

Vasile Mircea Popa

Regimuri nesimetrice  
în electrotehnică

Editura Universității “Lucian Blaga” din Sibiu  
Sibiu, 2012

# **Unsymmetrical Regimes in Electrotechnics**

Îngrijire editorială: autorul  
Traducere prefață: arh. Silviu Ioan Popa  
Tehnoredactare: arh. Silviu Ioan Popa

## PREFAȚĂ

În lucrarea de față am abordat o serie de aspecte din domeniul sistemelor nesimetrice și al receptoarelor dezechilibrate, mai puțin tratate în literatura de specialitate. Am încercat să aduc unele sistematizări, completări și interpretări proprii acestui subiect și de asemenea, contribuții originale care sunt prezentate explicit în lucrare la fiecare capitol în parte.

Cartea se bazează pe teza de doctorat a autorului [P35]. Pentru aceasta, conținutul tezei de doctorat a fost dezvoltat și actualizat [P35], [P57], [P61].

Conținutul cărții este organizat pe patru capitole și bibliografie.

În capitolul 1 se tratează receptoarele dezechilibrate generalizate, utilizând în mod sistematic componentele simetrice de calcul ale impedanțelor și punând în evidență în schema echivalentă a receptorului dezechilibrat o parte echilibrată și o parte extrem dezechilibrată. Se deduc ecuațiile de tensiuni și de curenți și se evidențiază circulația internă de putere între aceste părți ale receptorului. Se arată cele două cazuri cu existență fizică reală care se pot întâlni pentru receptorul dezechilibrat real, considerând circulația internă a puterilor active.

În capitolul 2 se tratează receptoarele dezechilibrate discrete, care sunt definite la începutul capitolului. Se elaborează modelul matematic respectiv și se expun patru metode originale pentru analiza claselor de dezechilibru ale receptoarelor dezechilibrate discrete de un anumit tip. În același scop se elaborează un program de calculator, numit programul **RDD**. Folosind acest program de calculator, se calculează toate numerele **N(RDD)** pentru valori ale ordinului  $n$  mai mici sau egale decât nouă.

În capitolul 3 se face caracterizarea sistemelor trifazate nesimetrice cu ajutorul analizei armonice. Se analizează puntea de diode alimentată cu un sistem trifazat nesimetric de tensiuni prin metoda analitică. Se consideră cazul general și mai multe cazuri particulare. În continuare se prezintă programul de calculator **PDIODE**, metoda simulării pe calculator și măsurătorile experimentale efectuate. Se analizează apoi și cazul punții de diode având o sarcină complexă. În încheierea capitolului 3 se propune un coeficient global de nesimetrie pentru sisteme trifazate.

În capitolul 4 se analizează comportarea unui motor asincron trifazat în regimuri nesimetrice de funcționare. În particular, se studiază funcționarea motoarelor asincrone trifazate cu o fază întreruptă, în cazul înfășurării statorice legate în stea, respectiv în triunghi. Se prezintă diverse metode și dispozitive pentru protecția antibifazică a motoarelor asincrone trifazate, realizate pe plan mondial. În încheierea capitolului 4 se propune un dispozitiv de protecție antibifazică funcționând pe baza unui principiu nou. Acest dispozitiv de protecție antibifazică a fost realizat și brevetat.

La sfârșitul cărții este prezentată bibliografia.

Cartea poate interesa pe studenți, pe inginerii specializați în teoria circuitelor electrice, precum și pe toți cei pasionați de electrotehnica teoretică și aplicată în general, de teoria circuitelor electrice în special.

Conținutul lucrării poate fi fără îndoială îmbunătățit și completat. Voi fi recunoscător pentru orice observație sau sugestie în acest sens, venită de la cititori.

Sibiu, 15 octombrie 2012

Autorul.

## FOREWORD

In this paper I approach a number of issues in the field of non-symmetrical systems and of unbalanced loads, treated less in specialized literature. I tried to bring some systematization, addenda and personal interpretations to this subject and also original contributions which are explicitly presented in each chapter.

The book is based on the autor's doctoral thesis [P35]. For this purpose, the content of doctoral thesis was developed and updated [P35], [P57], [P61].

The contents of the book is organized into four chapters and bibliography.

The first chapter treats the generalized unbalanced loads, using systematically the calculation symmetrical components of impedances and showing in the equivalent scheme of the unbalanced load a balanced part and an extremely unbalanced part. Voltages and currents equations are deducted and the internal power circulation between these parts of the load is presented. The two cases with real physical existence which can be met for the real unbalanced load are presented, considering the internal active powers circulation.

The second chapter treats the discreet unbalanced loads, which are defined at the beginning of the chapter. The respective mathematical model is elaborated and four original methods for the unbalanced classes analysis of a certain type of the discreet unbalanced loads are displayed. For the same purpose, the **DUL** software program is elaborated. Using this software program, all numbers **N(DUL)** for  $n$  order values less or equal than nine are calculated.

The third chapter treats characterization of unsymmetrical three-phase systems with the aid of harmonic analysis. Is analyzed the diode bridge fed by a unsymmetrical three-phase voltage system using analytical method. Consider the general case and more individual cases. Below presents the **PDIODE** computer program, computer simulation method and experimental measurements performed. Then analyzes the diode bridge feeding a complex load. At the end of chapter is proposed a non-symmetry global coefficient of three-phase systems.

The fourth chapter treats the run of a three-phase asynchronous motor in unsymmetrical operation regimes. In particular are studied the operation of a three-phase asynchronous motors in case of one interrupted phase for a motor with non-accessible neutral point star-connected stator winding and for a motor with delta-connected stator winding. Presents various methods and devices for anti-biphasic protecting asynchronous three-phase motors achieved worldwide. At the end of chapter is proposed a anti-biphasic protection device running on a new principle. This anti-biphasic protection device was developed and patented.

The bibliography is attached at the end of the book.

This book will be of particular interest to students, to engineers specializing in the theory of electrical circuits, and generally to all other readers captivated by the theoretical and applied electrotechnics generally, by the electrical circuits theory particularity.

Certainly, the contents of this book can be improved and enriched in the future. As such, I will be grateful for any comments or suggestions received from the readers.

Sibiu, 15 October 2012

The author.

## CUPRINS

Prefață .....	3
Prefață (în limba engleză) .....	4
Cuprins .....	5
Cuprins (în limba engleză) .....	7
Capitolul 1. Receptoare dezechilibrate generalizate .....	9
1.1 Definiții, clasificări .....	11
1.2 Componente simetrice de calcul .....	12
1.3 Reprezentări în planul complex al impedanțelor .....	14
1.4 Ecuația de tensiuni și curenți .....	20
1.5 Analiza receptorului dezechilibrat real .....	22
1.6 Analiza receptorului extrem dezechilibrat generalizat .....	25
1.7 Analiza receptorului echilibrat real .....	29
1.8 Analiza receptorului echilibrat real alimentat cu un sistem nesimetric de tensiuni .....	32
1.9 Sinteză privind analiza receptorului dezechilibrat real .....	32
1.10 Analiza unor cazuri particulare .....	38
1.11 Cazurile extreme $z_N = 0$ și $z_N = \infty$ .....	47
1.12 Concluzii și observații .....	50
Capitolul 2. Receptoare dezechilibrate discrete .....	53
2.1 Definiția receptorului dezechilibrat discret .....	55
2.2 Modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret .....	56
2.3 Generalizare .....	60
2.4 Calculul numărului <b>N (RDD)</b> .....	61
2.5 Metoda enumerării .....	61
2.6 Metoda polinoamelor de tip Newton .....	63
2.7 Metoda de recurență .....	67
2.8 Metoda reducerii ordinului .....	69
2.9 Program de calculator <b>RDD</b> .....	75
2.10 Rezultate numerice obținute .....	76
2.11 Concluzii și observații .....	86
Capitolul 3. Caracterizarea sistemelor trifazate nesimetrice cu ajutorul analizei armonice .....	87
3.1 Puntea de diode alimentată cu un sistem nesimetric de tensiuni .....	89
3.1.1 Metoda analitică .....	89
3.1.2 Program de calculator <b>PDIODE</b> .....	109
3.1.3 Metoda simulării pe calculator .....	111
3.1.4 Compararea rezultatelor obținute prin metoda analitică și prin metoda simulării pe calculator .....	112
3.1.5 Măsurători experimentale .....	116
3.2 Puntea de diode alimentând o sarcină complexă .....	118
3.2.1 Metoda analitică .....	118
3.2.2 Metoda simulării pe calculator .....	130
3.2.3 Compararea rezultatelor obținute prin metoda analitică și prin metoda simulării pe calculator .....	130
3.3 Introducerea unui coeficient global de nesimetrie (CGN) .....	136
3.3.1 Punerea problemei .....	136
3.3.2 Analiza generală pe cazuri .....	137
3.3.3 Analiza unor cazuri particulare .....	142
3.3.4 Cazul sistemelor de secvență inversă .....	142

3.3.5 Program de calculator pentru analiza sistemelor trifazate nesimetrice (SISNES) .....	142
3.3.6 Program de calculator pentru reprezentarea variației coeficientului global de nesimetrie (VARK).....	144
3.4 Concluzii și observații.....	152
Capitolul 4. Aplicație-Realizarea unui dispozitiv de protecție antibifazică.....	153
4.1 Regimuri nesimetrice sau dezechilibrate la funcționarea unui motor asincron trifazat .....	155
4.2. Funcționarea motoarelor asincrone trifazate cu o fază întreruptă .....	156
4.2.1 Întreruperea unei faze pentru un motor cu înfășurarea statorică conectată în stea cu nulul izolat.....	157
4.2.2 Întreruperea unei faze pentru un motor cu înfășurarea statorică conectată în triunghi.....	159
4.3 Realizarea protecției antibifazice.....	160
4.4 Concepția, proiectarea și realizarea unui dispozitiv de protecție antibifazică funcționând pe baza unui principiu nou.....	161
4.5 Concluzii și observații.....	166
Bibliografie .....	169

## CONTENTS

Foreword (in Romanian) .....	3
Foreword (in English) .....	4
Contents (in Romanian) .....	5
Contents (in English) .....	7
Chapter 1. Generalized Unbalanced Loads .....	9
1.1 Definitions, Classifications .....	11
1.2 Calculation Symmetrical Components .....	12
1.3 Representations in Complex Impedance Plane .....	14
1.4 Voltages and Currents Equation .....	20
1.5 The Analysis of the Real Unbalanced Load .....	22
1.6 The Analysis of the Generalized Extremely Unbalanced Load .....	25
1.7 The Analysis of the Real Balanced Load .....	29
1.8 The Analysis of the real Balanced Load Fed by a Non-Symmetrical System of Voltages ...	32
1.9 Synthesis Regarding the Analysis of the Real Unbalanced Load .....	32
1.10 The Analysis of a Particular Cases .....	38
1.11 The Extreme Cases $z_N = 0$ and $z_N = \infty$ .....	47
1.12 Conclusions and Observations .....	50
Chapter 2. Discreet Unbalanced Loads .....	53
2.1 The Definition of the Discreet Unbalanced Load .....	55
2.2 The Mathematical Model for the Discreet Unbalanced Load .....	56
2.3 Generalization .....	60
2.4 The <b>N(DUL)</b> Number Calculation .....	61
2.5 The Enumeration Method .....	61
2.6 The Newton Type Polynomial Method .....	63
2.7 The Recurrence Method .....	67
2.8 The Order Reducing Method .....	69
2.9 The <b>DUL</b> Software Program .....	75
2.10 Numerical Results Obtained .....	76
2.11 Conclusions and Observations .....	86
Chapter 3. Characterization Unsymmetrical Three-Phase Systems Using Harmonic Analysis ...	87
3.1 The Diode Bridge Fed by a Unsymmetrical Voltage System .....	89
3.1.1 The Analytical Method .....	89
3.1.2 PDIODE Computer Program .....	109
3.1.3 Computer Simulation Method .....	111
3.1.4 Comparison of Results Obtained by Analytical Method and by Computer Simulation Method .....	112
3.1.5 Experimental Measurements .....	116
3.2 The Diode Bridge Feeding a Complex Load .....	118
3.2.1 The Analytical Method .....	118
3.2.2 Computer Simulation Method .....	130
3.2.3 Comparison of Results Obtained by Analytical Method and by Computer Simulation Method .....	130
3.3 Intoduction a Non-Symmetry Global Coefficient (CGN) .....	136
3.3.1 Implementation Problem .....	136
3.3.2 General Analysis of the Cases .....	137
3.3.3 Analysis of Individual Cases .....	142
3.3.4 The Case of Reverse Sequence Systems .....	142

3.3.5 Computer Program for Unsymmetrical Three-Phase Systems Analysis (SISNES).....	142
3.3.6 Computer Program for Representation of Non-Symmetry Global Coefficient Variation (VARK) .....	144
3.4 Conclusions and Observations.....	152
Chapter 4. Application-Development of a Anti-biphasic Protection Device.....	153
4.1 Unsymmetrical or Unbalanced Operation Regimes of a Three-Phase Asynchronous Motor .....	155
4.2 The Operation of a Three-Phase Asynchronous Motors in Case of One Interrupted Phase .....	156
4.2.1 The Interruption of One Phase in Case a Motor with Non-Accessible Neutral Point Star- Connected Stator Winding.....	157
4.2.2 The Interruption of One Phase in Case a Motor with Delta-Connected Stator Winding.....	159
4.3 Development of a Anti-biphasic Protection .....	160
4.4 Conception, Design and Implementation of a Anti-biphasic Protection Device Running on a New Principle .....	161
4.5 Conclusions and Observations.....	166
 Bibliography .....	 169



CAPITOLUL 1  
RECEPTOARE DEZECHILIBRATE  
GENERALIZATE



# 1. RECEPTOARE DEZECHILIBRATE GENERALIZATE

## 1.1. Definiții, clasificări

Receptoarele electrice trifazate admit o schemă echivalentă în stea și evident, pe baza teoremelor de transfigurare, o schemă echivalentă în triunghi (fig.1.1)

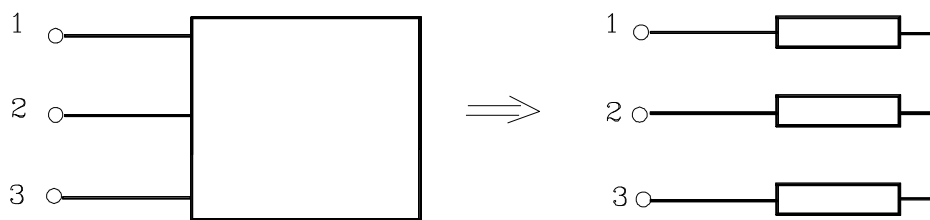


Fig.1.1 Receptor trifazat și schema lui echivalentă în stea

Ele pot fi grupate în două categorii: receptoare trifazate echilibrate și receptoare trifazate dezechilibrate [M17], [S29], [S17], [S22].

Se numește receptor trifazat echilibrat un receptor trifazat care admite o schemă echivalentă în stea cu impedanțe complexe egale în cele trei ramuri [M17], [S29], [S17], [S22].

Se numește receptor trifazat dezechilibrat un receptor trifazat care admite o schemă echivalentă în stea cu impedanțe complexe neegale în cele trei ramuri [M17], [S29], [S17], [S22].

În continuare, se va introduce noțiunea de receptor trifazat extrem dezechilibrat, care este un caz particular de receptor trifazat dezechilibrat [P6], [P7], [P8], [P18], [P20]. Pentru un astfel de receptor, suma impedanțelor complexe din cele trei ramuri ale schemei echivalente în stea este egală cu zero.

De altfel și receptorul trifazat echilibrat poate fi considerat, într-un anumit sens, ca un caz limită al receptorului trifazat dezechilibrat. În această viziune, receptoarele trifazate sunt în general dezechilibrate, situații limită (particulare) fiind receptoarele trifazate echilibrate și receptoarele trifazate extrem dezechilibrate.

În figura 1.2 este prezentată clasificarea receptoarelor trifazate și anume clasificarea clasică (fig.1.2.a) și clasificarea propusă în lucrarea de față (fig.1.2.b).

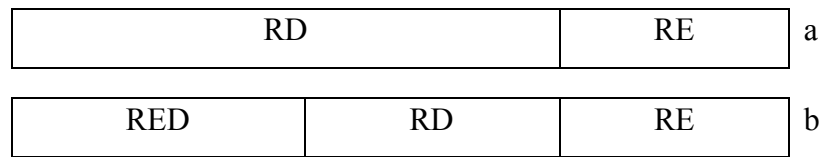


Fig.1.2 Clasificarea clasică (a) și clasificarea propusă în lucrarea de față (b) pentru receptoarele trifazate

S-au făcut următoarele notații:

- **RD** = receptor dezechilibrat;
- **RE** = receptor echilibrat;
- **RED** = receptor extrem dezechilibrat.

Vom considera în continuare schema echivalentă în stea a unui receptor trifazat (fig.1.3).

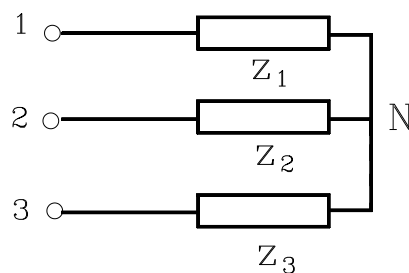


Fig. 1.3 Schema echivalentă în stea a unui receptor trifazat

Cele trei borne de fază sunt notate 1, 2, 3. Punctul neutru al stelei este notat N. Impedanțele complexe din cele trei ramuri ale receptorului legat în stea sunt  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ . Adoptând această notație, nu vom sublinia aceste trei litere cu indici, care vor indica totuși valorile complexe ale impedanțelor respective.

## 1.2. Componente simetrice de calcul

După cum se știe, la analiza circuitelor electrice dezechilibrate cu ajutorul metodei componentelor simetrice se introduc niște impedanțe de calcul, numite componentele simetrice de calcul ale impedanțelor: componenta homopolară, componenta directă și componenta inversă [M17], [S29], [S17], [S22].

Pentru receptorul legat în stea reprezentat în figura 1.3, aceste componente simetrice de calcul ale impedanțelor sunt date de relația:

$$\begin{bmatrix} z_h \\ z_d \\ z_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

În relația (1.1) s-a notat cu  $a$  operatorul de rotație în sens direct cu  $2\pi / 3$  radiani, numit operatorul lui Steinmetz [M17], [S29].

Prin inversarea relației (1.1) obținem:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_h \\ z_d \\ z_i \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Relațiile (1.1) și (1.2) oferă o extindere a teoremei lui Stokvis - Fortescue și pentru sisteme trifazate de impedanțe complexe. După cum se știe, teorema este utilizată în mod curent în legătură cu sistemele trifazate de tensiuni și de curenți.

În general, în cursurile și tratatele de specialitate se semnalează caracterul formal, de calcul, al componentelor simetrice ale impedanțelor [M17], [S29], [S17]. Aceasta, în opoziție cu componentele simetrice ale sistemelor nesimetrice de tensiuni și de curenți care au o interpretare fizică clară. Diferențierea se bazează în primul rând pe observația că un sistem trifazat de tensiuni (sau de curenți) are o succesiune în timp, pe când un sistem de impedanțe nu are o astfel de succesiune în timp. Legat de aceasta, observăm că imaginea în complex a unei tensiuni sinusoidale (sau a unui curent sinusoidal) este denumită pe bună dreptate fazor, pe când imaginea în complex a unei impedanțe ar trebui numită defazor [B3], fiind de fapt un operator în planul complex al tensiunilor și curenților.

În al doilea rând, fazorul reprezentativ al unei tensiuni sau al unui curent se poate găsi în orice cadran, pe când imaginea în complex a unei impedanțe se poate găsi numai în cadranele I și IV.

Cu toate că există această deosebire importantă, la o analiză mai profundă a unor fenomene legate de receptoarele dezechilibrate se impune nu numai o utilizare susținută a componentelor  $z_h$ ,  $z_d$  și  $z_i$  dar chiar și o interpretare mai nuanțată a lor [P6], [P7], [P8], [P20], [P21], [P24], [P25].

La început să observăm că relația (1.2) scoate în evidență că orice sistem trifazat de impedanțe se poate descompune geometric (deci în planul complex al impedanțelor) în trei grupe de impedanțe de calcul. Această descompunere este totdeauna posibilă și este unică. Vom extinde această afirmație, arătând că descompunerea are și o anumită interpretare fizică.

Din relațiile (1.1) și (1.2) rezultă că orice receptor trifazat echilibrat are numai componentă de calcul homopolară, componentele de calcul directă și inversă fiind nule. Deoarece și reciproca este adevărată, această proprietate este caracteristică (definitorie) pentru un receptor echilibrat. Existența a cel puțin uneia dintre componentele de calcul directă sau inversă caracterizează receptoarele dezechilibrate [P7], [P18].

Semnificația fizică a descompunerii unui sistem trifazat de impedanțe în componente simetrice de calcul trebuie analizată în mod deosebit. Respectiv, pentru orice impedanță complexă, partea reală (rezistența echivalentă în curent alternativ) este în general o mărime pozitivă:

$$\operatorname{Re}(z) \geq 0 \quad (1.3)$$

Considerarea unor impedanțe care se reprezintă în planul complex în cadranele II și III implică să considerăm rezistențe echivalente negative. O astfel de rezistență negativă nu are o existență fizică obiectivă, dar o serie de operații și calcule cu impedanțe cu partea reală negativă precum și unele interpretări se pot face după cum se va arăta în continuare.

O impedanță cu partea reală negativă o vom numi “impedanță generalizată”. Ea se reprezintă în planul complex al impedanțelor în cadranul II sau în cadranul III [P7], [P18], [P21].

### 1.3. Reprezentări în planul complex al impedanțelor

Un sistem trifazat de impedanțe (deci un receptor trifazat) se poate reprezenta în planul complex al impedanțelor prin trei puncte, deci prin triunghiul obținut prin unirea acestor trei puncte (fig.1.4). Succesiunea punctelor 1, 2, 3 (în planul complex, dar nu și în timp) poate să fie directă sau inversă. În particular, punctele 1, 2, 3 pot fi coliniare (triunghi degenerat).

După cum se știe, afixul centrului de greutate al triunghiului trasat în planul complex este media aritmetică a celor trei afixe care corespund vârfurilor triunghiului. Deci, vectorul de poziție al centrului de greutate (D) este chiar  $z_h$ .

