vraciu, C. – *Bazele algebrei*, vol. I, Editura Academiei, București, 1986.
- [3] Popa, V. M. – *On a Question of Linear Programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol. X (1), Sibiu, 1993, pag. 65 – 67.
- [4] Popa, V. M. – *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 36, nr. 1, Cluj - Napoca, 1995, pag. 91 – 92.
- [5] Popa, V. M. – *Contribuții la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicații*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj - Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj - Napoca, 1999.
- [6] Popa, V. M. – *Program de calculator pentru analiza structurii receptoarelor dezechilibrate discrete*, Lucrările primei conferințe tehnico-științifice “Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, volumul Tehnică și Inginerie, pag. 121-126, Sebeș, 8-10 iunie 2001.



## ANEXA



**Tabel**  
**care indică unde au mai fost publicate articolele.**

<b>Articolul</b>	<b>Unde a mai fost publicat</b>
A Mathematical Model for Unbalanced Classes Analysis of Polyphasic Loads.	International Workshop in Electrotechnics, Cluj-Napoca, 17-20 august 1995, Acta Electrotehnica Napocensis, vol.36, nr. 1, ISSN 1224-2497, pag. 91-92.
The Algebraic Characterization of Discreet Unbalanced Loads.	Acta Universitatis Cibiniensis, vol. XXXII , Technical series, A. Electrical Engineering and Electronics, ISSN 1221-4930, Sibiu, 1999, pag. 33-34.
Methods for Calculating the Number of Discreet Unbalanced Loads.	Acta Universitatis Cibiniensis, vol. XXXII, Technical series, A. Electrical Engineering and Electronics, ISSN 1221-4930, Sibiu, 1999, pag. 31-32.
The Recurrence Method for Calculating the Unbalanced Classes Number of m-Phased Loads.	Acta Universitatis Cibiniensis, vol. XXXII, Technical series, A. Electrical Engineering and Electronics, ISSN 1221-4930, Sibiu, 1999, pag. 29-30.
The Order Reducing Method for Determining the Number of Discreet Unbalanced Loads.	Acta Universitatis Cibiniensis, vol. XLVI, Technical series, H. Electrical Engineering and Electronics, ISSN 1221-4949, Sibiu, 2001, (nivel internațional), pag. 61-66.
Model matematic al receptorului dezechilibrat discret.	Lucrările celei de A VIII-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 30-31 mai 2008; Volumul „Știință și Inginerie” (vol. 13), ISBN 973-8130-82-4, pag. 229-234.
Aspecte algebrice privind receptoarele dezechilibrate discrete m-fazate.	Sesiunea de comunicări științifice a Universității “Petru Maior”, Târgu Mureș, 27-28 octombrie 2000, Volumul 7, Electroenergetică, ISBN 973-8084-19-9, pag. 197-200.
Metode pentru analiza claselor de dezechilibru ale receptorilor m-fazate.	Sesiunea de comunicări științifice a Academiei Forțelor Terestre “Nicolae Bălcescu”, TEHNOMIL 2001, Sibiu, 27 aprilie 2001, Volum, Electronică și Electrotehnică, ISBN 973-8088-48-8, pag. 103-106.
Metodă recursivă pentru determinarea numărului receptorilor dezechilibrate discrete.	Sesiunea de comunicări științifice a Academiei Forțelor Terestre “Nicolae Bălcescu”, TEHNOMIL 2001, Sibiu, 27 aprilie 2001, Volum, Electronică și Electrotehnică, ISBN 973-8088-48-8, pag. 107-110.

O metodă de reducere pentru calculul numărului receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate.	A III-a Sesiune de Comunicări Științifice cu participare internațională, Hunedoara, 4-5 octombrie 2001; Universitatea "Politehnica" din Timișoara, Analele Facultății de Inginerie din Hunedoara, Tomul III, Fascicola 2, ISSN 1454-6531, pag. 44-47.
Analiza asistată de calculator a receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate.	A III-a Sesiune de Comunicări Științifice cu participare internațională, Hunedoara, 4-5 octombrie 2001; Universitatea "Politehnica" din Timișoara, Analele Facultății de Inginerie din Hunedoara, Tomul III, Fascicola 2, ISSN 1454-6531, pag. 48-51.

## BIBLIOGRAFIE

- [A1] Abuelma'atti, M.T. - *Simple method for calculating Fourier coefficients of experimentally obtained waveforms*; IEE Proc. - Sci.Meas.Technol., Vol.141, No.3, May 1994, pp.177-178
- [A2] Akherraz, M. - *Pspice - Assisted Dynamic Modeling and Simulation of Induction Motor Drives*; 1997 IEEE International Electric Machines and Drives Conference Record, May 18-21, 1997, pp. MB1, 8.1-8.3
- [A3] Akpinar, K., Pillay, P., Richards, G.G. - *Induction motor drive behavior during unbalanced faults*; Electric Power Systems Research, Vol.36, No.2, February 1996, pp. 131-137
- [A4] Albu, T., Ion, I.D. - *Itinerar în algebra superioară*, Editura All, București, 1997
- [A5] Amin, B. - *Contribution to iron-loss evaluation in electrical machines*; *European Transactions on Electrical Power Engineering*, Vol.5, No.5, Sep.-Oct. 1995, pp.325-332
- [A6] Amin, B. - *Slot - Based Equations and General Equivalent Circuit in Induction Motor-Analysis and Control*; ETEP, Vol.5, No.6, November/December 1995, pp.375-382
- [A7] Arkhangelskii, N.L., Kurnyshev, B.S., Zakharov, P.A. - *A tensor approach to the electromagnetic analysis of an induction motor*; *Electrical Technology*, Selected Translations from Elektrichestvo, No.1, 1995, pp.75-83
- [B1] Benamrouche, N., Haddad, S., Bousbaine, A., Low, W.F.- *Determination of iron and stray load losses in induction motors using a thermometric method*; *Electric Machines and Power Systems*, Vol.26, No.1, January 1998, pp.3-12
- [B2] Benes, J. - *Sisteme cibernetice cu organizare automată*, Editura Tehnică, București, 1970
- [B3] Bercovici, M., Arie, A., Tudose, M. - *Aspecte privind aplicarea teoriei componentelor simetrice în analiza regimurilor nesimetrice ale rețelelor electrice*; *Buletinul Institutului Politehnic București*, tomul XXIX, numărul 4, iulie-august 1967, pag.101-131
- [B4] Berndt, M.M., Schmitz, N.L. - *Derating of Polyphase Induction Motors Operated with Unbalanced Line Voltages*; *IEEE Trans. Power App. Syst.*, February 1963, pp.680-686

- [B5] Blasko, V., Kaura, V. - *A new mathematical model and control of a three-phase AC-DC voltage source converter*; *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol.12, No.1, jan.1997, pp.116-123
- [B6] Bogoevici, N., Toader, D. - *Utilizarea fazorilor de nesimetrie în analiza rețelelor electrice trifazate nesimetrice și dezechilibrate*; *Energetica*, Vol.41., nr.4-B, 1993, pag.29-34
- [B7] Bonacina, G., Salvetti, M., Zola, M. - *Structural testing of electromechanical equipment - Mathematical modeling and experimentation*; *A.E.I. Automazione Energia Informazione*, Vol.85, No.3, march 1998
- [B8] Bose, B.K., Patel, N.R. - *Quasi-fuzzy estimation of stator resistance of induction motor*, *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol.13, no.3, May 1998, pp.401-409
- [B9] Boys, J.T. - *Theoretical Spectra for Narrow-Band Random PWM Waveforms*; *IEE Proceedings - B, Electric Power Applications*, Vol.140, No.6, November 1993
- [B10] Brice, C.W., Dougal, R.A., Hudgins, J.K. - *Review of technologies for current-limiting low-voltage circuit breakers*; *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol.32, no.5, September-October 1996, pp.1005-1010
- [B11] Brittain, J.E.- *Charles L.G. Fortescue and the method of symmetrical components*, *Proceeding of the IEEE*, Vol.86, no.5, May 1998, pp.1020-1025
- [B12] Bromilow, M. - *Computer algebra and applied mathematics*; *IEE Review*, Vol.43, No.5, sept.1997, pp.259-267
- [B13] Busch, R. - *About the concept of consumed life of electrical machine windings and its application*, *European Transaction on Electrical Power*, Vol.8, no.2, March-April 1998, pp.105-110
- [C1] Caramia, P., Carpinelli, G., Gagliari, F., Verde, P. - *Analysis and Design of a Combined System of Shunt Passive and Active Filters*; *European Transactions on Electrical Power Engineering*, Vol.4, No.2, Mar.-Apr. 1994
- [C2] Castello, R., Montecchi, F., Rezzi, F., Baschiroto, A. - *Low - voltage analog filters*; *IEEE Transactions on Circuits and Systems I, Fundamental Theory and Applications*, Vol.42, No.11, November 1995, pp.827-840
- [C3] Cavallini, A., Loggini, M., Montanari, G.C. - *Comparison of Approximate Methods for Estimate Harmonic Currents Injected by AC/DC Converters*; *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol.41, No.2, april 1994, pp.256-262

- [C4] Cerovsky, Z., Seinsch, H.O. - *Time Dependence and Symmetrical Properties of Rotor - Currents of Induction Machines Fed from U-Converters with Block - Waveform*; Archiv fur Elektrotechnik, Vol.77, No.2, January 1994
- [C5] Cherry, J.A., Snelgrove, W.M. - *On the characterization and reduction of distortion in bandpass filters*, IEEE Transactions on Circuits and System I, Vol.45, no.5, May 1998, pp.523-537
- [C6] Ciupa, R.V., Croicu, A.M. - *The Optimization of an Electromagnet by the Gradient Method*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 36, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1995, pag. 75-77
- [C7] Ciupa, R.V. - *Regimuri tranzitorii în sisteme electrice*, Editura Universității Tehnice Cluj-Napoca, 1996
- [C8] Ciupa, R.V., Croicu, A.M. - *Optimization in Electrotechnics trough the Descending Methods. Examples; Proceedings of the 1<sup>st</sup> International Workshop CAD in Electromagnetism and Electrical Circuits*, CADEMEC 97, 5-7 August 1997, Cluj-Napoca, Romania, Volume, pag. 102-107.
- [C9] Ciupa, R.V. , Topa, V. - *The Theory of Electric Circuits*, Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 1998
- [C10] Ciupa, R.V. - *Regimuri tranzitorii în sisteme electrice*, ediția a-II-a, Editura Universității Tehnice Cluj-Napoca, 1998
- [C11] Clarke, E. - *Analiza circuitelor sistemelor electroenergetice* (traducere selectivă din limba engleză -S.U.A.), Editura Tehnică, București, 1973
- [C12] Coloși, T., Feștilă, R., Nascu, I., Raica, P. - *Modelling and numerical simulation alternative of induction motors in d-q axes*; Proceedings, First International Symposium on Advanced Electromechanical Motion Control Systems ELECTROMOTION'95, Cluj-Napoca, 25-26 May 1995, Volume, pp.116-119
- [C13] Cristaldi, L., Ferrero, A. - *Mathematical foundations of the instantaneous power concepts: An algebraic approach*; European Transaction on Electrical Power, Vol.6, No.5, sep.-oct. 1996, pp.305-309
- [C14] Czarnecki, L.S., Tan, O.T. - *Evaluation and Reduction of Harmonic Distortion Caused by Solid State Voltage Controllers of Induction Motors*; IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol.9, No.3, September 1994, pp.528-534

- [C15] Czarnecki, L.S. - *Power theory of electrical circuits with quasi-periodic waveforms of voltages and currents*; European Transaction on Electrical Power, Vol.6, No.5, sep.-oct. 1996, pp.321-328
- [C16] Czarnecki, L.S. - *Budeanu and Fryze: Two frameworks for interpreting power properties of circuits with nonsinusoidal voltages and currents*; Electrical Engineering, Vol.80, No.6, december 1997, pp.359-368
- [D1] De Jong, H.C.J. - *Skew Leakage in Induction Machines*; European Transactions on Electrical Power Engineering, Vol.4, No.1, January-February 1994
- [D2] De Jong, H.C.J. - *Scale aspects of electrical machine inductances*; *International Journal of Electrical Engineering Education*, Vol.32, No.2, April 1995, pp.179-185
- [D3] Dems, M., Komez, K., Wiak, S. - *Computation of rotor winding power losses in squirrel-cage induction motor*; COMPEL, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol.14, No.4, December 1995, pp.89-93
- [D4] Dessouky, Y.G., Williams, B.W., Fletcher, J.E. - *Cooling enhancement of electric motors*, IEE Proceedings Electric Power Applications, Vol.145, No.1, January 1998, pp.57-60
- [D5] De Weerd, R., Hameyer, K., Belmans, R. - *End winding leakage calculation of a squirrel-cage induction motor for different load conditions*; COMPEL, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol.14, No.4, December 1995, pp.85-89
- [D6] Ding, K.Q., Zhou, Z.G., Liu, C.T. - *Latin hypercube sampling used in the calculation of the fracture probability*, Reliability Engineering & Sistem Safety, Vol.59, no.2, February 1998, pp.239-242
- [D7] Dogaru, O., Tevy, I., Udriste, C. - *Extrema constrained by a family of curves and local extrema*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.97, no.3, June 1998, pp.605-622
- [D8] Dordea, T. - *Maşini electrice*, Editura Didactică și Pedagogică, Bucureşti, 1970
- [D9] Dragomir, A., Laziun, V. - *Teorie combinatorie. Elemente de combinatorică clasică și generalizată*, Editura Universităţii din Timișoara, 1974
- [D10] Dragomir, A., Dragomir, P. - *Structuri algebrice*, Editura Facla, Timișoara, 1981



- [D11] Drăgănescu, O.G. - *Încercările mașinilor electrice rotative*, Editura Tehnică, București, 1987
- [D12] Dupre, L.R., Vankeer, R., Melkebeek, J.A.A. - *A computational model for the iron losses in rotating electrical machines*; International Journal of Engineering Science, Vol.36, no.7-8, May-June 1998, pp. 699-710
- [D13] Duric, M., Radojevic, Z., Skokljek, I., Terzija, V. - *A simple algorithm for the symmetrical components relaying and monitoring*; Electrical Engineering, Vol.79, 1996
- [E1] Eldhemy, S.A., Mohamed, A.A., Shokralla, S.S. - *Calculation of additional losses caused by feeding an induction motor from a nonsinusoidal supply*; International Journal of Electrical Engineering Education, Vol.32, No.1, January 1995, pp.51-63
- [E2] El Din, A.S.Z., Lashine, A.E., Shokralla, S.S. - *Improvement of starting characteristic and speed control of three-phase induction motor using microprocesor*; Electric Machines and Power Systems, Vol.26, No.3, April 1998, pp.265-276
- [E3] Emanuel, A.E. - *The oscillatory nature of the power in single - and polyphase circuits*, European Transactions on Electrical Power, Vol.6, No.5, Sep.-Oct. 1996, 315-320
- [E4] Enns, M.K. - *Neutral impedances in fault analysis*; IEEE Transactions on Power Systems, Vol.13, no.2, May 1998, pp.274-279
- [F1] Fabre, A., Saaid, O., Wiest, F., Boucheron, C.- *Current controlled bandpass filter based on translinear conveyors*; Electronics Letters, Vol.31, No.20, September 1995, pp.1727-1728
- [F2] Faiz, J., Sharifian, M.B.B. - *Transient behaviour of optimum - designed three-phased squirrel-cage induction motors*; European Transactions on Electrical Power, Vol.7, No.6, Nov.-Dec. 1997, pp. 415-420
- [F3] Farag, S.F., Bartheld, R.G., May, W.E. - *Electronically Enhanced Low Voltage Motor Protection and Control*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.30, No.3, May/June 1994, pp.776-784
- [F4] Fiser, R., Ferkolj, S. - *Magnetic field analysis of induction motor with rotor faults*; COMPEL The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol.17, no.1-2, 1998, pp.206-211
- [F5] Fransua, A., Nicolaide, A., Trifu, G. - *Mașini electrice uzuale. Exploatare și regimuri de funcționare*, Editura Tehnică, București, 1973