Din relația (1.2) deducem:

$$\begin{cases} z_1 = z_h + z_d + z_i \\ z_2 = z_h + a^2 z_d + a z_i \\ z_3 = z_h + a z_d + a^2 z_i \end{cases} \quad (1.4)$$

Partea echilibrată a sistemului trifazat de impedanțe este constituită de componenta homopolară, pentru fiecare fază:

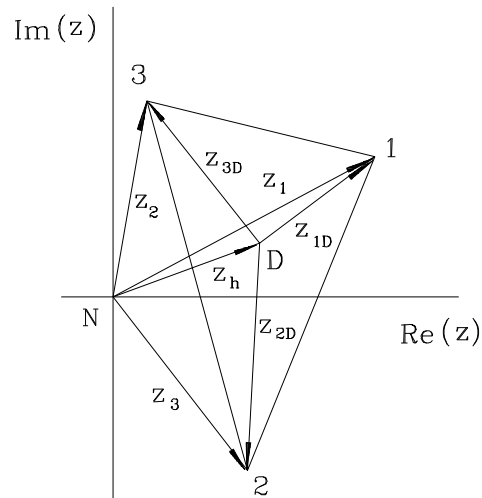


Fig. 1.4 Reprezentarea în planul complex al impedanțelor a unui receptor trifazat

$$z_{1E} = z_h; \quad z_{2E} = z_h; \quad z_{3E} = z_h \quad (1.5)$$

Partea dezechilibrată a sistemului trifazat de impedanțe va conține pe fiecare fază următoarele impedanțe:

$$\begin{cases} z_{1D} = z_d + z_i \\ z_{2D} = a^2 z_d + a z_i \\ z_{3D} = a z_d + a^2 z_i \end{cases} \quad (1.6)$$

Prin urmare, vom putea scrie pentru fiecare fază:

$$\begin{cases} z_1 = z_{1E} + z_{1D} \\ z_2 = z_{2E} + z_{2D} \\ z_3 = z_{3E} + z_{3D} \end{cases} \quad (1.7)$$

În conformitate cu aceste relații, putem desena următoarea schemă echivalentă a receptorului din figura 1.1, în care sunt evidențiate partea echilibrată și partea dezechilibrată (fig.1.5).

De asemenea, relațiile (1.7) au o interpretare clară în figura 1.4.

Se numește receptor trifazat real un receptor format din trei impedanțe care au fiecare partea reală pozitivă. Se numește receptor trifazat generalizat un receptor format din trei impedanțe, dintre care cel puțin una are partea reală negativă [P6], [P7], [P8], [P18], [P20]. Conform acestor definiții, triunghiul 123 din figura 1.4 reprezintă un receptor trifazat real (dezechilibrat). Dacă triunghiul se deplasează în planul complex al impedanțelor, în așa fel încât unul, două sau chiar toate vârfurile să se găsească la stânga axei imaginare, atunci el va reprezenta un receptor trifazat generalizat (dezechilibrat).

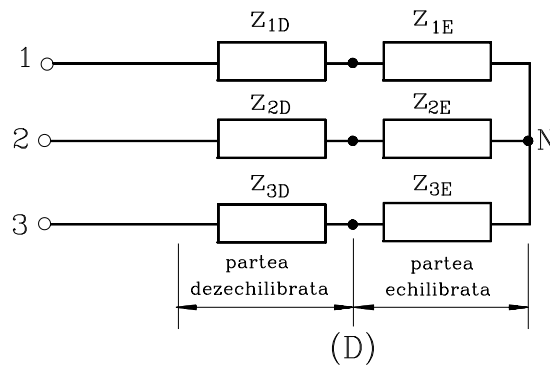


Fig. 1.5 Evidențierea părții echilibrate și a părții dezechilibrate (extrem dezechilibrate) pentru un receptor trifazat

Mărimea triunghiului 123 (perimetrul lui) măsoară într-un anumit fel gradul de dezechilibru al receptorului corespunzător. Astfel, dacă triunghiul se micșorează, deci dacă:  $1 \rightarrow D$ ,  $2 \rightarrow D$ ,  $3 \rightarrow D$ , receptorul trifazat devine echilibrat. Atunci,  $z_1 = z_2 = z_3 = z_h$ .

De asemenea, mărimea segmentului ND (lungimea lui) măsoară gradul de dezechilibru al receptorului respectiv. Astfel, dacă lungimea acestui segment se micșorează, deci dacă  $D \rightarrow N$ , receptorul trifazat devine extrem dezechilibrat.

Vom analiza în continuare unele cazuri particulare de consumatori trifazați, evidențiind de fiecare dată triunghiul corespunzător din planul complex.

În figura 1.6 este reprezentat un receptor extrem dezechilibrat generalizat, caracterizat de relațiile:  $z_h = 0$ ;  $z_d \neq 0$ ;  $z_i \neq 0$ . Triunghiul 123 este oarecare cu centrul de greutate în originea axelor

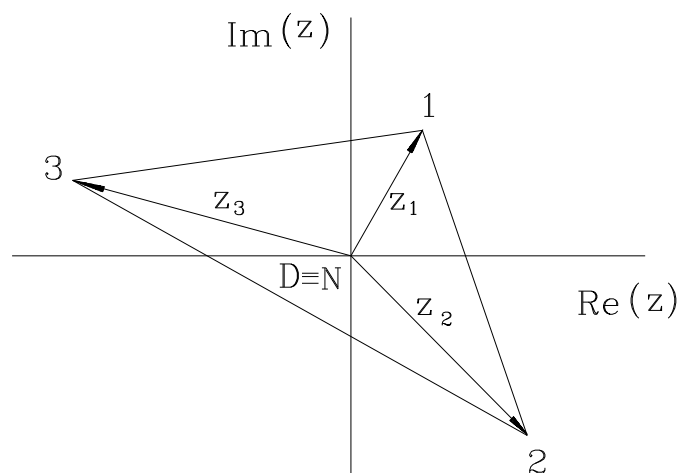


Fig. 1.6 Reprezentarea în planul complex al impedanțelor a unui receptor trifazat extrem dezechilibrat generalizat



de coordonate ( $D \equiv N$ ). Este evident că cel puțin un vârf al triunghiului se va găsi la stânga axei imaginare (mai exact, un vârf sau două vor fi în această situație). De altfel, această proprietate ușor de înțeles pe desen, poate fi demonstrată riguros în felul următor. Deoarece  $z_h = (z_1 + z_2 + z_3) / 3$ , din  $z_h = 0$  rezultă  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ , deci :  $\text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2) + \text{Re}(z_3) = 0$  și prin urmare cel puțin una din rezistențele fazelor este negativă.

În figura 1.7 este reprezentat un receptor extrem dezechilibrat generalizat, un caz particular caracterizat de:  $z_h = 0$ ;  $z_d \neq 0$ ;  $z_i = 0$ . Centrul de greutate coincide cu originea axelor de coordonate și cel puțin un vârf este în cadranul II sau III. Triunghiul 123 va fi echilateral.

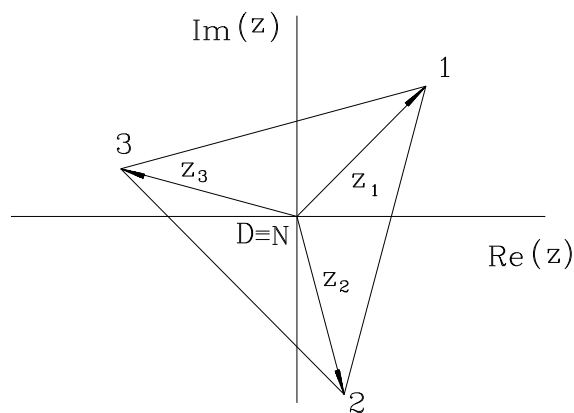


Fig. 1.7 Reprezentarea în planul complex al impedanțelor a unui receptor trifazat extrem dezechilibrat generalizat având numai  $z_d \neq 0$

În figura 1.8 este reprezentat un alt caz particular de receptor extrem dezechilibrat

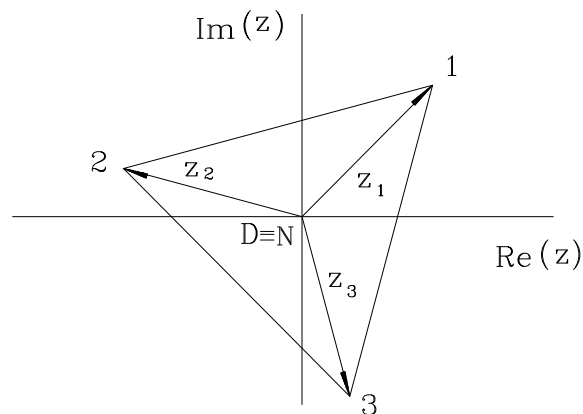


Fig. 1.8 Reprezentarea în planul complex al impedanțelor a unui receptor trifazat extrem dezechilibrat generalizat având numai  $z_i \neq 0$

generalizat, caracterizat de relațiile:  $z_h = 0$ ;  $z_d = 0$ ;  $z_i \neq 0$ . Din nou, centrul de greutate coincide cu originea și cel puțin un vârf este în cadranul II sau III. Triunghiul 123 este echilateral.

Revenind la receptoarele dezechilibrate oarecare (cazul cel mai general) putem afirma că orice receptor dezechilibrat se poate descompune în două sisteme de impedanțe, dintre care unul este echivalent cu un receptor echilibrat iar al doilea este echivalent cu un receptor extrem dezechilibrat generalizat. Aceeași afirmație se poate face relativ la un receptor dezechilibrat real, deci pentru care  $z_1, z_2, z_3$  se găsesc în cadranele I și IV. Dezechilibrul unui receptor real se mărește atunci când  $|z_h|$  devine tot mai mic, una din posibilități fiind atunci când triunghiul 123 se deplasează prin translație spre stânga. La limită, un vârf al triunghiului ajunge pe axa imaginară (în particular, în origine) (fig.1.9).

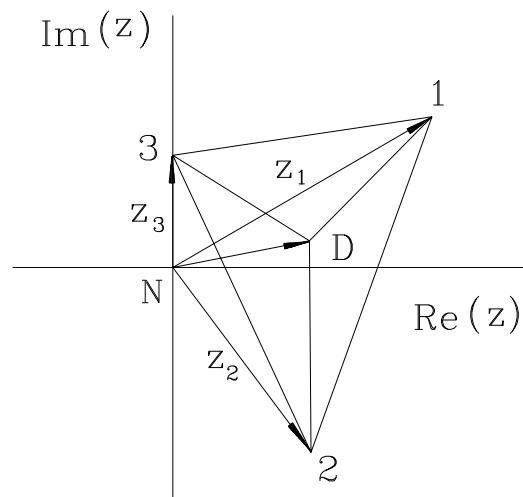


Fig. 1.9 Reprezentarea în planul complex al impedanțelor a unui receptor trifazat dezechilibrat real având în faza 3 o inductanță

Un alt caz particular avem atunci când două vârfuri se găsesc pe axa imaginară (fig.1.10)

Receptorul extrem dezechilibrat real se obține atunci când  $|z_h| \rightarrow 0$ , deci când  $D \rightarrow N$ . Triunghiul este extrem de aplatizat, la limită vârfurile 1, 2, 3 se vor găsi pe axa imaginară iar centrul de greutate al triunghiului 123 va coincide cu originea sistemului de coordonate (fig.1.11)

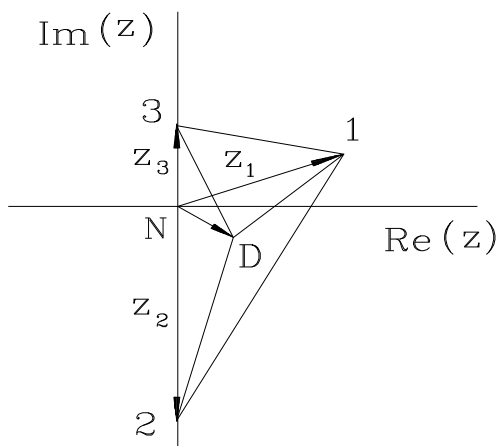


Fig. 1.10 Reprezentarea în planul complex al impedanțelor a unui receptor trifazat dezechilibrat real având în faza 2 o capacitate și în faza 3 o inductanță

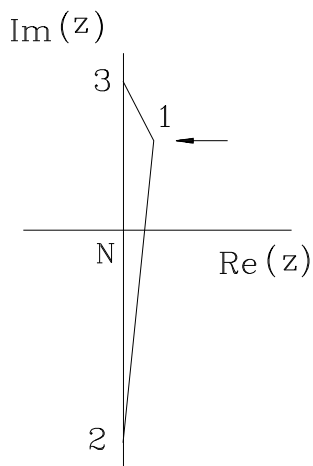


Fig. 1.11 Reprezentarea în planul complex al impedanțelor a unui receptor extrem dezechilibrat real

În figura 1.12 este redat un caz particular de receptor extrem dezechilibrat real.

Pe faza 3 avem o inductivitate cu reactanța  $X_L$ , pe faza 2 avem o capacitate cu reactanța  $X_C$  ( $X_L = |X_C|$ ), iar pe faza 1 avem practic un scurtcircuit.

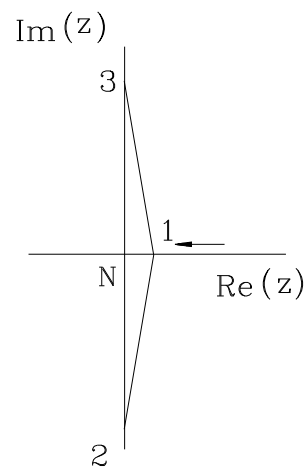


Fig. 1.12 Reprezentarea în planul complex al impedanțelor a unui receptor extrem dezechilibrat real (caz particular)

#### 1.4. Ecuația de tensiuni și curenți

În cele ce urmează se va considera receptorul trifazat din figura 1.3 în conexiune stea cu fir neutru, luându-se în considerare și impedanța firului neutru  $Z_N$  (fig.1.13)

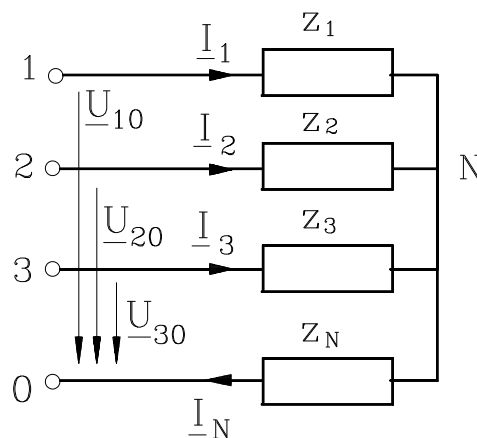


Fig. 1.13 Receptor trifazat legat în stea, cu fir neutru de impedanță  $Z_N$

Sistemul de tensiuni de fază de alimentare  $\underline{U}_{10}$ ,  $\underline{U}_{20}$ ,  $\underline{U}_{30}$  este în general nesimetric. De asemenea, considerăm receptorul în general dezechilibrat.

Aplicând legea lui Ohm pe fiecare fază, teorema I a lui Kirchhoff în nodul N precum și teorema Stokvis-Fortescue sistemelor de tensiuni și de curenți, se obține în urma unui calcul următoarea ecuație matricială:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_h + 3z_N & z_i & z_d \\ z_d & z_h & z_i \\ z_i & z_d & z_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Pentru exprimarea componentelor simetrice ale curenților se inversează relația (1.8)

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} z_h^2 - z_d z_i & z_d^2 - z_h z_i & z_i^2 - z_h z_d \\ z_i^2 - z_h z_d & z_h^2 - z_d z_i + 3z_N z_h & z_d^2 - z_h z_i - 3z_N z_i \\ z_d^2 - z_h z_i & z_i^2 - z_h z_d - 3z_N z_d & z_h^2 - z_d z_i + 3z_N z_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

unde:

$$D = z_h^3 + z_d^3 + z_i^3 - 3z_h z_d z_i + 3z_N z_h^2 - 3z_N z_d z_i \quad (1.10)$$

Puterea complexă cedată pe la borne de rețea (generator) este:

$$\underline{S}_g = \underline{U}_{10} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{20} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{30} \underline{I}_3^* \quad (1.11)$$

care se poate exprima în urma unui calcul:

$$\underline{S}_g = 3\underline{U}_h \underline{I}_h^* + 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* + 3\underline{U}_i \underline{I}_i^* \quad (1.12)$$

Puterea complexă primită de receptorul trifazat cu impedanțele  $z_1, z_2, z_3$  și de impedanța firului neutru este:

$$\underline{S} = \underline{U}_{1N} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{2N} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{3N} \underline{I}_3^* + \underline{U}_{NO} \underline{I}_N^* \quad (1.13)$$

care se poate aduce la forma:

$$\underline{S} = \underline{S}_g \quad (1.14)$$

și prin urmare

$$\underline{S} = 3\underline{U}_h \underline{I}_h^* + 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* + 3\underline{U}_i \underline{I}_i^* \quad (1.15)$$

Puterea complexă consumată în impedanța firului neutru este:

$$\underline{S}_N = \underline{U}_{NO} \underline{I}_N^* = 9z_N I_h^2 \quad (1.16)$$

Din relația (1.9) observăm că în general componentele simetrice ale curenților depind de toate componentele simetrice ale tensiunilor (dacă  $z_h \neq 0$ ;  $z_d \neq 0$ ;  $z_i \neq 0$ ). O serie de cazuri particulare pot fi puse în evidență considerând situații când unii din parametrii următori sunt nuli:  $\underline{U}_h, \underline{U}_d, \underline{U}_i, z_h, z_d, z_i, z_N$ . [P7], [P18].

Un caz particular important este atunci când sistemul tensiunilor de alimentare are numai componentă simetrică directă. Consumatorul este alimentat de la un generator trifazat simetric cu conexiune stea cu impedanțele interne nule (de putere infinită).

În acest caz, ecuația (1.9) se poate scrie în felul următor:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} z_d^2 - z_h z_i \\ z_h^2 - z_d z_i + 3z_N z_h \\ z_i^2 - z_h z_d - 3z_N z_d \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

iar relația (1.12) devine:

$$\underline{S}_g = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.18)$$

## 1.5. Analiza receptorului dezechilibrat real

Presupunem că sistemul tensiunilor de alimentare are numai componentă simetrică directă.

Ecuația matricială (1.8) se poate descompune în trei părți, referitoare la partea echilibrată, la cea dezechilibrată și la impedanța firului neutru.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_h & 0 & 0 \\ 0 & z_h & 0 \\ 0 & 0 & z_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & z_i & z_d \\ z_d & 0 & z_i \\ z_i & z_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3z_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Vom folosi și ecuația curenților (1.17).

Pentru partea echilibrată putem scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} z_h & 0 & 0 \\ 0 & z_h & 0 \\ 0 & 0 & z_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_E = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} z_h z_d^2 - z_h^2 z_i \\ z_h^3 - z_h z_d z_i + 3z_N z_h^2 \\ z_h z_i^2 - z_h^2 z_d - 3z_N z_h z_d \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Pentru partea dezechilibrată putem scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_D = \begin{bmatrix} 0 & z_i & z_d \\ z_d & 0 & z_i \\ z_i & z_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_D = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} z_h^2 z_i - z_h z_d^2 + 3z_N z_h z_i - 3z_N z_d^2 \\ z_d^3 + z_i^3 - 2z_h z_d z_i - 3z_N z_d z_i \\ z_h^2 z_d - z_h z_i^2 + 3z_N z_h z_d \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Pentru firul neutru putem scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} 3z_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_N = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} 3z_N z_d^2 - 3z_N z_h z_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Se observă imediat că avem:

$$\underline{U}_h = \underline{U}_{hE} + \underline{U}_{hD} + \underline{U}_{hN} = 0 \quad (1.26)$$

$$\underline{U}_d = \underline{U}_{dE} + \underline{U}_{dD} + \underline{U}_{dN} = 0, \text{ cu } \underline{U}_{dN} = 0 \quad (1.27)$$

$$\underline{U}_i = \underline{U}_{iE} + \underline{U}_{iD} + \underline{U}_{iN} = 0, \text{ cu } \underline{U}_{iN} = 0 \quad (1.28)$$

de unde rezultă:

$$\underline{U}_{hE} = -\underline{U}_{hD} - \underline{U}_{hN} \quad (1.29)$$

$$\underline{U}_{dE} + \underline{U}_{dD} = \underline{U}_d \quad (1.30)$$

$$\underline{U}_{iE} = -\underline{U}_{iD} \quad (1.31)$$

În continuare, vom analiza puterile absorbite de receptorul dezechilibrat real (**RDR**).

Puterile pentru partea echilibrată sunt:

$$\underline{S}_{hE} = 3\underline{U}_{hE} \underline{I}_h^* = 3 \frac{z_h z_d^2 - z_h^2 z_i}{D} \underline{U}_d \underline{I}_h^* \quad (1.32)$$

$$\underline{S}_{dE} = 3\underline{U}_{dE} \underline{I}_d^* = 3 \frac{z_h^3 - z_h z_d z_i + 3z_N z_h^2}{D} \underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.33)$$

$$\underline{S}_{iE} = 3\underline{U}_{iE} \underline{I}_i^* = 3 \frac{z_h z_i^2 - z_h^2 z_d - 3z_N z_h z_d}{D} \underline{U}_d \underline{I}_i^* \quad (1.34)$$

Puterile pentru partea dezechilibrată sunt:

$$\underline{S}_{hD} = 3\underline{U}_{hD} \underline{I}_h^* = 3 \frac{z_h^2 z_i - z_h z_d^2 + 3z_N z_h z_i - 3z_N z_d^2}{D} \underline{U}_d \underline{I}_h^* \quad (1.35)$$

$$\underline{S}_{dD} = 3\underline{U}_{dD} \underline{I}_d^* = 3 \frac{z_d^3 + z_i^3 - 2z_h z_d z_i - 3z_N z_d z_i}{D} \underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.36)$$

$$\underline{S}_{iD} = 3\underline{U}_{iD} \underline{I}_i^* = 3 \frac{z_h^2 z_d - z_h z_i^2 + 3z_N z_h z_d}{D} \underline{U}_d \underline{I}_i^* \quad (1.37)$$

Puterile pentru impedanță firului neutru sunt:

$$\underline{S}_{hN} = 3\underline{U}_{hN} \underline{I}_h^* = 3 \frac{3z_N z_d^2 - 3z_N z_h z_i}{D} \underline{U}_d \underline{I}_h^* \quad (1.38)$$

$$\underline{S}_{dN} = 3\underline{U}_{dN} \underline{I}_d^* = 0 \quad (1.39)$$

$$\underline{S}_{iN} = 3\underline{U}_{iN} \underline{I}_i^* = 0 \quad (1.40)$$

Se observă că:

$$\underline{S}_{hE} + \underline{S}_{hN} = -\underline{S}_{hD} \quad (1.41)$$

$$\underline{S}_{dE} + \underline{S}_{dD} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* = \underline{S}_g \quad (1.42)$$

$$\underline{S}_{iE} = -\underline{S}_{iD} \quad (1.43)$$

Puterea totală absorbită de receptorul considerat este:

$$\underline{S} = \underline{S}_E + \underline{S}_D + \underline{S}_N \quad (1.44)$$

$$\underline{S}_E = \underline{S}_{hE} + \underline{S}_{dE} + \underline{S}_{iE} \quad (1.45)$$

$$\underline{S}_D = \underline{S}_{hD} + \underline{S}_{dD} + \underline{S}_{iD} \quad (1.46)$$

$$\underline{S}_N = \underline{S}_{hN} + \underline{S}_{dN} + \underline{S}_{iN} \quad (1.47)$$

Rezultă:

$$\underline{S} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* = \underline{S}_d = \underline{S}_g \quad (1.48)$$

Mai putem scrie:

$$\underline{S} = \underline{S}_h + \underline{S}_d + \underline{S}_i \quad (1.49)$$

$$\underline{S}_h = \underline{S}_{hE} + \underline{S}_{hD} + \underline{S}_{hN} = 0 \quad (1.50)$$

$$\underline{S}_d = \underline{S}_{dE} + \underline{S}_{dD} + \underline{S}_{dN} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.51)$$

$$\underline{S}_i = \underline{S}_{iE} + \underline{S}_{iD} + \underline{S}_{iN} = 0 \quad (1.52)$$

Toate aceste puteri pot fi așezate într-o matrice în care sumele laturilor și coloanelor sunt impuse:

$\underline{S}$	$\underline{S}_E$	$\underline{S}_D$	$\underline{S}_N$
$\underline{S}_h$	$\underline{S}_{hE}$	$\underline{S}_{hD}$	$\underline{S}_{hN}$
$\underline{S}_d$	$\underline{S}_{dE}$	$\underline{S}_{dD}$	$\underline{S}_{dN}$
$\underline{S}_i$	$\underline{S}_{iE}$	$\underline{S}_{iD}$	$\underline{S}_{iN}$

Separarea puterilor complexe pe cele două părți ale receptorului dezechilibrat real precum și pe impedanța firului neutru pune în evidență o circulație de putere internă între aceste zone.