- [F6] Fransua, A., Măgureanu, R. - *Mașini și acționări electrice. Elemente de execuție*, Editura Tehnică, București, 1986
- [G1] Gafford, B.N., Duesterhoeft, W.C., Mosher, C.C. - *Heating of Induction Motors on Unbalanced Voltages*, AIEE Transactions Power Applications Systems, June 1959, pp. 282-288
- [G2] Galan, N. - *Considerații privind teoria moderna a mașinii asincrone trifazate*; Electrotehnica, Electronica, Automatica, Electronica, Vol.38, Nr.8, noiembrie 1990, pag.295-299
- [G3] Galan, N. - *Ecuatiile generale ale motorului asincron trifazat aplicate în regimuri nesimetrice*; Electrotehnica, Electronica, Automatica, Electrotehnica, Vol.38, Nr.8, noiembrie 1990, pag.300-305
- [G4] Ghani, S.N. - *Digital Computer Simulation of Three-Phase Induction Machine Dynamics - A Generalized Approach*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.24, No.1, January/February 1988, pp.106-114
- [G5] Gheorghiu, I.S., Fransua, A.S. - *Tratat de mașini electrice, Vol.III, Mașini asincrone*, Editura Academiei R.S.R., București, 1971
- [G6] Glazenko, A.V., Danilevich, Y.B., Karymov, A.A. - *Digital modelling of thermal and mechanical processes in electrical machines*; Electrical Technology, Selected Translations from Elektrichestvo, No.4, 1995, pp.123-134
- [G7] Gluskin, E. - *On the Calculation of Ripple Factor*; ETEP, Vol.5, No.6, November/December 1995, pp.413-414
- [G8] Goode, P.V., Chow, M. - *Using a Neuronal Fuzzy System to Extract Heuristic Knowledge of Incipient Faults in Induction Motors: Part I - Methodology*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.42, No.2, April 1995, pp.131-138
- [G9] Goode, P.V., Chow, M. - *Using a Neuronal / Fuzzy System to Extract Heuristic Knowledge of Incipient Faults in Induction Motors: Part II - Application*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.42, No.2, April 1995, pp.139-146
- [G10] Green, T.C., Taha, M.H., Rahim, A.B.D., Williams, B.W. - *Three-phase step-down reversible AC-DC power converter*; IEEE Transactions on Power Electronics, Vol.12, No.2, March 1997, pp.319-324
- [G11] Grimes, C.A., Grimes, D.M. - *Complex power in circuits with multiple reactive elements*, Electric Machines and Power Systems, Vol.25, No.9, Nov. 1997, pp.955-966

- [G12] Grotzbach, M., Xu, J. - *Line-Side Behaviour of 3-Phase Diode Rectifiers with Reactance Smoothing*; European Transactions on Electrical Power Engineering, Vol.4, No.1, Jan-Feb. 1994
- [H1] Holtz, J. - *The representation of AC machine dynamics by complex signal flow graphs*; IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 42, No. 3, June 1995, pp. 263 - 272
- [H2] Ho, S.L., Fu, W.N. - *Review and future application of finite element methods in induction motors*; Electric Machines and Power Systems, Vol. 26, No. 2, February - March 1998, pp.111 - 126
- [I1] Ionescu, T.G., Coculescu, S., Neagoe, M., Pavel, E. - *Regimul nesimetric generator de consumuri proprii tehnologice suplimentare în rețelele electrice*; Energetica, Vol.XXXVI, Nr.9, septembrie 1988, pag.404 - 411
- [I2] Ionescu, T.G., Golovanov, C., Manolescu, P., Oprea, R. - *Metode de determinare a coeficientului de nesimetrie inversă de tensiune*; Energetica, Vol. XXXVIII, Nr. 8 - 9, august - septembrie 1990, pag. 371 - 376
- [I3] Ion, I.D., Niță, C., Năstăsescu, C. - *Complemente de algebră*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1984
- [J1] Joaquim, M. B. - *A bandpass active filter for Fourier analysis laboratory*; International Journal of Electrical Engineering Education, Vol. 32, No.4, October 1995, pp. 350 - 354
- [K1] Karacal, S.C. - *A novel approach to simulation modeling*, Computers & Industrial Engineering, Vol.34, no.3, July 1998, pp.573-588
- [K2] Kaufmann, A., Précigout, M. - *Elemente de teoria mulțimilor și algebră modernă*, Vol I, Editura Tehnică, București, 1972
- [K3] Kaufmann, A., Précigout, M. - *Elemente de teoria mulțimilor și algebră modernă*, Vol II, Editura Tehnică, București, 1973
- [K4] Keerthipala, W. W. L., Wai, C. T., Huisheng, W. - *Neuronal network based classifier for power system protection*; Electric Power Systems, Vol. 42, No. 2, august 1997, pp. 109 - 114
- [K5] Kellerer, H., Kotov, V., Speranza, M.C., Tuza, Z. - *Semi on-line algorithms for the partition problem*, Operations Research Letters, Vol.21, no.5, December 1997, pp.235-242

- [K6] Kluszczyński, K., Miksiewicz, R. - *Synchronous parasitic torques in asymmetrically fed three - phase squirrel cage motor*; Electric Machines and Power Systems, Vol. 24, No. 1, January - February 1996, pp. 9- 20
- [K7] Knopp, M., Kohle, S. - *Time - varying loads in electric power systems; Power input, equivalent circuit elements, and disturbances*, European Transactions on Electrical Power, Vol. 7, No.1, January - February 1997, pp. 5 - 12
- [K8] Knuth, D.E. - *Tratat de programarea calculatoarelor, vol I - Algoritmi fundamentali*, Editura Tehnică, București, 1974
- [K9] Knuth, D.E. - *Tratat de programarea calculatoarelor, vol II - Sortare și căutare*, Editura Tehnică, București, 1976
- [K10] Knuth, D.E. - *Tratat de programarea calculatoarelor, vol III - Algoritmi seminumerici*, Editura Tehnică, București, 1983
- [L1] Labuntsov, V. A., Daizhun, C. - *Three - phase rectifier with a capacitance filter and an improved waveform for the current drawn from the network*; Electrichestvo, No. 2, 1993
- [L2] Lawrance, W. B. , Mielczarski, W. - *Harmonic Current Reduction in a Three - Phase Diode Bridge Rectifier*; IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 39, No. 6, December 1992, pp. 571 - 576
- [L3] Lawrance, W. , Mielczarski, W., Michalik, G. - *Application of a new scheme for harmonic current reduction in three - phase bridge rectifier systems*; Electric Power Research, Vol. 36, No. 2, February 1996, pp. 123 – 130
- [L4] Lee, C.Y. – *Temperature-based optimal test sequence for determining the equivalent circuit parameters of a three-phase induction motor*, Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol.21, no.4, July 1998, pp.459-466
- [L5] Levi, E., Krzeminski, Z. - *Main Flux - Saturation Modelling in d-q Axis Models of Induction Machines Using Mixed Current - Flux State - Space Models*; ETEP, Vol. 6, No. 3, May - June 1996, pp.207 – 215
- [L6] Lian, J.A. – *Orthogonality criteria for multiscaling functions*, Applied and Computational Harmonic Analysis, Vol.5, no.3, July 1998, pp.277-311
- [L7] Lim, T.J. – *A stochastic regime switching model for the failure process of a repairable system*, Reliability Engineering & System Safety, Vol.59, no.2, February 1998, pp.225-238