Partea echilibrată consumă atât puterea directă  $\underline{S}_{dE}$  cât și puterile homopolară și inversă  $\underline{S}_{hE}$  și  $\underline{S}_{iE}$ . Impedanța firului neutru consumă numai puterea homopolară  $\underline{S}_{hN}$ . Receptorul fiind alimentat de



un generator simetric care furnizează putere numai pe componenta directă, deducem că puterile homopolară și inversă sunt primite prin partea dezechilibrată a receptorului.

Partea dezechilibrată consumă puterea:

$$\underline{S}_D = \underline{S}_{hD} + \underline{S}_{dD} + \underline{S}_{iD} = \underline{S} - \underline{S}_{hE} - \underline{S}_{dE} - \underline{S}_{iE} - \underline{S}_{hN} \quad (1.53)$$

Se poate afirma că partea dezechilibrată a receptorului se comportă ca un convertizor de putere a componentelor simetrice [P6], [P7], [P8], [P18], [P25].

Considerând că în partea echilibrată a receptorului intră și rețeaua de alimentare presupusă ca fiind și ea echilibrată, puterea homopolară și cea inversă aferentă acestei rețele este efectiv un consum suplimentar față de situația unui receptor echivalent, de aceeași putere, echilibrat.

Se poate desena o diagramă a puterilor complexe, care este o ilustrare grafică a relațiilor anterioare. Prin urmare, interpretarea acestei diagrame trebuie să fie nuanțată, strict legată de aceste relații ale puterilor complexe.

Diagrama puterilor complexe este următoarea:

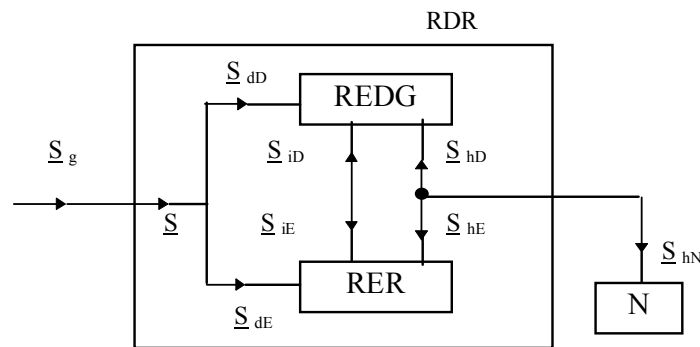


Fig. 1.14 Diagrama puterilor complexe pentru receptorul dezechilibrat real (**RDR**)

Notațiile au următoarele semnificații:

- **REDG** = receptor extrem dezechilibrat generalizat;
- **RER** = receptor echilibrat real;
- **N** = impedanța firului neutru;
- **RDR** = receptor dezechilibrat real.

## 1.6. Analiza receptorului extrem dezechilibrat generalizat

Acest receptor este caracterizat după cum se știe de condiția  $z_h = 0$ . Relațiile (1.4) devin:

$$\begin{cases} z_1 = z_d + z_i \\ z_2 = a^2 z_d + a z_i \\ z_3 = a z_d + a^2 z_i \end{cases} \quad (1.54)$$

Inlocuind pe  $a$  și  $a^2$  cu valorile cunoscute ( rădăcini cubice complexe ale unității ) obținem:

$$\begin{cases} z_1 = z_d + z_i \\ z_2 = -\frac{z_d + z_i}{2} + j\frac{z_i - z_d}{2}\sqrt{3} \\ z_3 = -\frac{z_d + z_i}{2} - j\frac{z_i - z_d}{2}\sqrt{3} \end{cases} \quad (1.55)$$

Presupunem și acum că sistemul tensiunilor de alimentare are numai componenta simetrică directă.

Ecuția matricială a tensiunilor (1.19) ia următoarea formă:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z_i & z_d \\ z_d & 0 & z_i \\ z_i & z_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3z_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

Ecuția curenților (1.17) devine:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} z_d^2 \\ -z_d z_i \\ z_i^2 - 3z_N z_d \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

unde

$$D = z_d^3 + z_i^3 - 3z_N z_d z_i \quad (1.58)$$

Pentru partea dezechilibrată putem scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_D = \begin{bmatrix} 0 & z_i & z_d \\ z_d & 0 & z_i \\ z_i & z_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_D = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} -3z_N z_d^2 \\ z_d^3 + z_i^3 - 3z_N z_d z_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

Pentru firul neutru putem scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} 3z_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_N = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} 3z_N z_d^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

Se observă că avem relațiile:

$$\underline{U}_h = \underline{U}_{hD} + \underline{U}_{hN} = 0 \quad (1.63)$$

$$\underline{U}_d = \underline{U}_{dD} + \underline{U}_{dN}, \text{ cu } \underline{U}_{dN} = 0 \quad (1.64)$$

$$\underline{U}_i = \underline{U}_{iD} + \underline{U}_{iN} = 0, \text{ cu } \underline{U}_{iD} = 0 \text{ și } \underline{U}_{iN} = 0 \quad (1.65)$$

de unde rezultă:

$$\underline{U}_{hD} = -\underline{U}_{hN} \quad (1.66)$$

$$\underline{U}_{dD} = \underline{U}_d \quad (1.67)$$

$$\underline{U}_{iD} = 0 \quad (1.68)$$

Vom calcula puterile absorbite de receptorul extrem dezechilibrat generalizat (**REDG**).

Puterile pentru partea dezechilibrată sunt:

$$\underline{S}_{hD} = 3\underline{U}_{hD} \underline{I}_h^* = -9 \frac{z_N z_d^2}{D} \underline{U}_d \underline{I}_h^* \quad (1.69)$$

$$\underline{S}_{dD} = 3\underline{U}_{dD} \underline{I}_d^* = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.70)$$

$$\underline{S}_{iD} = 3\underline{U}_{iD} \underline{I}_i^* = 0 \quad (1.71)$$

Puterile pentru impedanța firului neutru sunt:

$$\underline{S}_{hN} = 3\underline{U}_{hN} \underline{I}_h^* = 9 \frac{z_N z_d^2}{D} \underline{U}_d \underline{I}_h^* \quad (1.72)$$

$$\underline{S}_{dN} = 3\underline{U}_{dN} \underline{I}_d^* = 0 \quad (1.73)$$

$$\underline{S}_{iN} = 3\underline{U}_{iN} \underline{I}_i^* = 0 \quad (1.74)$$

Se observă că:

$$\underline{S}_{hD} = -\underline{S}_{hN} \quad (1.75)$$

$$\underline{S}_{dD} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* = \underline{S}_g \quad (1.76)$$

$$\underline{S}_{iD} = 0 \quad (1.77)$$

Puterea totală absorbită de receptorul extrem dezechilibrat este:

$$\underline{S} = \underline{S}_D + \underline{S}_N \quad (1.78)$$

$$\underline{S}_D = \underline{S}_{hD} + \underline{S}_{dD} + \underline{S}_{iD} \quad (1.79)$$

$$\underline{S}_N = \underline{S}_{hN} + \underline{S}_{dN} + \underline{S}_{iN} \quad (1.80)$$

Rezultă:

$$\underline{S} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* = \underline{S}_g \quad (1.81)$$

Mai putem scrie:

$$\underline{S} = \underline{S}_h + \underline{S}_d + \underline{S}_i \quad (1.82)$$

$$\underline{S}_h = \underline{S}_{hD} + \underline{S}_{hN} = 0 \quad (1.83)$$

$$\underline{S}_d = \underline{S}_{dD} + \underline{S}_{dN} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.84)$$

$$\underline{S}_i = \underline{S}_{iD} + \underline{S}_{iN} = 0 \quad (1.85)$$

Și în acest caz se poate evidenția o circulație de putere internă între partea dezechilibrată și impedanța firului neutru. Impedanța firului neutru consumă numai puterea homopolară  $\underline{S}_{hN}$ . Receptorul fiind alimentat cu un sistem simetric de tensiuni, el primește putere numai pe componenta directă. Puterea homopolară este deci primită de impedanța firului neutru prin intermediul receptorului extrem dezechilibrat.

Partea dezechilibrată consumă puterea:

$$\underline{S}_D = \underline{S}_{hD} + \underline{S}_{dD} + \underline{S}_{iD} = \underline{S} - \underline{S}_{hN} \quad (1.86)$$

Diagrama puterilor complexe este:

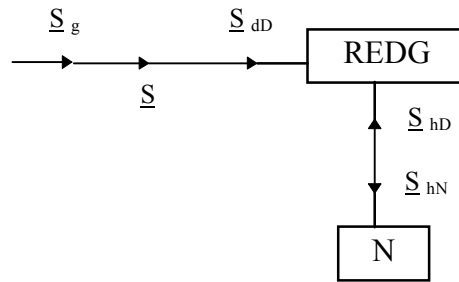


Fig. 1.15 Diagrama puterilor complexe pentru receptorul extrem dezechilibrat generalizat (**REDG**)

Am notat:

- **REDG** = receptorul extrem dezechilibrat generalizat;

- **N** = impedanța firului neutru.

Analiza receptorului extrem dezechilibrat generalizat poate fi extinsă, considerând contribuția componentelor simetrice de calcul  $z_d$ ,  $z_i$ , parcurse de componentele simetrice ale curenților.

Din ecuația de tensiuni (1.59) deducem:

$$\underline{U}_{hD} = z_i \underline{I}_d + z_d \underline{I}_i = \underline{U}_{hd} + \underline{U}_{hi} \quad (1.87)$$

$$\underline{U}_{dD} = z_d \underline{I}_h + z_i \underline{I}_i = \underline{U}_{dh} + \underline{U}_{di} \quad (1.88)$$

$$\underline{U}_{iD} = z_i \underline{I}_h + z_d \underline{I}_d = \underline{U}_{ih} + \underline{U}_{id} \quad (1.89)$$

Din ecuația de curenți (1.57) rezultă:

$$\underline{I}_h = \frac{\underline{U}_d}{D} z_d^2 \quad (1.90)$$

$$\underline{I}_d = \frac{U_d}{D} (-z_d z_i) \quad (1.91)$$

$$\underline{I}_i = \frac{U_d}{D} (z_i^2 - 3z_N z_d) \quad (1.92)$$

Înlocuind curenții (1.90), (1.91), (1.92) în relațiile (1.87), (1.88), (1.89) se calculează imediat componentele tensiunilor  $\underline{U}_{hD}$ ,  $\underline{U}_{dD}$  și  $\underline{U}_{iD}$  și se regăsesc expresiile :

$$\underline{U}_{hD} = -3 \frac{U_d}{D} z_N z_d^2 \quad (1.93)$$

$$\underline{U}_{dD} = \underline{U}_d \quad (1.94)$$

$$\underline{U}_{iD} = 0 \quad (1.95)$$

De asemenea, putem evidenția componentele corespunzătoare ale puterilor.

$$\underline{S}_{hD} = 3(z_i \underline{I}_d + z_d \underline{I}_i) \underline{I}_h^* = \underline{S}_{hd} + \underline{S}_{hi} \quad (1.96)$$

$$\underline{S}_{dD} = 3(z_d \underline{I}_h + z_i \underline{I}_i) \underline{I}_d^* = \underline{S}_{dh} + \underline{S}_{di} \quad (1.97)$$

$$\underline{S}_{iD} = 3(z_i \underline{I}_h + z_d \underline{I}_d) \underline{I}_i^* = \underline{S}_{ih} + \underline{S}_{id} \quad (1.98)$$

Rezultă expresiile finale:

$$\underline{S}_{hD} = -9 \frac{z_N z_d^2}{D} \underline{U}_d \underline{I}_h^* \quad (1.99)$$

$$\underline{S}_{dD} = 3 \underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.100)$$

$$\underline{S}_{iD} = 0 \quad (1.101)$$

## 1.7. Analiza receptorului echilibrat real

Acest receptor este caracterizat de condițiile  $z_d = 0$  și  $z_i = 0$ .

Relațiile (1.4) devin:

$$\begin{cases} z_1 = z_h \\ z_2 = z_h \\ z_3 = z_h \end{cases} \quad (1.102)$$

Considerăm și în acest caz că sistemul tensiunilor de alimentare are numai componenta simetrică directă.

Ecuția matricială a tensiunilor ( 1.19 ) devine în acest caz:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_h & 0 & 0 \\ 0 & z_h & 0 \\ 0 & 0 & z_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3z_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.103)$$

Ecuția curenților ( 1.17 ) va avea forma:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} 0 \\ z_h^2 + 3z_N z_h \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.104)$$

unde:

$$D = z_h^3 + 3z_N z_h^2 \quad (1.105)$$

Pentru partea echilibrată putem scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} z_h & 0 & 0 \\ 0 & z_h & 0 \\ 0 & 0 & z_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.106)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_E = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} 0 \\ z_h^3 + 3z_N z_h^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.107)$$

Pentru firul neutru putem scrie:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} 3z_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \quad (1.108)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}_N = \frac{\underline{U}_d}{D} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.109)$$

Observăm că avem relațiile:

$$\underline{U}_h = \underline{U}_{hE} + \underline{U}_{hN} = 0, \text{ cu } \underline{U}_{hN} = 0 \quad (1.110)$$

$$\underline{U}_d = \underline{U}_{dE} + \underline{U}_{dN}, \text{ cu } \underline{U}_{dN} = 0 \quad (1.111)$$

$$\underline{U}_i = \underline{U}_{iE} + \underline{U}_{iN} = 0, \text{ cu } \underline{U}_{iN} = 0 \quad (1.112)$$

de unde rezultă:

$$\underline{U}_{hE} = 0 \quad (1.113)$$

$$\underline{U}_{dE} = \underline{U}_d \quad (1.114)$$

$$\underline{U}_{iE} = 0 \quad (1.115)$$

În continuare vom calcula puterile absorbite de receptorul echilibrat real (**RER**).

Puterile pentru partea echilibrată sunt:

$$\underline{S}_{hE} = 3\underline{U}_{hE} \underline{I}_h^* = 0 \quad (1.116)$$

$$\underline{S}_{dE} = 3\underline{U}_{dE} \underline{I}_d^* = 3 \frac{z_h^3 + 3z_N z_h^2}{D} \underline{U}_d \underline{I}_d^* = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.117)$$

$$\underline{S}_{iE} = 3\underline{U}_{iE} \underline{I}_i^* = 0 \quad (1.118)$$

Puterile pentru impedanța firului neutru sunt:

$$\underline{S}_{hN} = 3\underline{U}_{hN} \underline{I}_h^* = 0 \quad (1.119)$$

$$\underline{S}_{dN} = 3\underline{U}_{dN} \underline{I}_d^* = 0 \quad (1.120)$$

$$\underline{S}_{iN} = 3\underline{U}_{iN} \underline{I}_i^* = 0 \quad (1.121)$$

Se observă că avem relațiile:

$$\underline{S}_{hE} = 0 \quad (1.122)$$

$$\underline{S}_{dE} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* = \underline{S}_g \quad (1.123)$$

$$\underline{S}_{iE} = 0 \quad (1.124)$$

Puterea totală absorbită de receptorul echilibrat este:

$$\underline{S} = \underline{S}_E + \underline{S}_N, \text{ unde } \underline{S}_N = 0 \quad (1.125)$$

$$\underline{S}_E = \underline{S}_{hE} + \underline{S}_{dE} + \underline{S}_{iE} \quad (1.126)$$

Rezultă:

$$\underline{S} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* = \underline{S}_g \quad (1.127)$$

De asemenea, mai putem scrie:

$$\underline{S} = \underline{S}_h + \underline{S}_d + \underline{S}_i \quad (1.128)$$

$$\underline{S}_h = \underline{S}_{hE} + \underline{S}_{hN} = 0 \quad (1.129)$$

$$\underline{S}_d = \underline{S}_{dE} + \underline{S}_{dN} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* \quad (1.130)$$

$$\underline{S}_i = \underline{S}_{iE} + \underline{S}_{iN} = 0 \quad (1.131)$$

În acest caz, impedanța firului neutru nu consumă putere. Receptorul fiind alimentat cu un sistem simetric de tensiuni, el primește putere numai pe componenta directă, care se consumă integral în partea echilibrată a receptorului.

Diagrama puterilor complexe este:

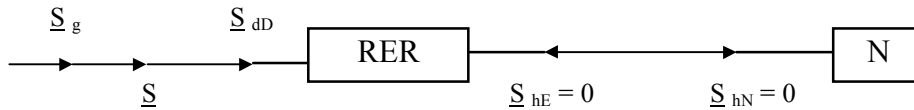


Fig. 1.16 Diagrama puterilor complexe pentru receptorul echilibrat real (RER)

## 1.8. Analiza receptorului echilibrat real alimentat cu un sistem nesimetric de tensiuni

Pentru această situație, putem utiliza ecuația (1.8) în care facem  $z_N = 0$ ,  $z_d = 0$ ,  $z_i = 0$  și obținem :

$$\underline{U}_h = z_h \underline{I}_h \quad ; \quad \underline{U}_d = z_h \underline{I}_d \quad ; \quad \underline{U}_i = z_h \underline{I}_i \quad (1.132)$$

Puterea totală complexă absorbită este:

$$\underline{S} = 3\underline{U}_h \underline{I}_h^* + 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* + 3\underline{U}_i \underline{I}_i^* \quad (1.133)$$

$$\underline{S} = 3z_h \underline{I}_h \underline{I}_h^* + 3z_h \underline{I}_d \underline{I}_d^* + 3z_h \underline{I}_i \underline{I}_i^* \quad (1.134)$$

$$\underline{S} = 3z_h (I_h^2 + I_d^2 + I_i^2) \quad (1.135)$$

Acesta este și cazul părții echilibrate a receptorului dezechilibrat real.

Deoarece  $\text{Re}(z_h) \geq 0$ , putem afirma că receptorul primește putere activă pe toate cele trei componente simetrice. Puterile homopolare și inverse sunt în general deranjante (nedorite). Ele produc consumuri suplimentare și scăderi de randamente la motoare, la alți consumatori precum și în rețelele de alimentare.

## 1.9. Sinteză privind analiza receptorului dezechilibrat real

O caracterizare a receptorului dezechilibrat real se poate face cu ajutorul coeficienților de dezechilibru de calcul ai impedanțelor [P6], [P7], [P8], [P18], [P21].

Coeficientul de dezechilibru al componentei directe este prin definiție :

$$k_d = \frac{z_d}{z_h} \quad (1.136)$$

Coeficientul de dezechilibru al componentei inverse este prin definiție:



$$k_i = \frac{z_i}{z_h} \quad (1.137)$$

Coeficientul de raportare al impedanței firului neutru este:

$$k_N = \frac{z_N}{z_h} \quad (1.138)$$

Coeficienții  $k_d$ ,  $k_i$ ,  $k_N$  sunt în general numere complexe.

Vom considera și receptorul echilibrat care conține pe fiecare fază impedanța  $z_h$ . Evident, acest receptor se obține din receptorul dezechilibrat real când partea dezechilibrată dispăre (triunghiul 123 se “restrânge” în punctul D) Puterea absorbită de acest receptor echilibrat real va fi:

$$\underline{S}_{RER} = 3 \frac{U_d^2}{z_h^*} \quad (1.139)$$

Rezultatele obținute anterior în cazul receptorului dezechilibrat real sunt prezentate în tabelele următoare. Mai precis, prezentăm repartiția căderilor de tensiune și a puterilor pe partea echilibrată, pe partea dezechilibrată și pe impedanța firului neutru.

Alimentarea se face cu un sistem direct de tensiuni ( $\underline{U}_{10}$ ,  $\underline{U}_{20}$ ,  $\underline{U}_{30}$ ).

Tabelul 1.1

Receptor dezechilibrat real (RDR)	Căderi de tensiune
Partea echilibrată (RER)	$\underline{U}_{hE} = \underline{U}_d \frac{k_d^2 - k_i}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i}$
	$\underline{U}_{dE} = \underline{U}_d \frac{1 - k_d k_i + 3k_N}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i}$
	$\underline{U}_{iE} = \underline{U}_d \frac{k_i^2 - k_d - 3k_N k_d}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i}$
Partea dezechilibrată (REDG)	$\underline{U}_{hD} = \underline{U}_d \frac{k_i - k_d^2 + 3k_N k_i - 3k_N k_d^2}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i}$
	$\underline{U}_{dD} = \underline{U}_d \frac{k_d^3 + k_i^3 - 2k_d k_i - 3k_N k_d k_i}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i}$
	$\underline{U}_{iD} = \underline{U}_d \frac{k_d - k_i^2 + 3k_N k_d}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i}$
Impedanța firului neutru (N)	$\underline{U}_{hN} = \underline{U}_d \frac{3k_N k_d^2 - 3k_N k_i}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i}$
	$\underline{U}_{dN} = 0$
	$\underline{U}_{iN} = 0$

Se observă că dacă avem  $k_d = k_i = 0$  se obține  $\underline{U}_{dE} = \underline{U}_d$ , toate celelalte căderi de tensiune devenind egale cu zero. Este cazul unui receptor echilibrat, având pe fiecare fază impedanța  $z_h$ , alimentat cu un sistem simetric direct de tensiuni de fază ale rețelei.

Pentru calculul tabelului cu puteri absorbite exprimate funcție de coeficienții de dezechilibru, procedăm în modul următor. Din relațiile (1.17) obținem curenții:

$$\begin{aligned} \underline{I}_h &= \frac{\underline{U}_d(z_d^2 - z_h z_i)}{z_h^3 + z_d^3 + z_i^3 - 3z_h z_d z_i + 3z_N z_h^2 - 3z_N z_d z_i} \\ \underline{I}_d &= \frac{\underline{U}_d(z_h^2 - z_d z_i + 3z_N z_h)}{z_h^3 + z_d^3 + z_i^3 - 3z_h z_d z_i + 3z_N z_h^2 - 3z_N z_d z_i} \\ \underline{I}_i &= \frac{\underline{U}_d(z_i^2 - z_h z_i + 3z_N z_d)}{z_h^3 + z_d^3 + z_i^3 - 3z_h z_d z_i + 3z_N z_h^2 - 3z_N z_d z_i} \end{aligned} \quad (1.140)$$

Utilizăm relațiile de definiție ale coeficienților de dezechilibru (1.136), (1.137), (1.138).

$$\begin{aligned} \underline{I}_h &= \frac{\frac{\underline{U}_d}{z_h}(k_d^2 - k_i)}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i} \\ \underline{I}_d &= \frac{\frac{\underline{U}_d}{z_h}(1 - k_d k_i + 3k_N)}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i} \\ \underline{I}_i &= \frac{\frac{\underline{U}_d}{z_h}(k_i^2 - k_d - 3k_N k_d)}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i} \end{aligned} \quad (1.141)$$

Să calculăm puterea  $\underline{S}_{hE}$ .

$$\begin{aligned} \underline{S}_{hE} &= 3\underline{U}_{hE} \underline{I}_h^* = 3\underline{U}_d \frac{k_d^2 - k_i}{1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i} \cdot \frac{\underline{U}_d^*}{z_h^*} \frac{(k_d^2 - k_i)^*}{(1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i)^*} \\ \underline{S}_{hE} &= S_{RER} \frac{|k_d^2 - k_i|^2}{|1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i|^2} \end{aligned}$$

Pentru celelalte puteri se procedează asemănător. Se obține următorul tabel.

Tabelul 1.2

<b>Receptor dezechilibrat real (RDR)</b>	<b>Puteri absorbite</b>
<b>Partea echilibrată (RER)</b>	$\underline{S}_{hE} = \underline{S}_{RER} \frac{ k_d^2 - k_i ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{dE} = \underline{S}_{RER} \frac{ 1 - k_d k_i + 3k_N ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{iE} = \underline{S}_{RER} \frac{ k_i^2 - k_d - 3k_N k_d ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i ^2}$
<b>Partea dezechilibrată (REDG)</b>	$\underline{S}_{hD} = -\underline{S}_{RER} \frac{(1 + 3k_N)  k_d^2 - k_i ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{dD} = \underline{S}_{RER} \frac{(k_d^3 + k_i^3 - 2k_d k_i - 3k_N k_d k_i) (1 - k_d k_i + 3k_N)^*}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{iD} = -\underline{S}_{RER} \frac{ k_i^2 - k_d - 3k_N k_d ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i ^2}$
<b>Impedanța firului neutru (N)</b>	$\underline{S}_{hN} = \underline{S}_{RER} \frac{3k_N  k_d^2 - k_i ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i + 3k_N - 3k_N k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{dN} = 0$
	$\underline{S}_{iN} = 0$

Și în acest tabel făcând  $k_d = k_i = 0$  se obține  $\underline{S}_{dE} = \underline{S}_{RER}$ , cazul consumatorului echilibrat amintit anterior (toate celelalte puteri sunt nule).

Atât în tabelul 1.1 cât și în tabelul 1.2 putem face pe rând  $k_i = 0$  și  $k_d = 0$  și obținem expresiile corespunzătoare cazurilor particulare respective.

Relativ la tabelele 1.1 și 1.2 se pot face unele observații care reprezintă de fapt regăsirea și sublinierea unor proprietăți esențiale puse în evidență anterior.

1. Căderile de tensiune verifică relațiile:

$$\underline{U}_{hE} + \underline{U}_{hD} + \underline{U}_{hN} = 0 \quad (1.142)$$

$$\underline{U}_{dE} + \underline{U}_{dD} + \underline{U}_{dN} = \underline{U}_d \quad (1.143)$$

$$\underline{U}_{iE} + \underline{U}_{iD} + \underline{U}_{iN} = 0 \quad (1.144)$$

2. Pentru puteri se poate face o observație asemănătoare:

$$\underline{S}_{hE} + \underline{S}_{hD} + \underline{S}_{hN} = 0 \quad (1.145)$$

$$\underline{S}_{dE} + \underline{S}_{dD} + \underline{S}_{dN} = 3\underline{U}_d \underline{I}_d^* = \underline{S}_g \quad (1.146)$$

$$\underline{S}_{iE} + \underline{S}_{iD} + \underline{S}_{iN} = 0 \quad (1.147)$$

3. Deoarece  $\underline{S}_{\text{RER}}$  are partea reală pozitivă, din tabelul 1.2 rezultă imediat că puterea activă inversă corespunzătoare părții extrem dezechilibrată este negativă, deci este o putere generată de partea extrem dezechilibrată a receptorului.

Puterile active corespunzătoare componentelor homopolară și directă pot fi pozitive sau negative.

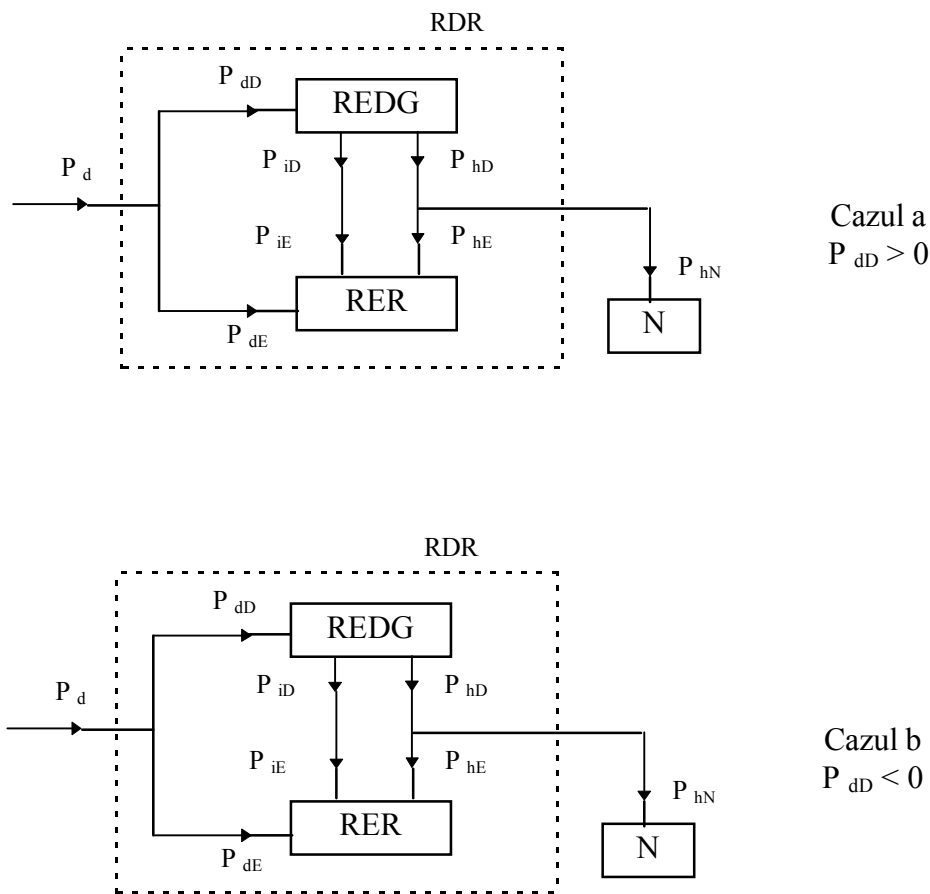
4. Relativ la partea echilibrată, puterile active sunt pozitive pe toate cele trei componente.

5. Pentru impedanța firului neutru, puterea activă corespunzătoare componentei homopolare poate să fie pozitivă sau negativă ( eventual nulă ). Dacă  $k_N$  se reduce la un număr real strict pozitiv, această putere este pozitivă ( în această situație  $z_N$  și  $z_h$  au același argument ). Dacă  $z_N$  este o rezistență pură, de asemenea puterea activă corespunzătoare componentei homopolare este pozitivă.

Considerând circulația internă a puterilor active se pot reprezenta cele două situații cu existența fizică ( fig.1.17, cazurile a și b ).

În figura 1.17 s-a notat:

- **REDG** = receptor extrem dezechilibrat generalizat;
- **RER** = receptor echilibrat real;
- **N** = impedanța firului neutru;
- **RDR** = receptor dezechilibrat real.

Fig.1.17 Diagrama puterilor active pentru receptorul dezechilibrat real (**RDR**)

Prezintă interes studierea puterii directe corespunzătoare părții dezechilibrate și echilibrate, respectiv raportul acestor puteri:

$$\frac{\underline{S}_{dD}}{\underline{S}_{dE}} = \frac{(k_d^3 + k_i^3 - 2k_d k_i - 3k_N k_d k_i)(1 - k_d k_i + 3k_N)^*}{|1 - k_d k_i + 3k_N|^2}$$

sau:

$$\frac{\underline{S}_{dD}}{\underline{S}_{dE}} = \frac{k_d^3 + k_i^3 - 2k_d k_i - 3k_N k_d k_i}{1 - k_d k_i + 3k_N} \quad (1.148)$$

Coefficienții \$k\_d\$, \$k\_i\$, \$k\_N\$ sunt în general numere complexe, ceea ce îngreunează studiul. De asemenea prezintă interes studierea raportului:

$$\frac{\underline{S}_{hD}}{\underline{S}_{hE}} = -1 - 3k_N \quad (1.149)$$

## 1.10. Analiza unor cazuri particulare

Există cazuri particulare de receptoare trifazate dezechilibrate care prezintă interes și au și avantajul unor simplificări de calcule [P6], [P7], [P18].

Un caz particular important este acela în care coeficienții de dezechilibru sunt numere reale. Componentele simetrice de calcul ale impedanțelor vor fi:

$$z_h = ze^{j\alpha} ; z_d = k_d ze^{j\alpha} ; z_i = k_i ze^{j\alpha} ; z_N = k_N ze^{j\alpha} \quad (1.150)$$

unde:  $z, k_d, k_i, k_N$  sunt numere reale,  $z > 0$ .

Impedanțele de fază vor fi:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = (1 + k_d + k_i) ze^{j\alpha} \\ z_2 = \left( 1 - \frac{k_d + k_i}{2} + j\sqrt{3} \frac{k_i - k_d}{2} \right) ze^{j\alpha} \\ z_3 = \left( 1 - \frac{k_d + k_i}{2} - j\sqrt{3} \frac{k_i - k_d}{2} \right) ze^{j\alpha} \end{array} \right. \quad (1.151)$$

Din aceste relații deducem că în acest caz impedanțele de pe fazele 2 și 3 au modulele egale și sunt simetrice față de direcția  $e^{j\alpha}$ .

Coeficienții  $k_d, k_i$  fiind numere reale, se simplifică studiul puterii directe corespunzătoare părții dezechilibrate.

Astfel avem:

$$\frac{\underline{S}_{dD}}{\underline{S}_{dE}} = \frac{P_{dD}}{P_{dE}} = \frac{k_d^3 + k_i^3 - 2k_d k_i - 3k_N k_d k_i}{1 - k_d k_i + 3k_N} \quad (1.152)$$

unde membrul drept este un număr real.

Studiind semnul acestui raport, deducem cazurile când partea dezechilibrată se comportă ca un receptor, respectiv ca un generator (semnul este plus sau minus). Pentru un  $k_N$  fixat, reprezentarea într-un plan raportat la un sistem cartezian cu axele  $k_d$  și  $k_i$  permite delimitarea zonelor pozitive și negative.

În cele ce urmează vom presupune că avem  $k_N = 1/3$ , adică  $z_h = 3 z_N$ . Atunci vom avea:

$$\frac{\underline{S}_{dD}}{\underline{S}_{dE}} = \frac{P_{dD}}{P_{dE}} = \frac{k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i}{2 - k_d k_i} \quad (1.153)$$

Ecuțiile:

$$k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i = 0 \quad (1.154)$$

$$2 - k_d k_i = 0 \quad (1.155)$$

reprezintă un foliu al lui Descartes, respectiv o hiperbolă echilateră.

Reprezentarea grafică a celor două curbe este redată în figura 1.18.

Foliul lui Descartes admite asimptota:

$$k_d + k_i + 1 = 0 \quad (1.156)$$

El este simetric față de prima bisectoare și are “vârful” de coordonate  $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .

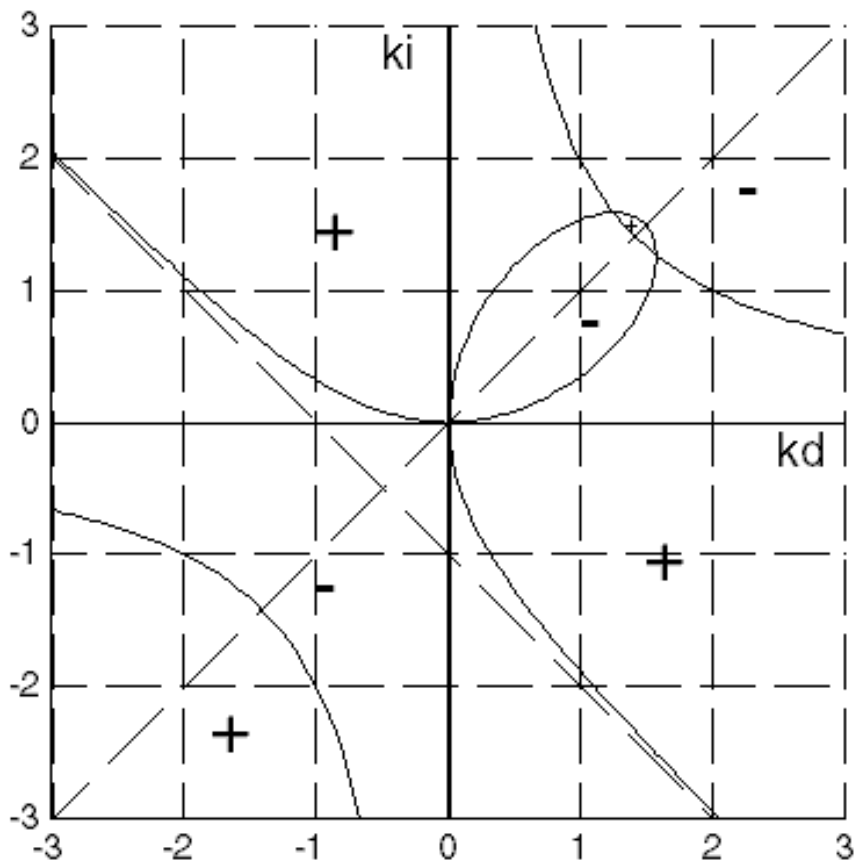


Fig.1.18 Reprezentarea grafică a numărătorului (foliul lui Descartes) respectiv a numitorului (hiperbola echilateră) pentru raportul  $P_{dD} / P_{dE}$

Axele de coordonate sunt tangente la foliu în origine.

Hiperbola echilateră intersectează prima bisectoare în punctele de coordonate  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  și  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ .

Studiind semnul numărătorului și numitorului, rezultă pentru raport 7 regiuni ale planului cu semnele indicate în figură.

În cele patru regiuni ale planului cu semnul plus partea dezechilibrată a receptorului primește putere activă, iar în cele trei regiuni ale planului cu semnul minus partea dezechilibrată a receptorului debitează putere activă.

Considerând punctele de pe prima bisectoare (deci  $k_d = k_i$ ) obținem:

$$\frac{P_{dD}}{P_{dE}} = \frac{2k_d^3 - 3k_d^2}{-k_d^2 + 2} \quad (1.157)$$

cu reprezentarea din figura 1.19. (a).

Asimptota oblică are ecuația  $y = -2x + 3$

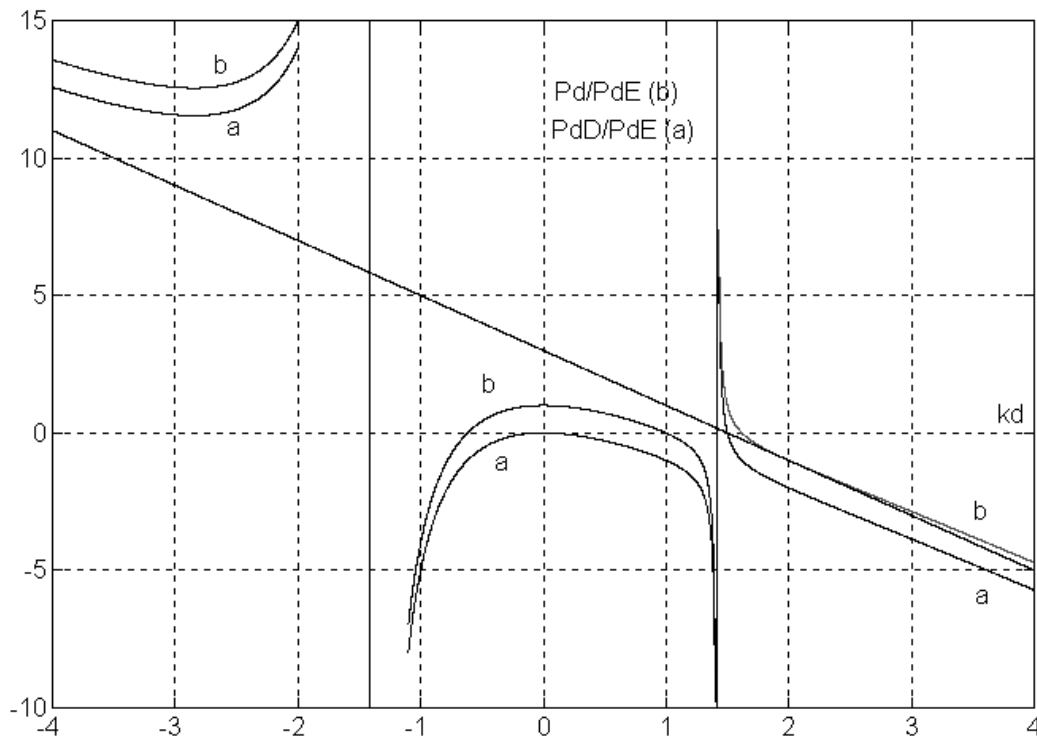


Fig.1.19 Reprezentări grafice pentru situația  $k_d = k_i$

Din figura 1.19 rezultă că partea extrem dezechilibrată este receptor propriu zis pentru

$$k_d \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup \left(\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Partea extrem dezechilibrată se comportă ca un generator pentru:

$$k_d \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

În aceeași figură este reprezentată și curba de variație pentru:



$$\frac{P_d}{P_{dE}} = 1 + \frac{P_{dD}}{P_{dE}} \quad (1.158)$$

( curba b )

Din această curbă deducem că întregul receptor trifazat dezechilibrat devine un generator care debitează putere activă în restul circuitului dacă:

$$k_d \in \left( -\sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \cup (1, \sqrt{2}) \cup \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right)$$

În cazul studiat de noi, această situație nu poate avea existență reală. Pentru restul de valori reale ale lui  $k_d$  avem un receptor propriu zis.

Considerând punctele de pe a doua bisectoare (deci  $k_d = -k_i$ ) obținem:

$$\frac{P_{dD}}{P_{dE}} = \frac{3k_d^2}{2 + k_d^2} \quad (1.159)$$

cu reprezentarea din figura 1.20 (curba a)

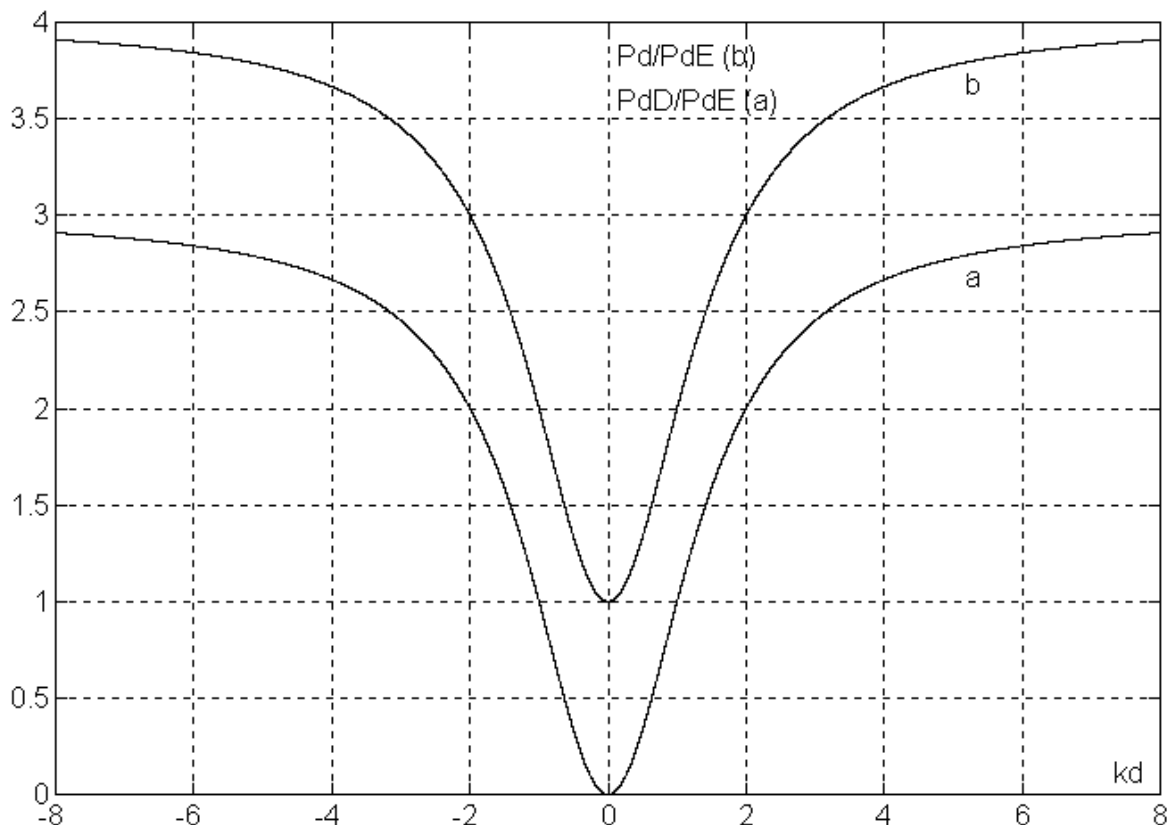


Fig. 1.20 Reprezentări grafice pentru situația  $k_d = -k_i$

În acest caz partea extrem dezechilibrată reprezintă un receptor pentru orice valoare a lui  $k_d$ .

S-a reprezentat și curba:

$$\frac{P_d}{P_{dE}} = 1 + \frac{P_{dD}}{P_{dE}} \quad (1.160)$$

( curba b ).

Sistemul trifazat de impedanțe reprezintă un receptor pentru orice valoare a lui  $k_d$ .