- [L8] Lin, B.R., Hoft, R.G. - *Analysis of power converter control using neural network and rule - based methods*; Electric Machines and Power Systems, Vol. 24, No. 7, October - November 1996, pp. 695 – 720
- [L9] Lin, K.P., Lin, M.H., Lin, T.P. – *An advanced computer code for single-tuned harmonic filter design*, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.34, no.4, July-August 1998, pp.640-648
- [L10] Loggini, M., Montanari, G. C., Cavallini, A. - *Generation of Uncharacteristic Harmonics in Electrical Plants with AC/DC Converters*; European Transactions on Electrical Power Engineering, Vol.4, No. 3, May - June 1994
- [M1] Maier, R. - *Protection of Squirrel-Cage Induction Motor Utilizing Instantaneous Power and Phase Information*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.28, No.2, March/April 1992, pp.376-380
- [M2] Man, E., Rizzo, R., Micu, D., Munteanu, D. - *A Simultaneous Treatment of Symmetrization and Power Factor Improvement in Three-Phased Networks*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 36, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1995, pag. 50- 52.
- [M3] Man, E., Pop, E. - *Impedance Adaptation and Negative Resistance Synthesis, using Controlled Sources*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 37, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1996, pag. 21 - 24
- [M4] Man, E. - *Circuite electrice cu surse comandate*, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, 1996
- [M5] Man, E. - *A Generalization of the Maximum Power Transfer Theorem In DC Circuits*; Proceedings of the 1<sup>st</sup> International Workshop CAD in Electromagnetism and Electrical Circuits CADEMEC 97, CLuj-Napoca, 5-7 August 1997, Volume, pp.91-93
- [M6] Man, E., Hintea, S. - *Analiza circuitelor electrice prin modelare cu surse comandate*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 1997
- [M7] Mattavelli, P., Tenti, P. - *Load and line identification in multi-phase systems: A compensation-oriented approach*; European Transaction on Electrical Power, Vol.6, No.6, November-December 1996, pp.373-379
- [M8] Mbamalu, G.A.N., El Hawary, M.E., El Hawary, F. - *Pseudo inverse based probabilistic power flow approach*; Electric Machines and Power Systems, Vol.23, No.2, March-April 1995, pp.107-119

- [M9] Micu, D., Oniga, A. - *Componente simetrice pentru sisteme polifazate*; Conferința Națională de Matematică Aplicată și Mecanică, Cluj-Napoca, 20-23 octombrie 1988
- [M10] Micu, D. - *Basis of Electrotechnics. The theory of electric circuits*, Technical University of Cluj-Napoca, 1993.
- [M11] Micu, D., Rizzo, R., Man, E. - *A Study on Polyphase Machine Fed by Non Symmetrical Voltage System*, Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 36, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1995, pag. 53 - 57
- [M12] Micu, D., Rizzo, R., Man, E. - *Polyphase Machine Fed by Non Symmetrical System. Fault Detection in Case of Bar Breakage in Three-Phase Motors*, Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 36, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1995, pag. 58 - 61
- [M13] Micu, D., Micu, A., Vlad, S. - *A Dissipative Singlephase-Threephase Convertor*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 37, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1996, pag. 57 - 60
- [M14] Mielczarski, W., Lawrance, W.B., Nowaki, R., Holmes, D.G. - *Harmonic Current Reduction in Three-Phase Bridge-Rectifier Circuits Using Controlled Current Injection*; IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.44, No.5, October 1997, pp.604-611
- [M15] Mihalache, M. – *Determinarea parametrilor interni ai motorului asincron utilizând datele de catalog: Electrotehnica, Electronica, Automatica, Electrotehnica*, vol. 34, nr. 6, august 1986, pag. 261-264.
- [M16] Milenko, D. B. - *Determining symmetric components by a method of four samples (power system analysis)*, Elektrichestvo, No. 9, September 1992, pp. 50-51
- [M17] Mocanu, C.I. - *Teoria circuitelor electrice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979
- [M18] Modran, L., **Popa, V.M.**, Crăciunaș, G., Spătar, O. – *Electrotehnică și electronică*, Editura Meteor, Sibiu, 1998
- [M19] Moshchinskii, Y. A., Osin, I. L. - *Determination of three-phase induction motor parameters from an asymmetric supply test*, Elektrichestvo, Nr. 1, 1993
- [N1] Nakagawa, S., Niki, N., Hashiguchi, H. – *Computer algebra application to the distribution of sample correlation coefficient*, Mathematics and Computers in Simulation, Vol.45, no.1-2, January 1998, pp.23-32
- [N2] Năstăsescu, C., Niță, C., Vraciu, C. - *Bazele algebrei*, Vol.I, Editura Academiei, București, 1986

- [N3] Neamțu, V. - *Circuite electrice în regim permanent sinusoidal și nesinusoidal - culegere de probleme*, Editura Universității Tehnice Cluj-Napoca, 1996
- [N4] Nedelcu, V.N. - *Regimurile de funcționare ale mașinilor de curent alternativ*, Editura Tehnică, București, 1968
- [N5] Nedelcu, V.N. - *Teoria conversiei electromecanice*, Editura Tehnică, București, 1978
- [N6] Nilsson, W.J. - *Electric Circuits*, Fourth Edition, Addison Wesley Co., Iowa State University, 1993
- [O1] Oberretl, K. - *Tooth breakage and tooth forces in asynchronous motors*; Electrical Engineering, Vol.80, No.5, October 1997, pp.309-324
- [O2] Ostovic, V. - *Computer-aided Analysis of Electric Machines*, Prentice Hall, New York, 1994
- [P1] Palco, S. - *Structural optimisation of an induction motor using a genetic algorithm and a finite element*; Acta Polytechnica Scandinavica, Electrical Engineering Series, No.84, 1996, pp.2-99
- [P2] Pană, T. - *MATLAB în sisteme de acționare electrică*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 1996
- [P3] Pană, T. - *MATLAB Application Toolbox, Electrical Drives - Induction Motor*, Mediamira Science Publisher, Cluj-Napoca, 1997
- [P4] Pandurangavittal, K., Fakmddin, D.B., Rao, I. R. , Parthasarathy, K. - *Microcontroller based three-phase induction motor protection relay with operator selectable thermal I-T curve feature*; Electric Machines and Power Systems, Vol.26, No.1, January 1998, pp.13-26
- [P5] Pavel, E., Ionescu, T.G. - *Efectele consumatorilor nesimetrice asupra rețelelor electrice*; Energetica, Vol.XXXIV, Nr.10, octombrie 1986, pag.457-459
- [P6] Pavel, E. - *Receptoare trifazate dezechilibrate. Caracteristic și particularități de funcționare în regimuri stabilizate*; Energetica, Vol.XXXVI, Nr.6, iunie 1988, pag.241-249
- [P7] Pavel, E. - *Considerații privind receptoarele electrice trifazate dezechilibrate*, ENERGETICA, Vol.VII, Editura Tehnică, București, 1989, pag.194-220
- [P8] Pavel, E. - *Noi aspecte ale teoriei receptoarelor trifazate statice dezechilibrate*; Energetica, Vol.37, Nr.11, noiembrie 1989, pag.481-492
- [P9] Perahia, J., Nayar, C.V. - *Analysis of a series - delta connected tandem induction motor*; Electric Machines and Power Systems, Vol.23, No.2, March-April 1995, pp.221-230