Considerând punctele de pe axa absciselor (deci  $k_i = 0$ ) obținem:

$$\frac{P_{dD}}{P_{dE}} = \frac{1}{2} k_d^3 \quad (1.161)$$

$$\frac{P_d}{P_{dE}} = 1 + \frac{1}{2} k_d^3 \quad (1.162)$$

cu reprezentările din figura 1.21

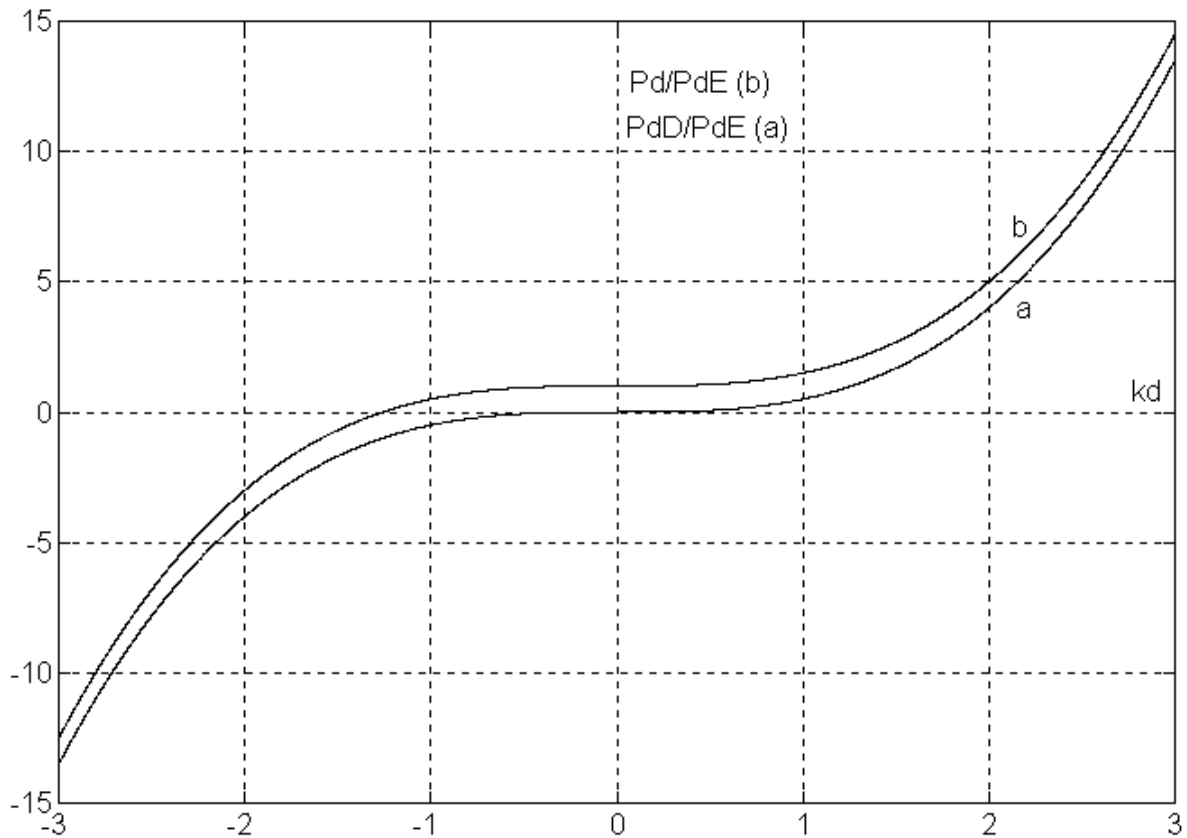


Fig. 1.21 Reprezentări grafice pentru situația  $k_i = 0$

Deci, pentru  $k_d > 0$  (și  $k_i = 0$ ) partea extrem dezechilibrată a receptorului este receptor propriu zis, iar pentru  $k_d < 0$  (și  $k_i = 0$ ) este generator pentru componenta directă a puterii active.

Pentru  $k_d > -\sqrt[3]{2} \approx -1,26$  (și  $k_i = 0$ ) întregul receptor trifazat este un consumator de putere activă. Pentru  $k_d < -\sqrt[3]{2}$  (și  $k_i = 0$ ) întregul receptor trifazat devine un generator care debitează putere activă în restul rețelei. Această situație nu poate avea existență reală în cazul nostru.

Considerând puncte de pe axa ordonatelor (deci  $k_d = 0$ ) obținem:

$$\frac{P_{dD}}{P_{dE}} = \frac{1}{2} k_i^3 \quad (1.163)$$

$$\frac{P_{dD}}{P_{dE}} = 1 + \frac{1}{2} k_i^3 \quad (1.164)$$

cu reprezentările din figura 1.22

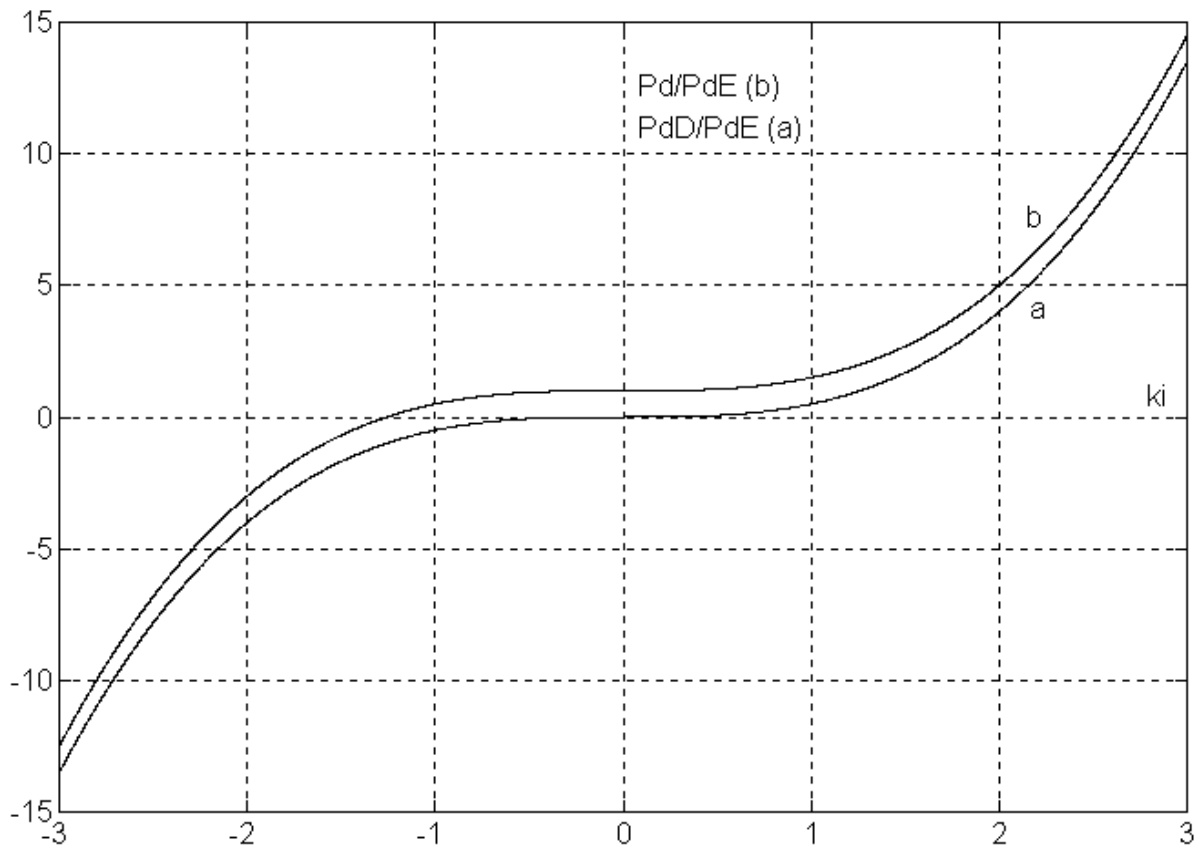


Fig. 1.22 Reprezentări grafice pentru situația  $k_d = 0$

Interpretările sunt asemănătoare cu cele de la cazul anterior (schimbând pe  $k_d$  cu  $k_i$ ).

În aceeași ipoteză a coeficienților de dezechilibru  $k_d$ ,  $k_i$ ,  $k_N$  numere reale, vom studia raportul:

$$\frac{S_{hD}}{S_{hE}} = \frac{P_{hD}}{P_{hE}} = -1 - 3k_N \quad (1.165)$$

Reprezentarea grafică a variației acestui raport în funcție de  $k_N$  este redată în figura 1.23 (a).

In figura 1.23 ( b ) este reprezentată variația raportului:

$$\frac{P_{hN}}{P_{hE}} = -\frac{P_{hD}}{P_{hE}} - 1 = 3k_N \quad (1.166)$$

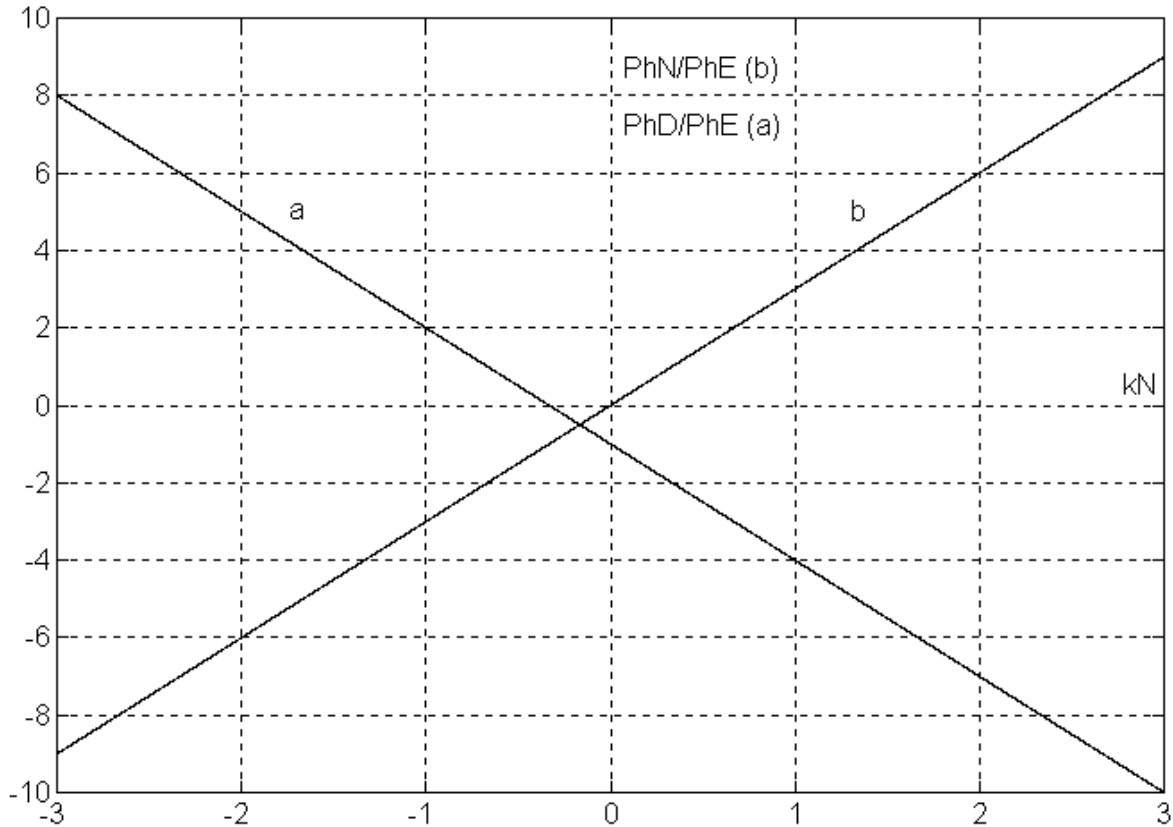


Fig. 1.23 Reprezentări grafice funcție de  $k_N$

Se observă că pentru  $k_N > -\frac{1}{3}$  partea extrem dezechilibrată debitează putere activă pe componenta homopolară.

De asemenea observăm că pentru  $k_N > 0$  impedanța firului neutru absoarbe putere activă pe componenta homopolară.

Revenim la variația raportului considerat anterior, adică:

$$\frac{P_{dD}}{P_{dE}} = \frac{k_d^3 + k_i^3 - 2k_d k_i - 3k_N k_d k_i}{1 - k_d k_i + 3k_N} \quad (1.167)$$

Este utilă și sugestivă reprezentarea 3D a acestui raport, respectiv a suprafeței corespunzătoare, pentru un  $k_N$  fixat. Se observă domeniile din planul variabilelor  $k_d, k_i$  unde raportul este pozitiv sau negativ, cu interpretările aferente.

În continuare, se prezintă câteva reprezentări de acest tip (figurile: 1.24, 1.25, 1.26, 1.27, 1.28).

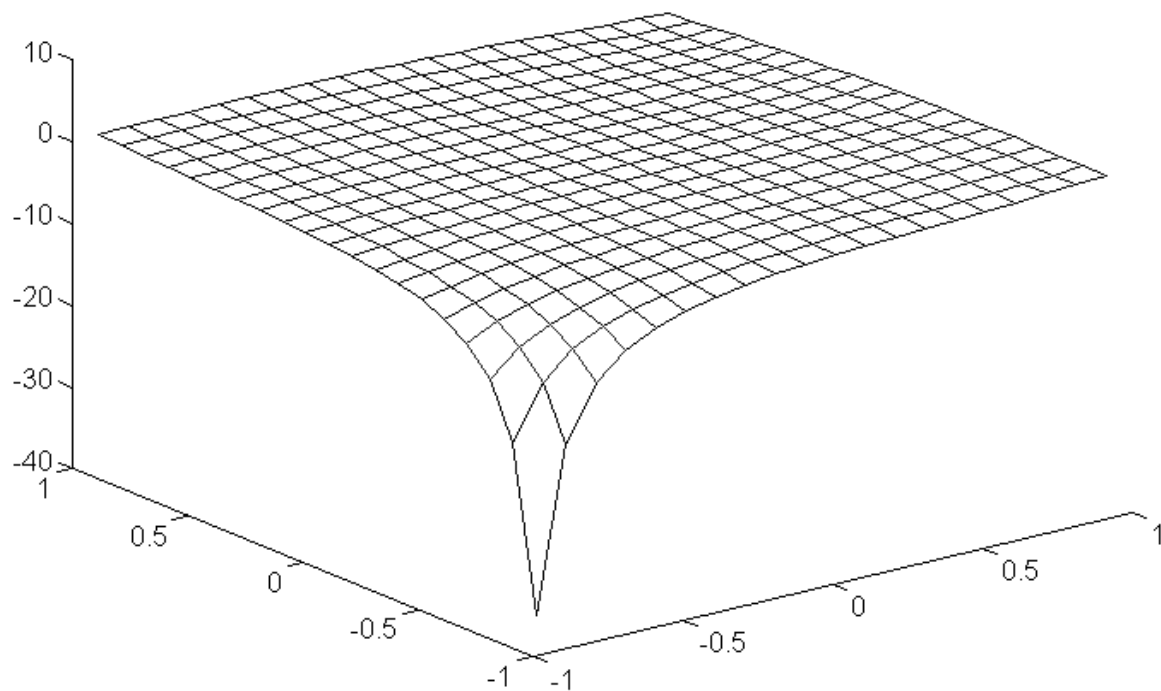


Fig. 1.24. Reprezentarea grafică 3D a variației raportului  $P_{dB}/P_{dE}$  pentru  $k_N = 0$

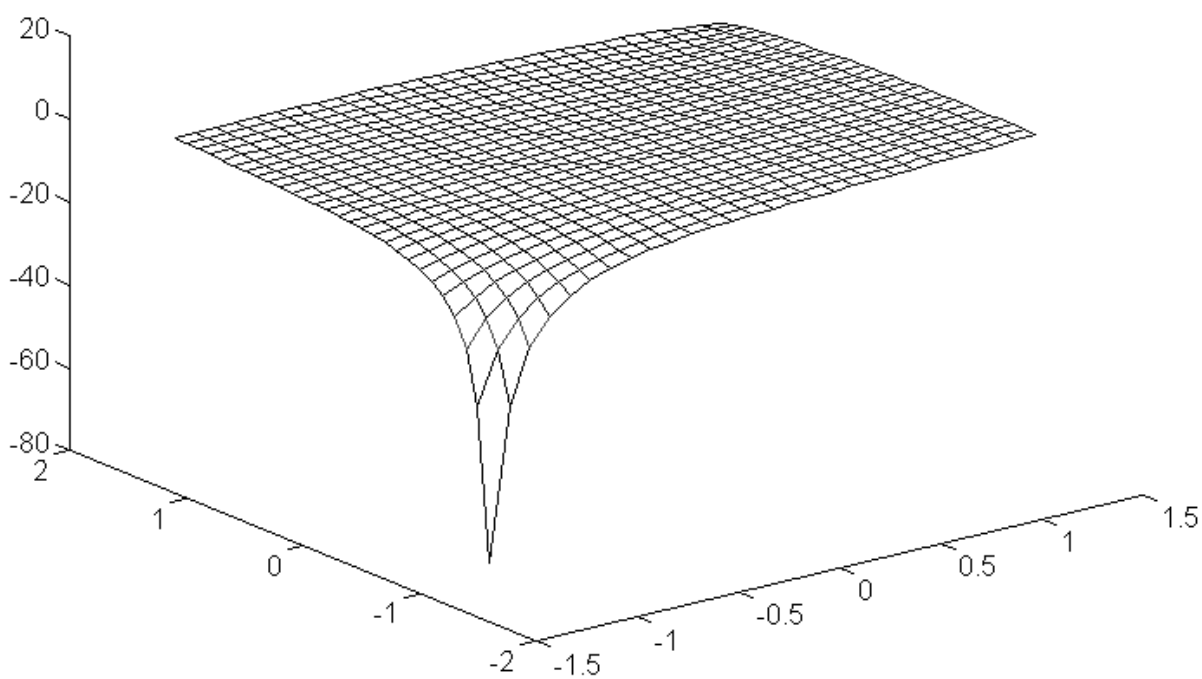


Fig. 1.25. Reprezentarea grafică 3D a variației raportului  $P_{dB}/P_{dE}$  pentru  $k_N = 1/3$

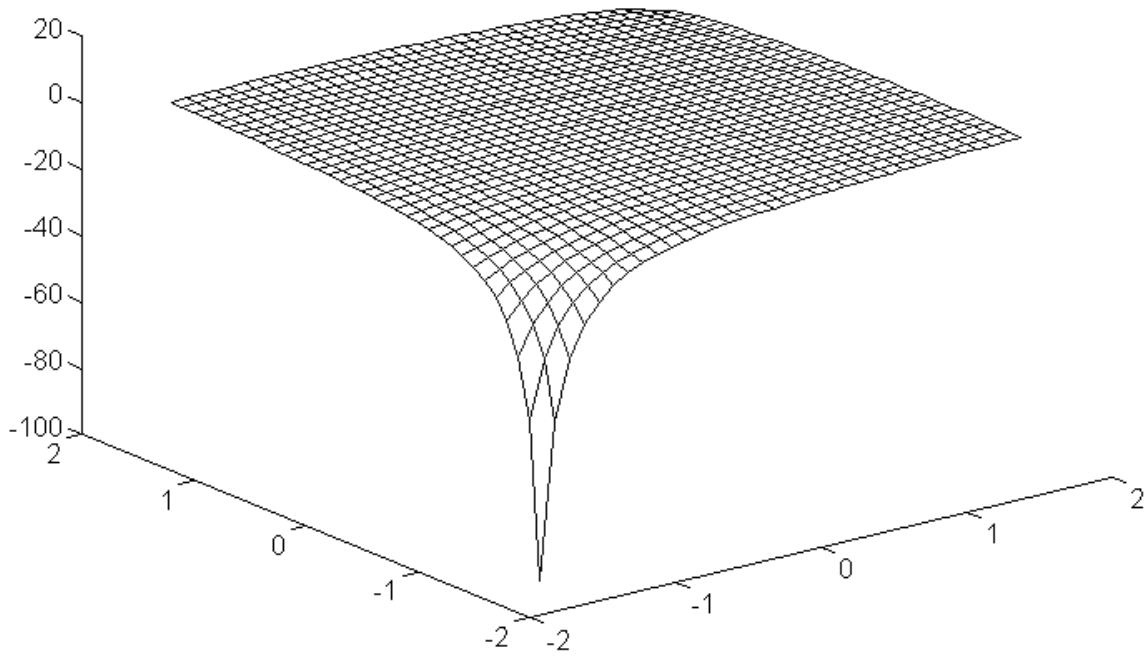


Fig. 1.26. Reprezentarea grafică 3D a variației raportului  $P_{dD}/P_{dE}$  pentru  $k_N = 2/3$

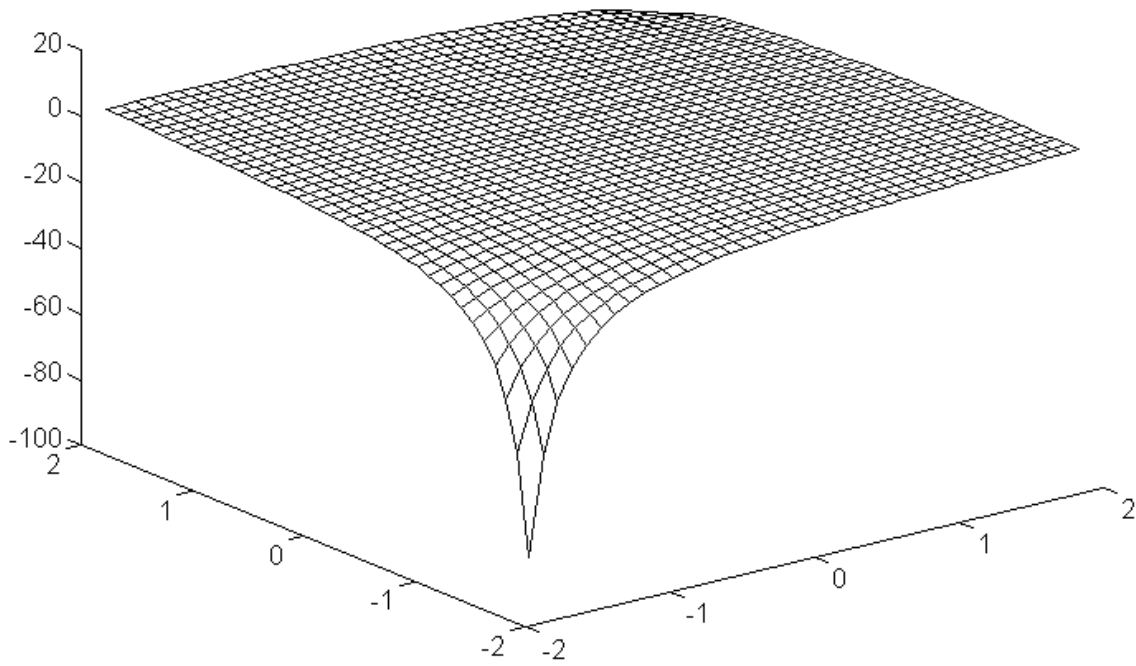


Fig. 1.27. Reprezentarea grafică 3D a variației raportului  $P_{dD}/P_{dE}$  pentru  $k_N = 1$

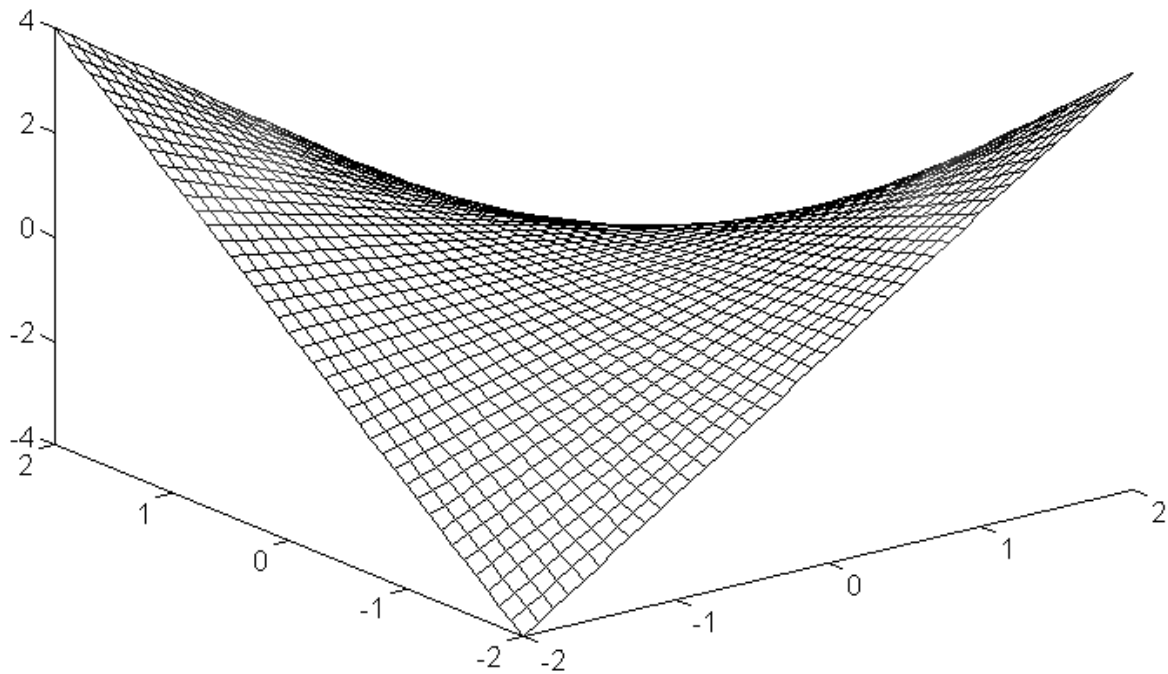


Fig. 1.28. Reprezentarea grafică 3D a variației raportului  $P_{dD}/P_{dE}$  pentru  $k_N = \infty$

### 1.11. Cazurile extreme $z_N = 0$ și $z_N = \infty$

Aceste cazuri extreme (din punctul de vedere al valorii impedanței firului neutru) reprezintă cazurile legării în stea cu fir neutru de impedanță practic nulă, respectiv al legării în stea fără fir neutru.

În fiecare din aceste cazuri se poate face o analiză asemănătoare celei prezentate anterior pentru cazul general al unei impedanțe  $z_N$  oarecare [P6], [P7], [P8], [P18], [P25]. Unele concluzii se pot obține din cazul general, prin trecere la limită.

Astfel, în cazul legării în stea cu fir neutru cu impedanță practic nulă tabelul cu puterile complexe absorbite are următoarea componență (tabelul 1.3).

Tabelul 1.3

<b>Receptor dezechilibrat real (RDR)</b>	<b>Puteri absorbite (<math>z_N = 0</math>)</b>
<b>Partea echilibrată (RER)</b>	$\underline{S}_{hE} = \underline{S}_{RER} \frac{ k_d^2 - k_i ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{dE} = \underline{S}_{RER} \frac{ 1 - k_d k_i ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{iE} = \underline{S}_{RER} \frac{ k_i^2 - k_d ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i ^2}$
<b>Partea dezechilibrată (REDG)</b>	$\underline{S}_{hD} = -\underline{S}_{RER} \frac{ k_d^2 - k_i ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{dD} = \underline{S}_{RER} \frac{(k_d^3 + k_i^3 - 2k_d k_i)(1 - k_d k_i)^*}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{iD} = -\underline{S}_{RER} \frac{ k_i^2 - k_d ^2}{ 1 + k_d^3 + k_i^3 - 3k_d k_i ^2}$
<b>Impedanța firului neutru (N)</b>	$\underline{S}_{hN} = 0$
	$\underline{S}_{dN} = 0$
	$\underline{S}_{iN} = 0$

Raportul (1.152) studiat anterior primește forma:

$$\frac{P_{dD}}{P_{dE}} = \frac{k_d^3 + k_i^3 - 2k_d k_i}{1 - k_d k_i} \quad (1.168)$$

Studiul acestui raport se face asemănător cu cel al cazului general [P6], [P7], [P18].

În cazul legării în stea fără fir neutru, tabelul cu puterile complexe absorbite va avea următoarea formă (tabelul 1.4)



Tabelul 1.4

Receptor dezechilibrat real (RDR)	Puteri absorbite ( $z_N = \infty$ )
Partea echilibrată (RER)	$\underline{S}_{hE} = 0$
	$\underline{S}_{dE} = \underline{S}_{RER} \frac{1}{ 1 - k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{iE} = \underline{S}_{RER} \frac{ k_d ^2}{ 1 - k_d k_i ^2}$
Partea dezechilibrată (REDG)	$\underline{S}_{hD} = 0$
	$\underline{S}_{dD} = \underline{S}_{RER} \frac{-k_d k_i}{ 1 - k_d k_i ^2}$
	$\underline{S}_{iD} = -\underline{S}_{RER} \frac{ k_d ^2}{ 1 - k_d k_i ^2}$
Impedanța firului neutru (N)	$\underline{S}_{hN} = 0$
	$\underline{S}_{dN} = 0$
	$\underline{S}_{iN} = 0$

Raportul (1.152) studiat anterior primește forma:

$$\frac{P_{hD}}{P_{hE}} = -k_d k_i \quad (1.169)$$

Studiul acestui raport se face asemănător cu cel al cazului general [P8].

## 1.12. Concluzii și observații

Având în vedere diferitele aspecte relevate în legătură cu receptorul trifazat dezechilibrat alimentat cu un sistem de tensiuni de fază oarecare (în particular, simetric) putem formula o serie de concluzii.

1. Introducând noțiunea de impedanță generalizată se pot utiliza sistematic componentele simetrice de calcul ale impedanțelor și se poate da o schemă echivalentă a receptorului dezechilibrat, conținând o parte echilibrată și o parte extrem dezechilibrată.

2. Din ecuațiile de tensiuni și de curenți și din expresiile puterilor complexe rezultă componentele tensiunilor și puterilor pe cele trei secvențe (homopolară, directă, inversă) și pe cele trei părți ale receptorului considerat (partea echilibrată, partea extrem dezechilibrată și impedanța firului neutru). Este pusă în evidență o circulație internă de putere între aceste părți ale receptorului, redată în figura 1.14. În același timp se demonstrează că partea extrem dezechilibrată se comportă ca un convertizor de putere a componentelor simetrice.

3. Utilizarea coeficienților de dezechilibru  $k_d$ ,  $k_i$ ,  $k_N$  permite o sistematizare a rezultatelor obținute anterior. Dacă ne referim la circulația puterii active, se deduce că puterea activă inversă aferentă părții extrem dezechilibrate este întotdeauna negativă deci este o putere generată de partea extrem dezechilibrată a receptorului. Partea echilibrată a unui receptor sau un receptor echilibrat absoarbe totdeauna putere activă pe toate cele trei componente. Se evidențiază cele două situații cu existență fizică obiectivă (fig.1.17)

4. În cazul coeficienților de dezechilibru reali se face un studiu detaliat al circulației interne a puterilor active.

5. Ca observație, remarcăm că utilizând metoda expusă se poate face un studiu energetic, considerând impedanțele liniei dintre generator și receptor [P8], [T10], [P18], [P29]. Concluzia care rezultă este că receptoarele dezechilibrate sunt surse (cauze) de puteri și energii de componente homopolare și inverse care sunt absorbite de receptoarele echilibrate, inclusiv de rețelele de alimentare care pot fi considerate ca fiind de asemenea echilibrate. Consecința acestor circulații de puteri de componente simetrice este creșterea consumului tehnologic al rețelelor care se adaugă influențelor negative asupra funcționării consumatorilor echilibrați. Astfel, se știe că funcționarea motoarelor asincrone trifazate în regimuri nesimetrice este însoțită de scăderea randamentului și în general a performanțelor de lucru, datorită apariției câmpului magnetic învârtitor invers.

Se impune prin urmare compensarea dezechilibrului la consumatorii trifazați. Această compensare are mari avantaje tehnice și economice, fiind o problemă complexă sub aspect teoretic și practic. În general, problema trebuie rezolvată în corelare cu necesitatea compensării și a armonicilor superioare și bineînțeles a îmbunătățirii factorului de putere [P6], [P7], [P8], [T10], [T11],[T12], [P5], [I1], [P18], [P29].

La elaborarea acestui capitol, autorul a adus o serie de contribuții originale care vor fi enumerate în continuare:

- Propun o nouă clasificare a receptoarelor trifazate și anume în receptoare trifazate dezechilibrate, receptoare trifazate echilibrate și receptoare trifazate extrem dezechilibrate.
- Propun denumirea de impedanță generalizată pentru impedanța cu partea reală negativă. În literatura de specialitate am întâlnit denumirea de impedanță ideală (a se vedea de exemplu lucrarea [P7] aparținând lui E. Pavel), dar consider că denumirea de impedanță generalizată este mai potrivită.
- Introduc noțiunea de receptor extrem dezechilibrat real (**REDR**).
- Propun utilizarea diagramelor energetice pentru puterile complexe aferente celor trei secvențe (homopolară, directă, inversă) și celor trei părți ale receptorului trifazat (partea echilibrată, partea dezechilibrată și impedanța firului neutru). Aceste diagrame energetice permit ilustrarea cu claritate a circulației interne de putere între aceste părți ale receptorului.
- Pun în evidență cele două cazuri cu existență fizică reală care se pot întâlni pentru receptorul dezechilibrat real (**RDR**), considerând circulația internă a puterilor active.
- Efectuez un studiu amănunțit (pentru mai multe situații) al variației raportului  $P_{dD} / P_{dE}$  funcție de coeficienții de dezechilibru ai impedanțelor  $k_d$  și  $k_i$ , în cazul receptorului dezechilibrat real (**RDR**). Pentru evidențierea cât mai sugestivă a variației acestui raport, am realizat și reprezentări 3D (tridimensionale) pentru mai multe valori ale impedanței firului neutru.





CAPITOLUL 2  
RECEPTOARE DEZECHILIBRATE  
DISCRETE



## 2. RECEPTOARE DEZECHILIBRATE DISCRETE

### 2.1. Definiția receptorului dezechilibrat discret

Considerăm un receptor dezechilibrat  $m$  - fazat și schema echivalentă în conexiunea stea (fig. 2.1).

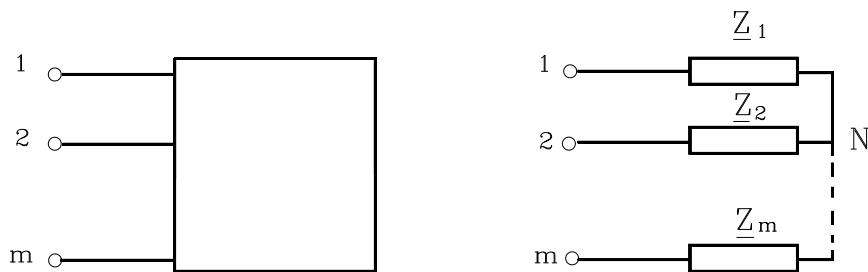


Fig. 2.1 Receptor dezechilibrat  $m$  - fazat și schema echivalentă în stea

În fazele receptorului se găsesc impedanțele complexe  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_m$  și considerăm fazele distincte (discernabile).

Dacă aceste impedanțe sunt formate (prin înseriere) din impedanțe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul  $m$  - fazat receptor dezechilibrat discret (**RDD**). [P19], [P23], [P30].

Presupunem că avem  $n$  impedanțe elementare, anume  $\mu$  clase de impedanțe elementare diferite, clasa  $j$  conținând  $\lambda_j$  impedanțe identice, deci:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n \quad (2.1)$$

Cele  $m$  faze distincte ale receptorului legat în stea conțin câte  $l_i$  impedanțe elementare, cu:

$$\sum_{i=1}^m l_i = n \quad (2.2)$$

Schema unui astfel de receptor dezechilibrat discret este dată în figura 2.2.



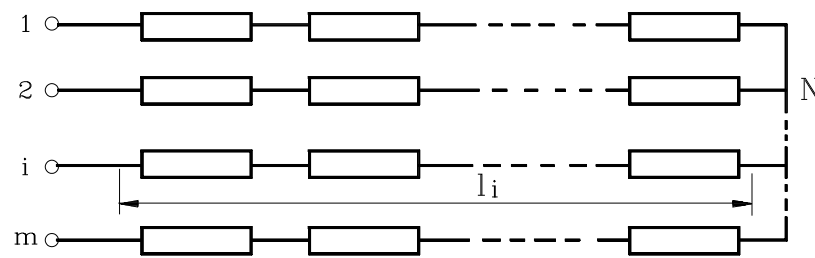


Fig. 2.2 Schema unui receptor dezechilibrat discret (RDD)

Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul  $n$  ( $l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$ ). În cele ce urmează vom subînțelege că receptorii dezechilibrați discreți (**RDD**) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

La transferul unor impedanțe elementare de pe o fază pe alta se obțin receptoare dezechilibrate diferite, care introduc diverse tipuri de dezechilibre în rețeaua din care fac parte.

În particular, unele din aceste receptoare pot fi echilibrate, dar acestea pot fi considerate cazuri limită de receptoare dezechilibrate, în conformitate cu punctul de vedere evidențiat în capitolul 1.

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibrați discreți.

Numărul receptorilor dezechilibrați discreți care pot exista este finit și îl notăm :

$$N = N(\text{RDD}) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} \quad (2.3)$$

Pentru calcul numărului  $N = N(\text{RDD})$  se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [P13], [P17].

## 2.2. Modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret

Modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret este bijecția între două mulțimi multiple. [P15], [P23], [P30].

Considerăm două mulțimi finite  $X$  și  $Y$  având același număr de elemente:  $|X| = |Y| = n$ , precum și mulțimea bijecțiilor  $f: X \rightarrow Y$ , mulțime pe care o notăm  $Y^X$ .

Să considerăm o relație de echivalență ( $\rho_1$ ) definită pe mulțimea  $X$ , care determină o partiție a mulțimii  $X$  în  $\mu$  clase de echivalență  $X_j$  conținând câte  $\lambda_j$  elemente, adică  $|X_j| = \lambda_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, \mu$ ). Elementele unei clase de echivalență vor fi denumite echivalente sau identice. La fel, considerăm o

relație de echivalență ( $\rho_2$ ) definită pe mulțimea Y, care determină o partiție a mulțimii Y în m clase de echivalență,  $Y_i$  conținând câte  $l_i$  elemente, adică  $|Y_i| = l_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

În acest fel, mulțimile X și Y devin mulțimi multiple, adică mulțimi în care elementele se pot repeta. Utilizând aceasta terminologie, putem spune că mulțimea X conține  $\mu$  elemente distincte, elementul j repezându-se de  $\lambda_j$  ori ( $j = 1, 2, \dots, \mu$ ). Asemănător, pentru mulțimea Y ( fig. 2.3 ).

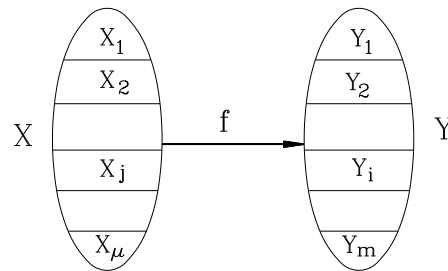


Fig. 2.3 Bijecția între două mulțimi multiple

Vom considera acum un grup G de permutări al mulțimii X și anume produsul simplu (sau direct) al grupurilor simetrice de permutări ale elementelor claselor de echivalență din X [T5], [N2], [P15]. Acest grup se notează astfel:  $G = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_\mu}$  și se definește în felul următor: pentru orice  $\alpha \in G, \alpha_j \in S_{\lambda_j}, x \in X_j$ , avem :

$$\alpha(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_\mu)(x) = \alpha_j(x) \quad (2.4)$$

$$(j = 1, 2, \dots, \mu).$$

Definiția este consistentă. Într-adevăr, deoarece G este o submulțime finită a lui  $S_n$ , pentru ca G să fie un grup de permutări al mulțimii X (subgrup al grupului simetric  $S_n$ ) este suficient să verificăm că pentru orice  $\alpha, \alpha' \in G \Rightarrow \alpha\alpha' \in G$  (am notat cu  $\alpha\alpha'$  compunerea permutărilor  $\alpha$  și  $\alpha'$ ).

Fie  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_\mu)$  și  $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_j, \dots, \alpha'_\mu)$ . Pentru orice  $x \in X_j$ , avem conform definiției :  $\alpha\alpha'(x) = \alpha(\alpha'(x)) = \alpha(\alpha'_j(x)) = \alpha_j(\alpha'_j(x)) = \alpha_j\alpha'_j(x)$ . Se obține deci :

$$\alpha\alpha' = (\alpha_1\alpha'_1, \alpha_2\alpha'_2, \dots, \alpha_j\alpha'_j, \dots, \alpha_\mu\alpha'_\mu) \text{ și se observă că } \alpha\alpha' \in G.$$

Prin urmare, G este un grup de permutări al mulțimii X. Am utilizat teorema de caracterizare a subgroupurilor finite [T5], [P33], [N2].

Deci, prin permutările acestui grup, orice element x al mulțimii X este transformat într-un element care aparține aceleiași clase de echivalență ca și x.

Analog, considerăm și grupul H de permutări al mulțimii Y:

$$H = S_{l_1} \times S_{l_2} \times \dots \times S_{l_m}$$

Pentru orice  $\beta \in H, \beta_i \in S_{l_i}, y \in Y_i$ , avem:

$$\beta(y) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \dots, \beta_m)(y) = \beta_i(y) \quad (2.5)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

Deci, prin permutările acestui grup, orice element  $y$  al mulțimii  $Y$  este transformat într-un element care aparține aceleiași clase de echivalență ca și  $y$ .

Se poate defini o relație de echivalență ( $\rho$ ) pe mulțimea  $Y^x$ , în modul următor:  $f_1 \sim f_2$  dacă există  $\alpha \in G$  și  $\beta \in H$  astfel încât  $f_2 = \beta f_1 \alpha$ .

Să demonstrăm că relația astfel definită este o relație de echivalență pe mulțimea bijecțiilor  $f: X \rightarrow Y$ , în raport cu grupurile  $G$  și  $H$  de permutări.

Relația este reflexivă:  $f \sim f$ , deoarece  $f = \varepsilon_2 f \varepsilon_1$ , unde  $\varepsilon_1 \in G$  și  $\varepsilon_2 \in H$  sunt permutările identice din cele două grupuri de permutări.

Relația este simetrică:  $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1$ . Într-adevăr,  $f_2 = \beta f_1 \alpha$  conduce la  $f_1 = \beta^{-1} f_2 \alpha^{-1}$ , unde  $\alpha^{-1} \in G$  și  $\beta^{-1} \in H$ , ceea ce probează afirmația.

Relația este tranzitivă:  $f_1 \sim f_2$  și  $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3$ . Într-adevăr, din  $f_2 = \beta f_1 \alpha$  și  $f_3 = \beta' f_2 \alpha'$  rezultă  $f_3 = \beta' \beta f_1 \alpha \alpha' = \beta'' f_1 \alpha''$ , unde  $\beta' \beta = \beta'' \in H$  și  $\alpha \alpha' = \alpha'' \in G$ .

Relația ( $\rho$ ) de echivalență determină o partiție a mulțimii  $Y^x$  în clase de echivalență. Numărul acestor clase de echivalență se notează astfel :

$$|Y^x / \rho| = G_n^{\binom{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu}{l_1, l_2, \dots, l_m}} \quad (2.6)$$

Observăm că problema expusă mai sus este echivalentă cu problema definirii receptorului dezechilibrat discret (RDD). Considerăm  $n$  impedanțe elementare ( $\mu$  clase de impedanțe, clasa  $j$  conținând  $\lambda_j$  impedanțe identice, deci  $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n$ ) și  $m$  faze, faza  $i$  primind  $l_i$  impedanțe elementare

înseriate, cu  $\sum_{i=1}^m l_i = n$ . Se distribuie cele  $n$  impedanțe în cele  $m$  faze. Numărul de distribuiri posibile este :

$$N = N(\text{RDD}) = G_n^{\binom{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu}{l_1, l_2, \dots, l_m}} \quad (2.7)$$

Prin urmare, modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret este bijecția între două mulțimi multiple iar numărarea receptorilor dezechilibrați discreți (RDD) se reduce la numărarea bijecțiilor între două mulțimi multiple [P15], [P30].

De asemenea, observăm că relația de dezechilibru definită pe mulțimea receptorilor discreți este o relație de echivalență iar clasele de dezechilibru sunt clasele de echivalență corespunzătoare.

În simbolul general  $G_n^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}$ , în cele două paranteze apar partiții ale numărului natural  $n$ , cu alte cuvinte mulțimi multiple de numere naturale ale căror sume sunt  $n$ . Numărul partițiilor numărului natural  $n$  se notează  $P(n)$  [T5], [T6], [T7].

Ordinea indicilor din cele două paranteze nu are importanță. Vom prefera așezarea acestor indici în ordine descrescătoare, în ambele paranteze. Dacă în urma aplicării unor formule de calcul ajungem la indici nuli, aceștia trebuie eliminați.

Vom numi numărul  $n$  ordinul simbolului general definit mai sus.

Acest simbol general are o proprietate foarte importantă și anume proprietatea de simetrie (sau de dualitate) [P13].

Aceasta afirmă că avem întotdeauna următoarea egalitate:

$$G_n^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = G_n^{n(l_1, l_2, \dots, l_m)} \quad (2.8)$$

Pentru a justifica această proprietate, considerăm la început un caz particular

$$G_{7(5,1,1)}^{7(4,3)} = G_{7(4,3)}^{7(5,1,1)} = 4 \quad (2.9)$$

Scriem una din distribuiriile posibile de impedanțe elementare în faze, corespunzător membrului stâng al egalității:

$$\begin{array}{ccc|ccc} z_1 & z_1 & z_1 & z_2 & z_2 & z_2 & z_1 & z_2 & \text{(impedanțe)} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & \text{(faze)} \end{array} \quad (2.10)$$

Putem interverti rolul literelor cu indici cu al cifrelor și presupune că 1, 2, 3 indică tipurile de impedanțe iar  $z_1, z_2$  fazele. Rearanjăm perechile:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ \hline z_1 & z_1 & z_1 & z_1 & z_2 & z_2 & z_2 \end{array} \quad (2.11)$$

Exact aceleași perechi apar în (2.10) și (2.11) numai că au fost inversate rândurile. Dar (2.11) poate fi interpretat ca reprezentând o distribuire a 5 impedanțe elementare de tipul 1, a unei impedanțe elementare de tipul 2 și a unei impedanțe elementare de tipul 3 în fazele  $z_1$  și  $z_2$  care cuprind 4 și respectiv 3 impedanțe elementare. Dar aceasta este una dintre distribuiriile de impedanțe

elementare în faze corespunzătoare membrului drept al egalității (2.9). Rezultă o corespondență biunivocă între cele două mulțimi de distribuiri de impedanțe în faze (deci de **RDD**) care vor avea același număr de elemente și egalitatea (2.8) este justificată, deoarece procedeul expus rămâne evident valabil pe cazul general.