- [P10] Pillay, P., Sabur, S.M.A., Haq, M.M. - *A model for induction motor aggregation for power system studies*; Electric Power Systems, Vol.42, No.3, September 1997, pp.225-228
- [P11] Pillay, P., Nolan, R., Haque, T. - *Application of genetic algorithms to motor parameter determination for transient torque calculations*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.33, No.5, September-October 1997, pp.1273-1282
- [P12] Pinto, J.A.D., Coimbra, A.P., Antunes, C.L., Fernandez, X.M.L., Donsion, M.P. - *Influence of the neutral in the thermal performance of a three-phase induction motor under unbalanced power supply using the finite element approach*, COMPEL, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol.17, no.1-2, 1998, pp.378-382
- [P13] **Popa, V.M.** - *Unele generalizări în combinatorică*; Buletinul Științific al Institutului de Învățământ Superior Sibiu, Vol.III, Sibiu, 1980, pag.33-39
- [P14] **Popa, V.M.**, Diaconescu, C. - *Noi cercetări privind protecția motoarelor asincrone*; Buletinul Științific al Institutului de Învățământ Superior Sibiu, Vol.IV, 1981, pag.244-247
- [P15] **Popa, V.M.**, *Asupra numărării bijecțiilor între două mulțimi multiple*; Gazeta Matematică - Perfecționare metodică și metodologică în matematică și informatică, Vol.VII, Nr.2, București, 1986, pag.78-81
- [P16] **Popa, V.M.** - *Asupra unei probleme de algebră*; Astra Matematică, Vol.1, Nr.1, Sibiu, 1990, pag.29-31
- [P17] **Popa, V.M.** - *On a question of linear programming*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.X (1), Sibiu, 1993, pag.65-67
- [P18] **Popa, V.M.** - *Unele aspecte privind caracterizarea circuitelor trifazate dezechilibrate*; Referat de doctorat nr.1, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, octombrie 1993
- [P19] **Popa, V.M.** - *Aplicații și încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifazate în regimuri nesimetrice*; Referat de doctorat nr.2, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, octombrie 1994
- [P20] **Popa, V.M.** - *On a classification of the three-phase loads*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XIV (2), Sibiu, 1995, pag.87-90
- [P21] **Popa, V.M.** - *A new approach to be characterized the unbalanced three-phase loads*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XIV (2), Sibiu, 1995, pag.91-93



- [P22] **Popa, V.M.**, Buduriși, C., Garcia Moreno, E. - *Some Aspects about the Analysis of a Three-Phase Non-Symmetrical Alimentated Bridge with Thyristors*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol.36, Nr.1, Cluj-Napoca, 1995, pag.42-44
- [P23] **Popa, V.M.** - *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol.36, Nr.1, Cluj-Napoca, 1995, pag.91-92
- [P24] **Popa, V.M.** - *On an Analysis for the Unbalanced Loads*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol.36, Nr.1, Cluj-Napoca, 1995, pag.93-94
- [P25] **Popa, V.M.** - *Considerații privind comportarea circuitelor electrice în regimuri nesimetrice de funcționare*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XX, Sibiu, 1995, pag.129-134
- [P26] **Popa, V.M.** - *Considerations Upon a Relay of Protecting Asynchronous Three-Phase Motors*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol.37, No.1, Cluj-Napoca, 1996, pag.61-62
- [P27] **Popa, V.M.**, Roșca, P. - *Electrotehnică*, Editura Universității “Lucian Blaga”, Sibiu, 1996
- [P28] **Popa, V.M.** - *Electrotehnică - îndrumar de laborator*, Editura Universității “Lucian Blaga”, Sibiu, 1996
- [P29] **Popa, V.M.** – *Aspecte energetice privind alimentarea receptorilor dezechilibrați*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XXVIII, Sibiu, 1998
- [P30] **Popa, V.M.** – *Caracterizarea algebrică a receptoarelor dezechilibrate discrete*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XXVIII, Sibiu, 1998
- [P31] **Popa, V.M.** – *Metode pentru calculul numărului receptoarelor dezechilibrate discrete*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XXVIII, Sibiu, 1998
- [P32] **Popa, V.M.** – *Metoda de recurență pentru calculul numărului claselor de dezechilibru ale receptoarelor m-fazate*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XXVIII, Sibiu, 1998
- [P33] Popescu, D., Vraciu, C. - *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986
- [P34] Prisăcaru, A., Cojocaru-Filipiuc, C. - *On the nonsinusoidal and unsymmetrical behaviour of three-phase asynchronous motor*; Proceedings, First International Symposium on Advanced Electromechanical Motion Control Systems ELECTROMOTION'95, Cluj-Napoca, 25-26 May 1995, Volume, pp.116-119
- [P35] Pyati, V.P. – *Comment on “On the geometry of parallel impedances”*, IEEE Transactions on Education, Vol.41, no.2, May 1998, pp.171-176

- [R1] Ramras, M. – *Congestion-free routings of linear complement permutations*, Siam Journal of Discrete Mathematics, Vol.11, no.3, 1998, pp.487-500
- [R2] Rankin, D.R. - *The industrial application of phase current analysis to detect rotor winding faults in squirrel cage induction motors*; Power Engineering Journal, Vol.9, No.2, April 1995, pp.77-89
- [R3] Rashid, M.H., Maswood, A.I. - *Analysis of Three-Phase AC-DC Converters Under Unbalanced Supply Conditions*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.24, No.3, May/June 1988, pp.449-455
- [R4] Rashid, M.H., Maswood, A.I. - *A Novel Method of Harmonic Assessment Generated by Three-Phase AC-DC Converters Under Unbalanced Supply Conditions*, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.24, No.4, July/August 1988, pp.590-597
- [R5] Rastogi, M., Mohan, N., Henze, C.P. - *Three-phase sinusoidal current rectifier with zero-current switching*; IEEE Transactions on Power Electronics, Vol.10, No.6, November 1995, pp.753-760
- [R6] Ravezzi, L., Stoppa, D., DallaBetta, G.F. – *Current-mode A/D converter*, Electronics Letters, Vol.34, no.7, April 1998, pp.615-616
- [R7] Reljin, B., Ristic, S., Sreckovic, M. - *Analysis of some physical phenomena and processes by equivalent electrical circuits*, International Journal of Electrical Engineering Education, Vol.33, No.4, October 1996, pp.353-360
- [R8] Richter, R. - *Maşini electrice, Vol.IV, Maşini asincrone*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1960
- [R9] Riordan, J. - *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967
- [R10] Riordan, J. - *Combinatorial Identities*, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1968
- [R11] Roger Folch, J., Joares, V.J.Z. - *Contribution to the transient analysis of induction motors solving the electrodynamic equations by using the finite elements method*; COMPEL, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol.14, No.4, December 1995, pp.93-97
- [R12] Roşca, P., Diaconescu, C., Modran, L, **Popa, V.M.** - *An Improved Protection Method at the Electric Drive Systems with Asynchronous Motors*; A treia Conferinţă Naţională de Acţionări Electrice, Braşov, 28-30 mai 1982, volum, pag.A135-A138

- [R13] Roșca, P., Diaconescu, C., **Popa, V.M.**, Modran, L. - *Calculul armonicii de 100Hz din tensiunea obținută prin redresarea unui sistem trifazat asimetric cu ajutorul unei punți trifazate*; Buletinul Științific al Institutului de Învățământ Superior Sibiu, Vol.VI, 1982, pag.130-134
- [R14] Roșca, P., **Popa, V.M.**, Diaconescu, C., Modran, L. - *Releu cu fiabilitate ridicată pentru protecția complexă a motoarelor asincrone trifazate*; Conferința Națională de Energetică, București, 23-25 noiembrie 1983, volum secția 34, pag.34.091-34.096
- [R15] Roșca, P., **Popa, V.M.**, Diaconescu, C., Modran, L. - *The Influence of Non-Symmetric States on the Functioning of the Electronic Relay RPMA-1 of Protecting Asynchronous Three-Phase Motors at the Interruption of one Phase*; A patra Conferință Națională de Acționări Electrice, Craiova, 20-21 septembrie 1984, volum, pag.C127-C130
- [R16] Roșca, P., Diaconescu, C., **Popa, V.M.**, Modran, L. - *Releu pentru protecția motoarelor asincrone trifazate la întreruperea unei faze de alimentare*; Brevet de Invenție 87118 din 19.03.1985
- [R17] Roșca, P., **Popa, V.M.**, Diaconescu, C., Modran, L. - *Frână cu curenți turbionari*; Buletinul Științific al Institutului de Subingineri Sibiu, Vol.VII, 1985, pag.68-71
- [R18] Roșca, P., **Popa, V.M.**, Diaconescu, C., Modran, L. - *Instalație pentru ridicarea caracteristicii mecanice a motoarelor electrice*; Buletinul Științific al Institutului de Subingineri Sibiu, Vol.IX, 1986, pag.370-373
- [R19] Roșca, P., Diaconescu, C., **Popa, V.M.** - *Proiectarea produsului "Dispozitiv de protecție antibifazică" în vederea asimilării în fabricație*, Contract de cercetare științifică între Institutul de Subingineri Sibiu și Intreprinderea de Relee Mediaș, 1989
- [R20] Roșca, P., Modran, L., **Popa, V.M.**, Diaconescu, C. - *Cuplaj - frână electromagnetică*, Brevet de invenție 108833 din 30.08.1996
- [R21] Rosolowski, E., Izykowski, J., Kasztenny, B., Saha, M.M. - *A new distance relaying algorithm based on complex differential equation for symmetrical components*; Electric Power Systems Research, Vol.40, No.3, March 1997, pp.175-180
- [R22] Rukgauer, A., Schiehlen, W. - *Simulation of modular dynamic systems*, Mathematics and Computers in Simulation, Vol.46, no.5-6, June 1998, pp.535-542
- [S1] Saari, J. - *Thermal modelling of high-speed induction machines*; Acta Polytechnica Scandinavica, Electrical Engineering Series, No.82, 1995, pp.1-82

- [S2] Șafarevici, I.R. - *Noțiunile fundamentale ale algebrei*, Editura Academiei, București, 1989
- [S3] Sakui, M., Fujita, H, Shioya, M. - *A Method for Calculating Harmonic Currents of a Three-Phase Bridge Uncontrolled Rectifier with DC Filter*; IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.36, No.3, August 1989, pp.434-440
- [S4] Sakui, M., Fujita, H. - *Calculation of Uncharacteristic Harmonics of a Three-Phase Bridge Rectifier with DC Current Ripple*; Electrical Engineering in Japan, Vol.111, No.5, 1991, pp.127-129
- [S5] Sakui, M., Fujita, H. - *Harmonic Analysis of a Capacitor-Filtered Three-Phase Diode-Bridge Rectifier with Complex Source Impedance*; IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol.39, No.1, February 1992, pp.80-81
- [S6] Sakui, M., Fujita, H. - *Calculation of harmonic currents in a three-phase convertor with unbalanced power supply conditions*; IEE Proceedings-B, Vol.139, No.5, September 1992, pp.478-484
- [S7] Sakui, M., Fujita, H. - *An Analytical Method for Calculating Harmonic Currents of a Three-Phase Diode-Bridge Rectifier with DC Filter*; IEEE Transactions on Power Electronics, Vol.9, No.6, November 1994, pp.631-637
- [S8] Sakui, M, Minamijima, M., Amei, K., Fujita, H. - *Analytical Method for Calculating Harmonic Currents of an AC/DC Converter with AC Filters*; ETEP, Vol.6, No.2, March/April 1996, pp.97-101
- [S9] Salmon, J.C. - *Operating a three-phase diode rectifier with a low-input current distortion using a series-connected dual boost converter*; IEEE Transactions on Power Electronic, Vol.11, No.4, July 1996, pp.592-604
- [S10] Sarkar, D. – *Approximate analysis of temperature rise in a induction motor during dynamic braking*, Electric Machines and Power Systems, Vol.26, no.6, July 1998, pp.585-600
- [S11] Sasdelli, R., Menchetti, A. - *Some remarks on power theories*; European Transactions on Electrical Power Engineering, Vol.4, No.6, November-December 1994, pp.457-463
- [S12] Schoen, R.R., Habetler, T.G. - *A new method of current-based condition monitoring in induction machines operating under arbitrary load conditions*; Electric Machines and Power Systems, Vol.25, No.2, February-March 1997, pp.141-152

- [S13] Shi, K.L., Chan, T.F., Wong, Y.K. - *Modelling of the three-phase induction motor using SIMULINK*; 1997 IEEE International Electric Machines and Drives Conference Record, May 18-21, 1997, pp.WB3, 6.1-6.3
- [S14] Shi, S.W. - *Study of fault analysis using two vector system symmetrical components*; Electric Machines and Power Systems, Vol.26, No.2, February-March 1998, pp.155-170
- [S15] Simion, E., Mîndru, G., Gligor, T., Nicula, O. – *Bazele electrotehnicii*, Institutul Politehnic, Cluj, 1972
- [S16] Simion, E. – *Electrotehnica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978
- [S17] Simion, E., Maghiar, T. - *Electrotehnica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
- [S18] Simion, E., Man, E., Munteanu, C. – *The Symmetrization of the Line Current's Three-Phased System Using the Symmetric Components Method*; Annual Scientific Workshop, Oradea, 29-30 May, 1992
- [S19] Simion, E., Ursu, M.F., Man, E. - *The Systematization of the Three-Phase Electric Circuit in Sinusoidal Steady State - The Tripole*, Proceedings of 4<sup>th</sup> International Conference on Optimization of Electric and Electronic Equipments OPTIM'94, Brașov, 12-14 May 1994, pp.79-83
- [S20] Simion, E., Țopa, M. - *On Symbolic Analysis for Analog Filter Design*, Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Optimization of Electric and Electronic Equipments OPTIM'94, Brașov, 12-14 May 1994, pp.181-185
- [S21] Simion, E., Man, E., Munteanu, C. - *Contributions to the symmetrization of line current three-phase system*, Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Optimization of Electric and Electronic Equipments, OPTIM'94, Brașov, 12-14 May 1994, pp.287-291
- [S22] Simion, E., Man, E., Ciupa, R.V., Roșca, P., Neamțu, V., **Popa, V.M.** - *Teoria circuitelor electrice*, Editura Universității Tehnice Cluj-Napoca, 1996
- [S23] Simion, E., Munteanu, C., Topa, V. – *The Numerical Analysis of the Electromagnetic Interference Phenomena in Printed Circuit Boards Using the Transmission Line Model*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol.37, Nr.1, Cluj-Napoca, 1996, pag.35-38
- [S24] Slemon, G.R. - *Modelling of Induction Machines for Electric Drives*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.25, No.6, November/December 1989, pp.1126-1131