### 2.3. Generalizare

Să presupunem că avem  $k$  impedanțe elementare, anume  $\mu$  clase de impedanțe elementare diferite, clasa  $j$  conținând  $\lambda_j$  impedanțe identice, deci :

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j = k \quad (2.12)$$

Cele  $m$  faze distincte ale receptorului legat în stea pot conține maximum câte  $l_i$  impedanțe elementare, cu:

$$\sum_{i=1}^m l_i = n \quad (2.13)$$

Numărul receptorilor dezechilibrați discreți care pot exista în aceste condiții se notează:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) \quad (2.14)$$

unde avem :  $k \leq n$  [P13]. Pentru  $k = n$  suntem în cazul definit la început, la paragraful 2.1.

Modelul matematic pentru această situație este cel al injecției între două mulțimi multiple.

În conformitate cu definiția, dacă  $l_1 > k$  putem scrie:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) = G_{n-l_1+k(k, l_2, \dots, l_m)}^k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) \quad (2.15)$$

ceea ce constituie o formulă de reducere a ordinului ( de la  $n$  la  $n - l_1 + k$  ).

Simbolul (2.14) are o proprietate foarte importantă:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu, n-k) \quad (2.16)$$

pe care o vom numi relația de complementaritate. Pe baza acestei relații, putem reduce cazul mai general prezentat în acest paragraf la cazul definit inițial, în paragraful 2.1.

Pentru justificarea relației (2.16), observăm că membrul stâng al relației reprezintă numărul de distribuiri a  $k$  impedanțe elementare (  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$  ) în  $m$  faze, fiecare putând primi maximum  $l_1, l_2, \dots, l_m$  impedanțe. Introducând o nouă categorie de impedanțe fictive ( în număr de  $n - k$  ), numărul de impedanțe elementare devine egal cu  $n$ , adică la fiecare distribuire se completează toate locurile

din faze ( semnificația simbolului din membrul drept ). Considerând noua categorie de impedanțe ca impedanțe nule în prima distribuire, rezultă că există o corespondență biunivocă între mulțimile celor două distribuiri, deci numărul lor este egal și cu acesta proprietatea este justificată.

De asemenea, pe baza definiției se poate scrie următoarea relație:

$$G_n^k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) = \sum_R G_k^k(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (2.17)$$

unde R este mulțimea soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = k \quad (2.18)$$

în numere naturale, cu  $0 \leq x_i \leq l_i, i = (1, 2, \dots, m)$ .

Deoarece atât în relația (2.16) cât și în relația (2.17) intervin simboluri de tipul celui definit inițial în paragraful 2.1, rezultă că acest simbol este fundamental (cazul standard ).

## 2.4. Calculul numărului N(RDD)

Autorul acestei teze a elaborat patru metode pentru calculul numărului N(RDD). Acestea sunt :

1. Metoda enumerării
2. Metoda polinoamelor de tip Newton
3. Metoda de recurență
4. Metoda reducerii ordinului

Vom prezenta în continuare aceste metode.

## 2.5. Metoda enumerării

Această metodă, expusă în lucrările [P17], [P19], [P23], [P31] se bazează pe observația că numărul N este egal cu numărul soluțiilor sistemului:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ji} = \lambda_j; j = 1, 2, \dots, \mu \\ \sum_{j=1}^m x_{ji} = l_i; i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (2.19)$$

unde  $\lambda_j, l_i > 0; x_{ji} \geq 0$  sunt numere naturale.

Acest sistem are  $\mu m$  necunoscute și  $\mu + m - 1$  ecuații independente. (datorită condiției

$\sum_{j=1}^k \lambda_j = \sum_{i=1}^m l_i = n$ ). Prin urmare, gradul de nedeterminare al sistemului este :

$$\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1) \quad (2.20)$$

Se observă că numărul  $N$  reprezintă de asemenea numărul matricilor cu  $\mu$  linii și  $m$  coloane, conținând numere naturale, la care sumele liniilor, respectiv ale coloanelor sunt impuse:

$n$	$l_1$	$l_2$	$\dots$	$l_m$	(2.21)
$\lambda_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	$\dots$	$x_{1m}$	
$\lambda_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	$\dots$	$x_{2m}$	
.	.				
.	.				
$\lambda_\mu$	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	$\dots$	$x_{\mu m}$	

Metoda enumerării aplicată “manual” constă în construirea efectivă a matricilor de tipul (2.21) și numărarea lor. Este evident că pentru  $n$  mare aceasta variantă este total nepractică.

Pe baza metodei enumerării s-a realizat un program de calculator (numit programul **RDD**) care generează sistematic matrici de tipul (2.21) și în final dă numărul acestor matrici. Programul pe calculator va fi prezentat în paragraful 2.9.

În continuare vom considera un caz particular și anume vom determina numărul receptorilor dezechilibrați discreți de tipul 7 (3, 2, 2; 4, 3).

Construind sistematic toate matricile posibile de tipul (2.21) obținem:

7	3	2	2	7	3	2	2	7	3	2	2
4	0	2	2	4	1	2	1	4	2	2	0
3	3	0	0	3	2	0	1	3	1	0	2
7	3	2	2	7	3	2	2	7	3	2	2
4	1	1	2	4	2	1	1	4	3	1	0
3	2	1	0	3	1	1	1	3	0	1	2

7	3	2	2
4	2	0	2
3	1	2	0

7	3	2	2
4	3	0	1
3	0	2	1

Prin urmare, avem:  $G_{7(3,2,2)}^{7(4,3)} = 8$ .

Receptorii dezechilibrați discreți corespunzători sunt reprezentați în continuare (fig. 2.4)

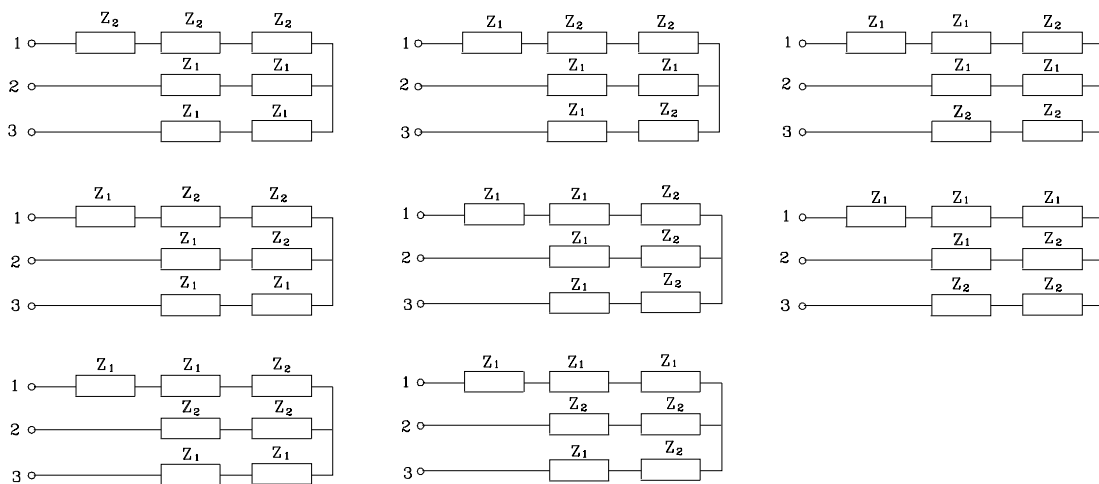


Fig. 2.4 Schemele receptorilor dezechilibrați discreți de tipul 7 (3, 2, 2; 4, 3)

## 2.6. Metoda polinoamelor de tip Newton

Această metodă a fost expusă inițial în lucrările [P15], [P17], [P19], [P23]. Înainte de a prezenta metoda pe cazul general, vom considera un caz particular și anume calculul numărului  $G_{3(1,1,1)}^{3(2,1)}$ . Prin urmare, trebuie să calculăm în câte moduri se pot distribui 3 impedanțe elementare (două de o clasă și una de altă clasă) în trei faze, fiecare fază primind o impedanță elementară.

Să presupunem că fiecare fază ar putea primi toate cele trei impedanțe elementare. Atunci, primele două impedanțe elementare se pot plasa amândouă în prima fază, în a doua, în a treia, o impedanță elementară în prima fază și a doua în a doua, în prima și în a treia sau în a doua și a treia. Acestor posibilități de distribuire a primelor două impedanțe elementare le putem atașa polinomul omogen și simetric de trei variabile :

$$P_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3$$



Gradul polinomului este dat de numărul de impedanțe elementare de aceeași clasă (2) iar numărul de variabile, de numărul de faze (3). Fiecare monom corespunde unei distribuiri.

La fel, a treia impedanță elementară se poate plasa în faza întâi, a doua sau a treia. Scriem polinomul atașat :

$$P_1 = y_1 + y_2 + y_3$$

Fiecărei distribuiri a impedanțelor elementare din prima clasă i se poate atașa o distribuire a impedanței elementare din cealaltă clasă, totalitatea distribuiriilor care rezultă reprezentându-se prin produsul celor două polinoame:

$$P_2 \cdot P_1 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 2y_1^2y_2 + 2y_1^2y_3 + 2y_2^2y_3 + 2y_1y_2^2 + 2y_1y_3^2 + 2y_2y_3^2 + 3y_1y_2y_3$$

Coeficientul unui monom arată de câte ori apare el în polinomul final, deci câte distribuiri de tipul respectiv sunt posibile. In cazul nostru, fiecare fază primește o impedanță elementară, deci distribuiriile sunt de tipul  $y_1y_2y_3$ . Numărul de distribuiri posibile este deci 3 .Exponentul unei variabile arată câte impedanțe elementare sunt în faza reprezentată de variabila respectivă.

O simplificare remarcabilă a calculelor se poate face considerând reprezentarea polinoamelor simetrice și omogene prin sumele variabilelor de aceeași putere (relații tip Newton [K8]).

Astfel, notând:

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3; \quad x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

avem :

$$P_1 = x_1; \quad P_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$$

$$P = P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{2}(x_1^3 + x_1x_2)$$

$$P = \frac{1}{2} \left[ (y_1 + y_2 + y_3)^3 + (y_1 + y_2 + y_3)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \right]$$

Cu formula multinomului [T5] extragem coeficientul monomului  $y_1y_2y_3$ :

$$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{3!}{1!1!1!} = 3$$

Metoda expusă se poate aplica evident pe cazul general. Deci, pentru calculul numărului

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}$$

se procedează astfel:

a ) Se calculează polinomul:

$$P = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdots P_{\lambda_\mu} \quad (2.22)$$

unde  $P_{\lambda_j} = P_{\lambda_j}(x_1, x_2, \dots, x_{\lambda_j})$  este polinomul de tip Newton, de grad  $\lambda_j$  în  $\lambda_j$  variabile.

Deci,  $P = P(x_1, x_2, \dots, x_\lambda)$  va avea gradul  $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n$  și  $\lambda$  variabile, unde

$$\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu).$$

b) Se înlocuiește în P:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 + \dots + y_m \\ x_2 &= y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2 \\ &\dots \dots \dots \\ x_\lambda &= y_1^\lambda + y_2^\lambda + \dots + y_m^\lambda \end{aligned} \quad (2.23)$$

c) Se calculează cu formula multinomului coeficientul monomului  $y_1^{l_1} y_2^{l_2} \dots y_m^{l_m}$  din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Polinomul simetric de m variabile  $y_1, y_2, \dots, y_m$  și omogen de gradul n este dat de relația:

$$P_n = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq m} y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n} \quad (2.24)$$

De asemenea, el se poate exprima prin relația:

$$P_n = \sum_R y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_m^{\alpha_m} \quad (2.25)$$

unde R este mulțimea soluțiilor în numere naturale ale ecuației:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n \quad (2.26)$$

Această ecuație are  $|R| = c_m^n$  soluții (combinări cu repetiție).

Polinomul  $P_n$  se poate exprima în funcție de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , unde :

$$x_j = \sum_{1 \leq i \leq m} y_i^j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.27)$$

având următoarea formă [1] :

$$P_n = \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n \\ k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0}} \frac{1}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! \dots n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \quad (2.28)$$

Numărul de termeni din sumă este P(n), adică numărul de moduri diferite de a scrie pe n ca o sumă de numere naturale, în care ordinea termenilor nu are importanță (sau numărul partițiilor numărului natural n).

Putem demonstra relația (2.28) construind funcția generatoare:

$$G(z) = 1 + P_1 z + P_2 z^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} P_n z^n \quad (2.29)$$

Folosind regulile de înmulțire a seriilor, obținem:

$$G(z) = (1 + y_1 z + y_1^2 z^2 + \dots) \dots (1 + y_m z + y_m^2 z^2 + \dots) = \frac{1}{(1 - y_1 z) \dots (1 - y_m z)} \quad (2.30)$$

Deci:

$$\ln G(z) = \ln \frac{1}{1 - y_1 z} + \dots + \ln \frac{1}{1 - y_m z} = \sum_{k \geq 1} \frac{y_1^k z^k}{k} + \dots + \sum_{k \geq 1} \frac{y_m^k z^k}{k} = \sum_{k \geq 1} \frac{x_k z^k}{k} \quad (2.31)$$

Calculăm din nou dezvoltarea în serie de puteri a lui  $G(z)$  :

$$\begin{aligned} G(z) &= e^{\ln G(z)} = \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{x_k z^k}{k}\right) = \prod_{k \geq 1} \exp \frac{x_k z^k}{k} = \left(1 + x_1 z + \frac{x_1^2 z^2}{2!} + \dots\right) \left(1 + \frac{x_2 z^2}{2} + \frac{x_2^2 z^4}{2^2 \cdot 2!} + \dots\right) \dots = \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n \\ k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0}} \frac{x_1^{k_1}}{1^{k_1} k_1!} \cdot \frac{x_2^{k_2}}{2^{k_2} k_2!} \dots \frac{x_n^{k_n}}{n^{k_n} k_n!} \right) z^n \end{aligned} \quad (2.32)$$

Din relațiile (2.29) și (2.32) rezultă (2.28).

Aplicând formula generală (2.28) se obțin ușor primele opt polinoame de tip Newton:

$$P_1 = x_1 \quad (2.33)$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2) \quad (2.34)$$

$$P_3 = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1 x_2 + 2x_3) \quad (2.35)$$

$$P_4 = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_1^2 x_2 + 8x_1 x_3 + 3x_2^2 + 6x_4) \quad (2.36)$$

$$P_5 = \frac{1}{120}(x_1^5 + 10x_1^3 x_2 + 15x_1 x_2^2 + 20x_1^2 x_3 + 20x_2 x_3 + 30x_1 x_4 + 24x_5) \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} P_6 &= \frac{1}{720}(x_1^6 + 45x_1^4 x_2 + 15x_1^2 x_2^2 + 15x_1^3 x_3 + 40x_1^2 x_3 + 120x_1 x_2 x_3 + 40x_3^2 + 90x_1^2 x_4 + \\ &\quad + 90x_2 x_4 + 144x_1 x_5 + 120x_6) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} P_7 &= \frac{1}{5040}(x_1^7 + 21x_1^5 x_2 + 105x_1^3 x_2^2 + 105x_1 x_2^3 + 70x_1^4 x_3 + 210x_2^2 x_3 + 420x_1^2 x_2 x_3 + 280x_1 x_3^2 + \\ &\quad + 210x_1^3 x_4 + 630x_1 x_2 x_4 + 420x_3 x_4 + 504x_1^2 x_5 + 504x_2 x_5 + 840x_1 x_6 + 720x_7) \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} P_8 &= \frac{1}{40320}(x_1^8 + 28x_1^6 x_2 + 210x_1^4 x_2^2 + 420x_1^2 x_2^3 + 105x_2^4 + 112x_1^5 x_3 + 1120x_1^3 x_2 x_3 + 1680x_1 x_2^2 x_3 + \\ &\quad + 1120x_1^2 x_3^2 + 1120x_2 x_3^2 + 2520x_1^2 x_2 x_4 + 420x_1^4 x_4 + 1260x_2^2 x_4 + 3360x_1 x_3 x_4 + 1260x_4^2 + \\ &\quad + 4032x_1 x_2 x_5 + 1344x_1^3 x_5 + 2688x_3 x_5 + 3360x_1^2 x_6 + 3360x_2 x_6 + 5760x_1 x_7 + 5040x_8) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Polinoamele de tip Newton se pot calcula și cu ajutorul unei formule de recurență [R9].

Notând:

$$P_i = \frac{1}{i!} C_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.41)$$

există următoarea formulă de recurență:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n A_n^k x_{k+1} C_{n-k} \quad (2.42)$$

unde prin convenție vom considera  $P_0 = C_0 = 1$ .

Facem observația că aplicând metoda de numărare Pólya - de Bruijn [T5], [T6] în cazul problemei noastre, se obține în fond metoda de calcul expusă mai sus. Polinoamele  $P_{\lambda_j}$  apar ca polinoamele indicatoare de cicluri pentru grupurile simetrice de permutări.

Vom calcula prin metoda polinoamele de tip Newton numărul  $N = G_{6(3,2,1)}^{6(4,1,1)}$ .

Avem:

$$P = P_4 \cdot P_1^2$$

$$P = \frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_1^4x_2 + 8x_1^3x_3 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4)$$

Înlocuim:

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3;$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2;$$

$$x_3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3;$$

$$x_4 = y_1^4 + y_2^4 + y_3^4;$$

$$P = \frac{1}{24}[(y_1 + y_2 + y_3)^6 + 6(y_1 + y_2 + y_3)^4(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + 8(y_1 + y_2 + y_3)^3(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + 3(y_1 + y_2 + y_3)^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^2 + 6(y_1 + y_2 + y_3)^2(y_1^4 + y_2^4 + y_3^4)]$$

Calculăm coeficientul monomului  $y_1^3y_2^3y_3$  :

$$N = \frac{1}{24} \left[ \frac{6!}{3!2!1!} + 6 \left( \frac{4!}{1!2!1!} + \frac{4!}{3!0!1!} \right) + 8 \cdot \frac{3!}{0!2!1!} + 3 \cdot \frac{2!}{1!0!1!} \cdot 2 \right] = 8$$

## 2.7. Metoda de recurență

Numărul claselor de dezechilibru pentru receptorii dezechilibrați discreți se poate determina și cu ajutorul unor formule de recurență. Acestea permit calculul numărului **N(RDD)** de ordin  $n$  cu ajutorul unor numere **N(RDD)** de ordine mai mici [P32].

Formulele de recurență se deduc ușor, pornind de la definiția numărului **N(RDD)**. Prin ordonarea descrescătoare a indicilor superiori și inferiori și utilizarea proprietății de simetrie facem ca:

$$\lambda_{\mu} = \min (l_1, l_2, \dots, l_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu}) \quad (2.43)$$

a) dacă  $\lambda_{\mu} = 1$ , avem:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu})} = \sum_R G_{n-1(l_1, l_2, \dots, l_i-1, \dots, l_m)}^{n-1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu-1})} \quad (2.44)$$

unde  $R$  este mulțimea soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \quad (2.45)$$

în numere naturale, cu  $0 \leq x_i \leq 1, (i = 1, 2, \dots, m)$ .

Numărul soluțiilor acestei ecuații este:

$$|R| = c_m^1 = m \quad (\text{combinări cu repetiție}) \quad (2.46)$$

b) Dacă  $\lambda_{\mu} = 2$ , avem:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu})} = \sum_R G_{n-2(l_1, l_2, \dots, l_i-2, \dots, l_m)}^{n-2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu-1})} \quad (2.47)$$

unde  $R$  este mulțimea soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 2 \quad (2.48)$$

în numere naturale, cu  $0 \leq x_i \leq 2, (i = 1, 2, \dots, m)$ .

Numărul soluțiilor acestei ecuații este:

$$|R| = c_m^2 = \frac{m(m+1)}{2} \quad (2.49)$$

c) Dacă  $\lambda_{\mu} = 3$ , avem:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu})} = \sum_R G_{n-3(l_1, l_2, \dots, l_i-3, \dots, l_m)}^{n-3(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu-1})} \quad (2.50)$$

unde  $R$  este mulțimea soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 3 \quad (2.51)$$

în numere naturale, cu  $0 \leq x_i \leq 3, (i = 1, 2, \dots, m)$ .

Numărul soluțiilor acestei ecuații este:

$$|R| = c_m^3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6} \quad (2.52)$$

Lista acestor formule de recurență poate fi continuată, dar aplicarea lor devine tot mai grea, datorită creșterii lui  $|R|$ .

Foarte simplă și avantajoasă este aplicarea primelor două formule de recurență, deci pentru  $\lambda_{\mu} = 1$  și  $\lambda_{\mu} = 2$ .

Vom ilustra metoda prin două exemple.

### Exemplul 1

Să se calculeze numărul  $N = G_{10(3,3,2,2)}^{10(4,3,2,1)}$

Aplicând formula ( 2.44 ) obținem:

$$N = G_{9(2,3,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,1,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} = 2 \cdot G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + 2 \cdot G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} = 2 \cdot 109 + 2 \cdot 87 = 392$$

### Exemplul 2

Să se calculeze numărul  $N = G_{10(4,2,2,2)}^{10(3,3,2,2)}$

Aplicând formula ( 2.47 ) obținem:

$$N = G_{8(2,2,2,2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,0,2,2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,2,0,2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,2,2,0)}^{8(3,3,2)} + G_{8(3,1,2,2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(3,2,1,2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(3,2,2,1)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,1,1,2)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,1,2,1)}^{8(3,3,2)} + G_{8(4,2,1,1)}^{8(3,3,2)}$$

$$N = G_{8(2,2,2,2)}^{8(3,3,2)} + 3 \cdot G_{8(4,2,2)}^{8(3,3,2)} + 3 \cdot G_{8(3,2,2,1)}^{8(3,3,2)} + 3 \cdot G_{8(4,2,1,1)}^{8(3,3,2)} = 88 + 3 \cdot 29 + 3 \cdot 69 + 3 \cdot 45 = 517$$

Este evident că aplicarea metodei de recurență pentru **N(RDD)** presupune cunoașterea valorii unor astfel de numere de ordine inferioare ( n-1, n-2, ... ).

## 2.8. Metoda reducerii ordinului

Să considerăm simbolul general:

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}$$

Dacă  $l_1 + \lambda_1 > n$ , putem scrie:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n-\lambda_1(\lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = G_{2n-l_1-\lambda_1(n-\lambda_1, l_2, \dots, l_m)}^{n-\lambda_1(\lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = G_{2n-l_1-\lambda_1(n-\lambda_1, l_2, \dots, l_m)}^{2n-l_1-\lambda_1(n-l_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}$$

( am aplicat formulele 2.15 și 2.16 ).

Observăm că dacă  $l_1 + \lambda_1 > n$  se obține reducerea ordinului cu relația:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} = G_{2n-l_1-\lambda_1(n-l_1, l_2, \dots, l_m)}^{2n-l_1-\lambda_1(n-l_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)} \quad (2.53)$$

Să analizăm acum cazurile când  $l_1 + \lambda_1 \leq n$ . Să presupunem că  $l_1 \geq \lambda_1$

Considerăm matricile (2.21) în care sumele laturilor și coloanelor sunt impuse. Numărul acestor matrici este chiar **N(RDD)**.