- [S25] Smith, O.D. – *Generation of ground structures for 2D and 3D design domains*, Engineering Computations, Vol.15, no.4, 1998, pp.462-500
- [S26] Smolleck, H.A. - *A new look at the effects of unbalanced voltages upon synchronous and induction machines*; Electric Power Systems Research, Vol.25, 1992, pp.199-206
- [S27] Soliman, S.A, Al Kandari, A.M., El Hawary, M.E. - *Time domain estimation techniques for harmonic load models*; *Electric Machines and Power Systems*, Vol.25, No.8, October 1997, pp.885-896
- [S28] Sonea, P., Fransua, A., Nicolaide, A., Saal, C. - *Electrotehnică, mașini și instalații electrice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1966
- [S29] Șora, C. - *Bazele electrotehnicii*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982
- [S30] Sowaied, A., Taleb, M. - *Assessment of power converter harmonics*; *Electric Machines and Power Systems*, Vol.24, No.2, March 1996, pp.147-158
- [S31] Speranza, F. - *Relații și structuri*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1975
- [S32] Stănășilă, O. - *Noțiuni și tehnici de matematică discretă*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985
- [S33] Stringer, N.T., Waser, D. - *An innovative method of providing total breaker failure protection*; *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol.32, No.5, September-October 1996, pp.1011-1017
- [S34] Șurianu, F.D. - *Experiment și simulare numerică a comportării motoarelor asincrone la golurile de tensiune simetrice*; *Energetica*, Vol.42, Nr.5-B, 1994, pag.223-226
- [T1] Terzija, V., Djuric, M. - *A numerical algorithm for direct real-time estimation of voltage phasor, frequency and its rate of change*; *Electric Machines and Power Systems*, Vol.24, No.4, June 1996, pp.417-428
- [T2] Timotin, A., Hortopan, V., Ifrim, A., Preda, M. - *Lecții de bazele electrotehnicii*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1970
- [T3] Țogui, L., Covrig, M., Manoliu, V. - *Determinarea cuplului electromagnetic al masinii asincrone trifazate cu înfășurări nesimetrice*; *Electrotehnica, Electronica, Automatica, Electrotehnica*, Vol.44, Nr.5-6, mai-iunie 1996, pag.19-21

- [T4] Țogui, L., Covrig, M., David, F. - *Modelul matematic al masinii asincrone trifazate cu înfășurare nesimetrică pe stator*; *Electrotehnica, Electronica, Automatica, Electrotehnica*, Vol.43, Nr.7-8, iulie-august 1995, pag.21-25
- [T5] Tomescu, I. - *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, București, 1972
- [T6] Tomescu, I. - *Introduction to Combinatorics*, Collet's (Publishers) Limited, London and Wellingborough, 1975
- [T7] Tomescu, I. - *Combinatorică și teoria grafurilor*, Editura Universității din București, 1978
- [T8] Tomescu, I. - *Probleme de combinatorică și teoria grafurilor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
- [T9] Tou, M., Al Haddad, K., Olivier, G., Rajagopalan, V. - *Analysis and design of single-controlled switch three-phase rectifier with unity power factor and sinusoidal input current*; *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol.12, No.4, July 1997, pp.608-614
- [T10] Țugulea, A. - *Considerații privind efectele energetice în regimuri armonice nesimetrice ale sistemelor trifazate*; *Energetica*, Vol.XXXIV, Nr.3, martie 1986, pag.121-129
- [T11] Țugulea, A. - *Considerații referitoare la definirea factorului de putere pentru sistemele trifazate dezzechilibrate*; *Energetica*, Vol.XXXIV, Nr.4, aprilie 1986, pag.164-167
- [T12] Țugulea, A., Golovanov, C. - *Efectele energetice ale regimurilor nesimetrice și deformante ale sistemelor electroenergetice. Posibilități de măsurare*; *ENERG*, Vol.III, Editura Tehnică, București, 1987, pag.130-162
- [V1] Vaananen, J. - *Combination of two-dimensional finite element analysis of electrical machines with circuit simulation techniques*; *Acta Polytechnica Scandinavica, Electrical Engineering Series*, No.80, 1995, pp.1-104
- [V2] Văzdăuțeanu, O. - *Cu privire la compensarea nesimetriei într-un sistem trifazat de tensiuni*; *Buletinul Științific și Tehnic al Universității Tehnice din Timișoara*, tomul 37 (51), fascicola 1-2, ianuarie-decembrie 1992, pag.73-76
- [W1] Waikar, D.L., Elangovan, S., Liew, A.C. - *Further enhancements in the symmetrical components based improved fault impedance estimation method. 1. Mathematical modelling*; *Electric Power Systems Research*, Vol.40, No.3, March 1997, pp.189-194

- [W2] Waikar, D.L., Liew, A.C., Elangovan, S. - *Further enhancements in the symmetrical components based improved fault impedance estimation method. 2. Performance evaluation*; Electric Power Systems Research, Vol.40, No.3, March 1997, pp.195-202
- [W3] Wang, Y.J., Pierrat, L., Feuillet, R. - *An Analytical Method for Predicting Current Harmonics Produced by an AC/DC Converter under Unbalanced Supply Voltage*; ETEP, Vol.2, No.4, July/August 1992, pp.237-244
- [W4] Wang, Y.J., Pierrat, L. - *Probabilistic modelling of current harmonics produced by an AC/DC converter under voltage unbalance*; IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.8, No.4, October 1993, pp.2060-2066
- [W5] White, D.J. - *Epsilon dominance and constraint partitioning in multiple objective problems*, Journal of Global Optimization, Vol.12, no.4, June 1998, pp.435-445
- [W6] Willems, J.L. - *The compensation of non-active currents for three-phase power systems in sinusoidal steady state*; Electrical Machines and Power Systems, Vol.21, No.6, November-December 1993
- [W7] Willems, J.L. - *Mathematical foundations of the instantaneous power concepts: A geometrical approach*; European Transactions on Electrical Power, Vol.6, No.5, September-October 1996, pp.299-304
- [W8] Williams, J.E. - *Operation of 3-Phase Induction Motors on Unbalanced Voltages*; AIEE Transactions Power Applications Systems, Vol.PAS-73, April 1954, pp.125-133
- [W9] Witherspoon, S.A., Choma, J. - *The analysis of balanced, linear differential circuits*; IEEE Transactions on Education, Vol.38, No.1, February 1995, pp.40-51
- [W10] Woll, R.F. - *Effect of Unbalanced Voltage on the Operation of Polyphase Induction Motors*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.IA-11, No.1, January/February 1975, pp.38-42
- [W11] Wroblewski, Z. - *Digital simulation of reliability of contacts used in AC electromagnetic contactors*, European Transactions on Electric Power, Vol.8, no.3, May-June 1998, pp.201-206
- [X1] Xia, R.W., Chen, S.J. - *A quasi-analytic method for structural optimization*, Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol.14, no.6, June 1998, pp.569-580



- [X2] Xypteras, J., Maras, K., Spyrelis, D. - *Calculation of the temperature distribution in an asynchronous machine*; European Transaction on Electrical Power Engineering, Vol.5, No.3, May-June 1995, pp.181-187
- [Y1] Yacamini, R. - *Power system harmonics. 4. Inter-harmonics*; Power Engineering Journal, Vol.10, No.4, August 1996, pp.185-196
- [Y2] Yu, D.C., Chen, D., Ramasamy, S., Flinn, D.G. - *A Windows based graphical package for symmetrical components analysis*; IEEE Transactions on Power Systems, Vol.10, No.4, November 1995, pp.1742-1749
- [Z1] Zaninelli, D., Zanotti, P. - *Simplified frequency dependent model for induction machines*; Electric Machines and Power Systems, Vol.22, No.6, November-December 1994, pp.727-742
- [Z2] Zuckerberger, A., Alexandrovitz, A. - *Modelling and Simulation of Unsymmetrical Supplied Three-Phase Induction Motor*; ETEP, Vol.6, No.3, May/June 1996, pp.189-194

## BIBLIOGRAFIE SUPLIMENTARĂ

- [B14] Boldea, I. – *Transformatoare și mașini electrice*, Editura Politehnica, 2001
- [B15] Buta, A., Milea, L., Pană, A. – *Impedanța armonică a rețelelor electrice*, Editura Tehnică, București, 2000
- [B16] Buta, A., Pană, A., Milea, L. – *Calitatea energiei electrice*, Editura AGIR, București, 2001
- [F7] Felea, I., Coroi, N. – *Fiabilitatea și mentenanța echipamentelor electrice*, Editura Tehnică, București, 2001
- [F8] Felea, I., Dale, E. – *Efecte ale regimului deformant și nesimetric*, Editura Universității din Oradea, 2002
- [F9] Felea, I., Rancov, N., Haș, V. – *Testing procedure in distortional operation condition of asynchronous machine*, Conferința de Inginerie Energetică CIE 2008, Oradea
- [I4] Iordănescu, I., Golovanov, N., Postolache, P., Toader, C., Porumb, R., Lipan, L., Popescu, S. – *Instalații electrice și elemente de audit electroenergetic*, Editura TIPOGAL 2008
- [M20] Milici, Mariana – *Circuite electrice – Regimuri sinusoidale și particulare de funcționare*, Editura MatrixRom, București, 2005
- [P36] Popa, V.M. - *A Synthesis Regarding the Study of a Real Unbalanced Load*, Sesiunea de Comunicări Științifice cu participare internațională, Hunedoara, 19-20 octombrie 2000; Universitatea „Politehnica” din Timișoara, Analele Facultății de Inginerie din Hunedoara, Tomul II, Fascicola 2, ISSN 1454-6531, pag.9-12

- [P37] Popa, V.M. - *The Study of the Real Unbalanced Load for Extreme Functioning Situations*, Sesiunea de Comunicări Științifice cu participare internațională, Hunedoara, 19-20 octombrie 2000; Universitatea „Politehnica” din Timișoara, Analele Facultății de Inginerie din Hunedoara, Tomul II, Fascicola 2, ISSN 1454-6531, pag. 13-16
- [P38] Popa, V.M. - *Considerații privind alimentarea receptorilor dezechilibrați*, Sesiunea de comunicări științifice a Universității “Petru Maior”, Târgu Mureș, 27-28 octombrie 2000, Volumul 7, Electroenergetică, ISBN 973-8084-19-9, pag. 191-196
- [P39] Popa, V.M., Popescu, Lizeta - *Măsurători experimentale privind puntea de diode alimentată nesimetric*, A treia Conferință Internațională de Sisteme Electromecanice și Energetice SIELMEN - 2001, Republica Moldova, Chișinău, 4-6 octombrie 2001, volumul III, ISBN 9975-9638-8-9, pag. 165-166
- [P40] Popa, V.M., Popescu, Lizeta - *Studiul punții de diode alimentată cu sisteme particulare nesimetrice de tensiuni*, A treia Conferință Internațională de Sisteme Electromecanice și Energetice SIELMEN - 2001, Republica Moldova, Chișinău, 4-6 octombrie 2001, volumul III, ISBN 9975-9638-8-9, pag. 173-176
- [P41] Popa, V.M. - *The Complex Analysis of the Real Unbalanced Load*, www.roger-univ.ro, Publicații; Analele Universității Româno-Germane din Sibiu; Secțiunea Tehnică, Sibiu, 2002
- [P42] Popa, V.M. - *Studiul energetic al receptorului dezechilibrat real*, Lucrările celei de A Doua Conferințe Naționale „Profesorul Dorin Pavel-fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 31 mai; 1-2 iunie 2002, Volumul Știință și Inginerie (Vol. I), ISBN 973-8130-82-4; ISBN 973-8130-83-2, pag. 69-74
- [P43] Popa, V.M. - *Analiza cazurilor limită ale receptorului dezechilibrat real*, Sesiunea Jubiliară de Comunicări Științifice cu Participare Internațională prilejuită de împlinirea a 30 de ani de învățământ superior de stat în Arad, Arad, 28-29 noiembrie 2002, Analele Universității „Aurel Vlaicu” din Arad, Volum, Seria Electrică, ISSN 1582-3377, pag. 126-131
- [P44] Popa, V.M. - *Studiul punții de diode alimentată nesimetric*, Lucrările celei de A Treia Conferințe Naționale – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 30-31 mai; 1 iunie 2003, Volumul „Știință și Inginerie” (vol. III), ISBN 973-8130-82-4; ISBN 973-8466-03-2, pag. 105-108
- [P45] Popa, V.M. - *Studiul receptorului trifazat cu coeficienți de dezechilibru reali*, A treia sesiune anuală de comunicări științifice a cadrelor didactice, Universitatea Româno-Germană Sibiu, 30 aprilie 2004, Volum 2; ISBN 973-7998-11-1, pag. 101-111
- [P46] Popa, V.M. - *Analiza receptorului dezechilibrat real cu coeficienți de dezechilibru reali*, Lucrările celei de A Patra Conferințe Naționale – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 21-23 mai 2004; Volumul „Știință și Inginerie” (vol. V), ISBN 973-8130-82-4; ISBN 973-8466-67-9, pag. 151-156
- [P47] Popa, V.M. - *Factor global de nesimetrie pentru sisteme trifazate*, Seminarul Științific Național “Electrotehnologii și Mediul ambiant”, Sibiu, 5-6 noiembrie 2004, Revista „Energetica”, nr. 12/2004, ISSN 1453-2360, pag. 544-549

- [P48] Popa, V.M. - *Studiul analitic al punții trifazate de diode alimentate nesimetric*, A VI-a Sesiune de comunicări științifice, Universitatea Româno-Germană Sibiu, 4 noiembrie 2005, Extras, ISBN 973-7998-23-5, pag. 199-204
- [P49] Popa, V.M. - *Asupra nesimetriei unui sistem trifazat*, Lucrările celei de A V-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 3-4 iunie 2005; Volumul „Știință și Inginerie” (vol. 7), ISBN 973-720-015-2; ISBN 973-8130-84-0, pag. 241-246
- [P50] Popa, V.M. - *The Energetical Study of the Unbalanced Three-Phased Load*, Conferința Națională cu participare internațională „Electrotehnica aplicată în eco-reconstrucția industrială”, Sibiu, 23-24 septembrie 2005; Volum, ISBN 973-739-138-1, pag. 144-151
- [P51] Popa, V.M. - *Analiza punții de diode alimentată cu sisteme de tensiuni nesimetrice*, Lucrările celei de A VI-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 2-3 iunie 2006; Volumul „Știință și Inginerie” (vol. 9), ISBN 10 973-8130-82-4, pag. 309-314
- [P52] Popa, V.M. - *Aspecte experimentale și sintetice privind puntea trifazată de diode alimentată nesimetric*, A VII-a Sesiune de comunicări științifice, Universitatea Româno-Germană Sibiu, 19 aprilie 2007, Extras, ISBN 978-973-7998-32-3 și CD al sesiunii, pag. 263-269
- [P53] Popa, V.M. - *Rezultate experimentale și comparative privind puntea de diode în regim de alimentare nesimetric*, Lucrările celei de A VII-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 1-2 iunie 2007; Volumul „Știință și Inginerie” (vol. 11), ISBN 973-8130-82-4, pag. 191-196
- [P54] Popa, V.M. - *Studiul energetic al receptorului extrem dezechilibrat generalizat*, Lucrările celei de A IX-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 5-6 iunie 2009; Volumul „Știință și Inginerie” (vol. 15), ISBN 973-8130-82-4, pag. 363-368
- [P55] Popa, V.M. – *Aspecte de combinatorică cu aplicații în electrotehnică*, Editura Universității „Lucian Blaga” din Sibiu, Sibiu, 2009
- [P56] Popa, V.M. - *Studiul energetic al receptorului echilibrat real*, Lucrările celei de A X-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 4-5 iunie 2010; Volumul „Știință și Inginerie” (vol. 17), ISSN 2067-7138, pag.357-362
- [P57] Postolache, P., Toader, C. – *Calitatea și eficiența energiei electrice*, Editura AGIR, București, 2007
- [R23] Rancov, N. – *Aspects regarding experimental determination of thermal inertia at asynchronous motors operating in harmonics regime*, CIE 2009, Oradea