$n$	$l_1$	$l_2$	$\dots$	$l_m$	
$\lambda_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	$\dots$	$x_{1m}$	
$\lambda_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	$\dots$	$x_{2m}$	(2.54)
$\vdots$			$\dots$		
$\vdots$			$\dots$		
$\lambda_\mu$	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	$\dots$	$x_{\mu m}$	

Separăm linia întâi și coloana întâi. Elementele de pe aceasta linie și această coloană rezultă la fiecare completare a matricii rămase de dimensiuni  $(\mu - 1)(m - 1)$  cu numere naturale.

Să notăm cu  $S$  suma elementelor acestei matrici (“valoarea” matricii):

$$S = \sum_{j=2}^{\mu} \sum_{i=2}^m x_{ji} \quad (2.55)$$

Putem scrie:

$$x_{11} + S + l_1 - x_{11} + \lambda_1 - x_{11} = n$$

deci:

$$x_{11} = S + l_1 + \lambda_1 - n \quad (2.56)$$

Impunem condițiile:

$$0 \leq x_{11} \leq \min(l_1, \lambda_1) = \lambda_1 \quad (2.57)$$

Rezultă:

$$n - l_1 - \lambda_1 \leq S \leq n - l_1 \quad (2.58)$$

a) Dacă  $l_1 + \lambda_1 = n$ , avem  $x_{11} = S$

$$0 \leq S \leq n - l_1 = \lambda_1 \quad (2.59)$$

Notând cu  $G_n$  simbolul general de ordinul  $n$  ((2.3), notație prescurtată) și cu  $N_\nu$  numărul de moduri în care matricea redusă  $(\mu - 1)(m - 1)$  ia valoarea  $\nu$ , putem scrie:

$$G_n = N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_{n-l_1} \quad (2.60)$$

b) Dacă  $l_1 + \lambda_1 = n - 1$ , avem  $x_{11} = S - 1$

$$1 \leq S \leq n - l_1 = \lambda_1 + 1 \quad (2.61)$$

$$G_n = N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_{n-l_1} \quad (2.62)$$

c) Dacă  $l_1 + \lambda_1 = n - 2$ , avem  $x_{11} = S - 2$

$$2 \leq S \leq n - l_1 = \lambda_1 + 2 \quad (2.63)$$

$$G_n = N_2 + N_3 + \dots + N_{n-l_1} \quad (2.64)$$

d) Dacă  $l_1 + \lambda_1 = n - 3$ , avem  $x_{11} = S - 3$

$$3 \leq S \leq n - l_1 = \lambda_1 + 3 \quad (2.65)$$

$$G_n = N_3 + \dots + N_{n-l_1} \quad (2.66)$$

Fie simbolurile:

$$G_n \begin{matrix} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) \\ (l_1, l_2, \dots, l_m) \end{matrix} = G_n \quad (2.67)$$

$$G_{n-1} \begin{matrix} (\lambda_1 - 1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) \\ (l_1 - 1, l_2, \dots, l_m) \end{matrix} = G_{n-1} \quad (2.68)$$

$$G_{n-2} \begin{matrix} (\lambda_1 - 2, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) \\ (l_1 - 2, l_2, \dots, l_m) \end{matrix} = G_{n-2} \quad (2.69)$$

$$G_{n-3} \begin{matrix} (\lambda_1 - 3, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) \\ (l_1 - 3, l_2, \dots, l_m) \end{matrix} = G_{n-3} \quad (2.70)$$

$$G_{n-4} \begin{matrix} (\lambda_1 - 4, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu) \\ (l_1 - 4, l_2, \dots, l_m) \end{matrix} = G_{n-4} \quad (2.71)$$

A) În ipoteza :  $l_1 + \lambda_1 = n$ , avem:

$$(l_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) = l_1 + \lambda_1 - 2 = n - 2 = (n - 1) - 1$$

$$(l_1 - 2) + (\lambda_1 - 2) = l_1 + \lambda_1 - 4 = n - 4 = (n - 2) - 2$$

$$(l_1 - 3) + (\lambda_1 - 3) = l_1 + \lambda_1 - 6 = n - 6 = (n - 3) - 3$$

$$(l_1 - 4) + (\lambda_1 - 4) = l_1 + \lambda_1 - 8 = n - 8 = (n - 4) - 4$$

Putem scrie:

$$G_n = N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \dots + N_{n-1}$$

$$G_{n-1} = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \dots + N_{n-1-(1-1)}$$

$$G_{n-2} = N_2 + N_3 + N_4 + \dots + N_{n-2-(1-2)}$$

$$G_{n-3} = N_3 + N_4 + \dots + N_{n-3-(1-3)}$$

$$G_{n-4} = N_4 + \dots + N_{n-4-(1-4)}$$

Rezultă:

$$G_n = G_{n-1} + N_0 \quad (2.72)$$

$$G_n = G_{n-2} + N_0 + N_1 \quad (2.73)$$

$$G_n = G_{n-3} + N_0 + N_1 + N_2 \quad (2.74)$$

$$G_n = G_{n-4} + N_0 + N_1 + N_2 + N_4 \quad (2.75)$$

B) În ipoteza :  $l_1 + \lambda_1 = n - 1$ , avem:

$$(l_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) = l_1 + \lambda_1 - 2 = n - 3 = (n - 1) - 2$$

$$(l_1 - 2) + (\lambda_1 - 2) = l_1 + \lambda_1 - 4 = n - 5 = (n - 2) - 3$$



$$(l_1 - 3) + (\lambda_1 - 3) = l_1 + \lambda_1 - 6 = n - 7 = (n - 3) - 4$$

Putem scrie:

$$\begin{aligned} G_n &= N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \dots + N_{n-1} \\ G_{n-1} &= N_2 + N_3 + N_4 + \dots + N_{n-1-(1-1)} \\ G_{n-2} &= N_3 + N_4 + \dots + N_{n-2-(1-2)} \\ G_{n-3} &= N_4 + \dots + N_{n-3-(1-3)} \end{aligned}$$

Rezultă:

$$G_n = G_{n-1} + N_1 \quad (2.76)$$

$$G_n = G_{n-2} + N_1 + N_2 \quad (2.77)$$

$$G_n = G_{n-3} + N_1 + N_2 + N_3 \quad (2.78)$$

C) În ipoteza :  $l_1 + \lambda_1 = n - 2$  , avem:

$$(l_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) = n - 4 = (n - 1) - 3$$

$$(l_1 - 2) + (\lambda_1 - 2) = n - 6 = (n - 2) - 4$$

Putem scrie:

$$G_n = N_2 + N_3 + N_4 + \dots + N_{n-l_1}$$

$$G_{n-1} = N_3 + N_4 + \dots + N_{n-1-(l_1-1)}$$

$$G_{n-2} = N_4 + \dots + N_{n-2-(l_1-2)}$$

Rezultă:

$$G_n = G_{n-1} + N_2 \quad (2.79)$$

$$G_n = G_{n-2} + N_2 + N_3 \quad (2.80)$$

D) În ipoteza :  $l_1 + \lambda_1 = n - 3$  , avem:

$$(l_1 - 1) + (\lambda_1 - 1) = n - 5 = (n - 1) - 4$$

Putem scrie:

$$G_n = N_3 + N_4 + \dots + N_{n-l_1}$$

$$G_{n-1} = N_4 + \dots + N_{n-1-(l_1-1)}$$

Rezultă:

$$G_n = G_{n-1} + N_3 \quad (2.81)$$

Vom calcula acum numerele  $N_v$  , (  $v = 0, 1, 2, 3$  ).

Numărul  $N_v$  arată în câte moduri matricea redusă  $(\mu - 1) (m - 1)$  ia valoarea  $v$ .

În simbolul general standard:

$$G_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}$$

prin aplicarea proprietății de simetrie facem ca  $l_1 \geq \lambda_1$ . Indicii inferiori și superiori sunt în ordine descrescătoare:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\mu$$

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_m$$

În mulțimea numerelor:  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_\mu$  notăm cu:

$\alpha_1$  : numărul cifrelor 1

$\alpha_2$  : numărul cifrelor 2

.

.

.

$\alpha_{v-1}$  : numărul cifrelor v-1

$\alpha_v$  : numărul cifrelor v sau mai mari decât v

Deci putem scrie:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \mu - 1$

Obținem expresiile:

$$N_0 = 1 \quad (2.82)$$

$$N_1 = (\mu - 1)(m - 1) \quad (2.83)$$

$$N_2 = C_{\alpha_2}^1 \cdot G_{n-l_1(l_2, \dots, l_m)}^{2(2)} + C_{\alpha_2 + \alpha_1}^2 \cdot G_{n-l_1(l_2, \dots, l_m)}^{2(1,1)}$$

$$N_2 = \alpha_2 \cdot G_{n-l_1(l_2, \dots, l_m)}^{n-l_1(2, n-l_1-2)} + \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)}{2} \cdot G_{n-l_1(l_2, \dots, l_m)}^{n-l_1(1,1, n-l_1-2)} \quad (2.84)$$

$$N_3 = C_{\alpha_3}^1 \cdot G_{n-l_1(l_2, \dots, l_m)}^{3(3)} + C_{\alpha_3 + \alpha_2}^1 \cdot C_{\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1}^1 \cdot G_{n-l_1(l_2, \dots, l_m)}^{3(2,1)} + C_{\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1}^3 \cdot G_{n-l_1(l_2, \dots, l_m)}^{3(1,1,1)}$$

$$N_3 = \alpha_3 \cdot G_{n-l_1(l_2, \dots, l_m)}^{n-l_1(3, n-l_1-3)} + (\alpha_3 + \alpha_2)(\mu - 2) \cdot G_{n-l_1(l_2, \dots, l_m)}^{n-l_1(2,1, n-l_1-3)} + \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)(\mu - 3)}{6} \cdot G_{n-l_1(l_2, \dots, l_m)}^{n-l_1(1,1,1, n-l_1-3)} \quad (2.85)$$

Lista relațiilor expuse mai sus poate fi extinsă, dar expresiile lui  $N_v$  pentru  $v \geq 4$  se complică simțitor.

Metoda reducerii ordinului constă în aplicarea uneia dintre relațiile (2.72) . . . (2.81) și a expresiilor pentru  $N_v$ , (2.82) . . . (2.85).

Vom ilustra metoda prin câteva exemple.

#### Exemplul 1

Să se calculeze numărul  $N = G_{10(6,2,1,1)}^{10(4,3,2,1)}$

Aplicând formulele (2.72) și (2.82) avem:

$$N = G_{9(5,2,2,1)}^{9(3,3,2,1)} + N_0 = 105 + 1 = 106$$

### Exemplul 2

Să se calculeze numărul  $N = G_{10(5,2,2,1)}^{10(4,3,2,1)}$

Aplicând formulele (2.76) și (2.83) avem:

$$N = G_{9(4,2,2,1)}^{9(3,3,2,1)} + N_1 = 188 + 9 = 197$$

### Exemplul 3

Să se calculeze numărul  $N = G_{10(4,2,2,2)}^{10(4,3,2,1)}$

Aplicând formulele (2.78) avem:

$$N = G_{9(3,2,2,2)}^{9(3,3,2,1)} + N_2$$

Pentru a calcula numărul  $N_2$ , aplicăm formula (2.84), unde  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ .

$$N_2 = 2 \cdot G_{6(2,2,2)}^{6(2,4)} + \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot G_{6(2,2,2)}^{6(1,1,4)} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 9 = 39$$

Obținem:

$$N = 295 + 39 = 334$$

### Exemplul 4

Să se calculeze numărul  $N = G_{10(4,2,2,2)}^{10(3,3,2,2)}$

Aplicând formulele (2.81) avem:

$$N = G_{9(3,2,2,2)}^{9(2,3,2,2)} + N_3$$

Pentru a calcula numărul  $N_3$ , aplicăm formula (2.84), unde  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1$ .

$$N_3 = G_{6(2,2,2)}^{6(3,3)} + 3 \cdot 2 \cdot G_{6(2,2,2)}^{6(2,1,3)} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6} \cdot G_{6(2,2,2)}^{6(1,1,1,3)} = 7 + 6 \cdot 15 + 24 = 121$$

Obținem:

$$N = 396 + 121 = 517$$

Acest număr a fost calculat anterior prin metoda recurenței, rezultatul obținut fiind evident același.

Ca și la metoda de recurență, metoda reducerii ordinului pentru calculul numărului  $N(\mathbf{RDD})$  presupune cunoașterea valorii unor astfel de numere de ordine inferioare.

## 2.9. Program de calculator RDD

Pentru valori mari ale lui  $n$ , calculul numărului  $N(\mathbf{RDD})$  prin metodele expuse anterior este dificil. Pe baza metodei enumerării s-a elaborat un program de calculator care generează sistematic matrici de tipul (2.54) și în final dă numărul acestor matrici. Problema se reduce la determinarea matricilor reduse de dimensiuni  $\mu-1$  și  $m-1$ , în care variabilele  $x_{ji}$  iau valori naturale cuprinse între 0 și o valoare maximă iar suma lor este mai mare sau egală decât numărul  $n - l_1 - \lambda_1$  (a se vedea relația 2.58).

Putem scrie:

$$0 \leq x_{ji} \leq \min(\lambda_j - x_{j2} - x_{j3} - \dots - x_{j,i-1}; l_i - x_{2i} - x_{3i} - \dots - x_{j-1,i}) \quad (2.86)$$

$$S = \sum_{j=2}^{\mu} \sum_{i=2}^m x_{ji} \geq n - l_1 - \lambda_1 \quad (2.87)$$

cu referire a matricea:

$$M = \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2i} & \dots & x_{2m} \\ x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3i} & \dots & x_{3m} \\ \vdots & & & & & \\ x_{j2} & x_{j3} & \dots & x_{ji} & \dots & x_{jm} \\ \vdots & & & & & \\ x_{\mu 2} & x_{\mu 3} & \dots & x_{\mu i} & \dots & x_{\mu m} \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Programul de calculator **RDD** generează sistematic toate matricile de tipul (2.88) în care variabilele  $x_{ji}$  verifică relațiile (2.86) și (2.87). Fiecare dintre cele  $(\mu - 1)(m - 1)$  variabile ia valori între 0 și valoarea maximă respectivă și anume  $x_{\mu m}$  variază cel mai rapid iar  $x_{22}$  cel mai lent (se parcurg în sens invers liniile matricii).

Numărul matricilor reduse de tipul (2.88) coincide cu numărul matricilor (2.54) și este deci chiar  $N(\mathbf{RDD})$ .

Programul **RDD** permite obținerea numerelor  $N(\mathbf{RDD})$  în timpuri variind de la o fracțiune de secundă la câteva minute, în cazul valorilor mari (de ordinul milioane).

Listingu programului **RDD** este prezentat în anexele prezentei lucrări.

## 2.10 Rezultatele numerice obținute

Utilizând metodele de calcul prezentate, respectiv programul de calculator **RDD**, s-au obținut următoarele rezultate ( $n = 1, 2, \dots, 10$ ). Tabelele conțin numerele claselor de dezechilibru pentru receptori dezechilibrați discreți de tipul  $n$  ( $l_1, l_2, \dots, l_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$ ). Numărul  $n$  este notat în colțul din stânga-sus al fiecărui tabel. Indicii inferiori sunt marcați în partea stângă a tabelelor, sub forma ( $l_1, l_2, \dots, l_m$ ). Indicii superiori sunt marcați în partea superioară a tabelelor, sub forma ( $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$ ). La intersecția liniei și a coloanei respective se citește numărul  $N = N(\mathbf{RDD})$ .

Tabelele sunt exhaustive și prezintă simetrie față de diagonala principală, datorită proprietății de simetrie.

Numerele  $N = N(\mathbf{RDD})$  sunt cu atât mai "simple" (mai mici și mai ușor de calculat) cu atât ordinul  $n$  este mai mic. Din acest motiv, tabelele s-au calculat în ordinea prezentată, adică începând cu  $n = 1$ , continuând cu  $n = 2$  ș.a.m.d. până la  $n = 10$ . Dintre metodele "manuale" de calcul, deosebit de practice sunt formulele de recurență pentru  $\lambda_\mu = 1$  și  $\lambda_\mu = 2$  și formulele de reducere a ordinului pentru  $l_1 + \lambda_1 > n$ ;  $l_1 + \lambda_1 = n$ ;  $l_1 + \lambda_1 = n - 1$ . Deci, 5 formulele de calcul simple cu care se pot calcula din aproape în aproape orice tabel, bazându-ne pe cele existente (anterioare). Totuși un astfel de calcul „manual” al primelor 10 tabele cu numerele  $N(\mathbf{RDD})$  necesită cca 40 de ore de calcul.

Programul de calculator **RDD**, scris în limbajul C și rulat pe un calculator IBM-Pentium, 150 MHz, 8 MB memorie RAM și 540 MB pentru HDD permite efectuarea aceluiași calcul în cca 10 ore (aici este evident inclus și timpul necesar introducerii datelor).

Dar marele avantaj al utilizării programului de calculator este posibilitatea calculării unor numere  $N(\mathbf{RDD})$  pentru un  $n$  oarecare, când nu dispunem de tabelele cu numerele  $N(\mathbf{RDD})$  pentru  $n-1, n-2 \dots$ . În acest caz, comparația cu metoda polinoamelor de tip Newton evidențiază avantajul absolut, incontestabil, al utilizării programului de calculator.

Ecranul programului **RDD** este prezentat în figura 2.5.

```
1. PROGRAM PENTRU ANALIZA CLASELOR DE DEZECHILIBRU  
   ALE RECEPTOARELOR DEZECHILIBRATE DISCRETE (RDD)  
  
2. EXIT  
  
ALEGETI OPTIUNEA 1/2:
```

a)

```
INTRODUCETI DIMENSIUNILE MATRICII:  
Numarul de linii:      5  
Numarul de coloane:   5  
  
INTRODUCETI PARAMETRII:  
  n = 15  
  
INTRODUCETI COMPONENTELE PE LINII  
  la1 = 5  
  la2 = 4  
  la3 = 2  
  la4 = 2  
  la5 = 2  
  
INTRODUCETI COMPONENTELE PE COLOANE  
  l1 = 7  
  l2 = 3  
  l3 = 2  
  l4 = 2  
  l5 = 1  
  
NUMARUL DE DEZECHILIBRE POSIBILE ESTE  
  
  [n = 15] [5 linii]  
  G      = 14981  
  [n = 15] [5 coloane]  
  
Continuati? [d/n]
```

b)

Fig. 2.5. Ecranul programului RDD și anume de introducere (a) și de lucru (b)

Dăm în continuare câteva valori pentru numere  $\mathbf{N(RDD)}$  cu  $n$  mare.

$$G_{15(7,3,2,2,1)}^{15(5,4,2,2,2)} = 14981 \quad (2.89)$$

$$G_{20(7,5,4,3,1)}^{20(6,5,4,3,2)} = 294243 \quad (2.90)$$

$$G_{30(10,10,10)}^{30(10,10,10)} = 2211 \quad (2.91)$$

$$G_{180(60,60,60)}^{180(90,90)} = 2791 \quad (2.92)$$

$$G_{300(100,100,100)}^{300(150,150)} = 7651 \quad (2.93)$$

$$G_{1200(400,400,400)}^{1200(600,600)} = 120601 \quad (2.94)$$

Tabelele cu numerele  $\mathbf{N(RDD)}$  pentru  $n = 1, 2, \dots, 10$  sunt prezentate în continuare.

**Tabelul 2.1 (n = 1)**

1	(1)
(1)	1

**Tabelul 2.2 (n = 2)**

2	(2)	(1,1)
(2)	1	1
(1,1)	1	2

**Tabelul 2.3 (n = 3)**

3	(3)	(2,1)	(1,1,1)
(3)	1	1	1
(2,1)	1	2	3
(1,1,1)	1	3	6

**Tabelul 2.4 (n = 4)**

4	(4)	(3,1)	(2,2)	(2,1,1)	(1,1,1,1)
(4)	1	1	1	1	1
(3,1)	1	2	2	3	4
(2,2)	1	2	3	4	6
(2,1,1)	1	3	4	7	12
(1,1,1,1)	1	4	6	12	24

**Tabelul 2.5 (n = 5)**

5	(5)	(4,1)	(3,2)	(3,1,1)	(2,2,1)	(2,1,1,1)	(1,1,1,1,1)
(5)	1	1	1	1	1	1	1
(4,1)	1	2	2	3	3	4	5
(3,2)	1	2	3	4	5	7	10
(3,1,1)	1	3	4	7	8	13	20
(2,2,1)	1	3	5	8	11	18	30
(2,1,1,1)	1	4	7	13	18	33	60
(1,1,1,1,1)	1	5	10	20	30	60	120



**Tabelul 2.6 (n = 6)**

6	(6)	(5,1)	(4,2)	(3,3)	(4,1,1)	(3,2,1)	(2,2,2)
(6)	1	1	1	1	1	1	1
(5,1)	1	2	2	2	3	3	3
(4,2)	1	2	3	3	4	5	6
(3,3)	1	2	3	4	4	6	7
(4,1,1)	1	3	4	4	7	8	9
(3,2,1)	1	3	5	6	8	12	15
(2,2,2)	1	3	6	7	9	15	21
(3,1,1,1)	1	4	7	8	13	19	24
(2,2,1,1),	1	4	8	10	14	24	33
(2,1,1,1,1)	1	5	11	14	21	38	54
(1,1,1,1,1,1)	1	6	15	20	30	60	90

6	(3,1,1,1)	(2,2,1,1)	(2,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1)
(6)	1	1	1	1
(5,1)	4	4	5	6
(4,2)	7	8	11	15
(3,3)	8	10	14	20
(4,1,1)	13	14	21	30
(3,2,1)	19	24	38	60
(2,2,2)	24	33	54	90
(3,1,1,1)	34	42	72	120
(2,2,1,1),	42	58	102	180
(2,1,1,1,1)	72	102	192	360
(1,1,1,1,1,1)	120	180	360	720

Tabelul 2.7 (n = 7)

7	(7)	(6,1)	(5,2)	(4,3)	(5,1,1)	(4,2,1)	(3,3,1)	(3,2,2)	(4,1,1,1)
(7)	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(6,1)	1	2	2	2	3	3	3	3	4
(5,2)	1	2	3	3	4	5	5	6	7
(4,3)	1	2	3	4	4	6	7	8	8
(5,1,1)	1	3	4	4	7	8	8	9	13
(4,2,1)	1	3	5	6	8	12	13	16	19
(3,3,1)	1	3	5	7	8	13	16	19	20
(3,2,2)	1	3	6	8	9	16	19	25	25
(4,1,1,1)	1	4	7	8	13	19	20	25	34
(3,2,1,1)	1	4	8	11	14	25	30	39	43
(2,2,2,1)	1	4	9	13	15	30	37	51	51
(3,1,1,1,1)	1	5	11	15	21	39	46	62	73
(2,2,1,1,1)	1	5	12	18	22	46	58	81	84
(2,1,1,1,1,1)	1	6	16	25	31	70	90	130	135
(1,1,1,1,1,1,1)	1	7	21	35	42	105	140	210	210

7	(3,2,1,1)	(2,2,2,1)	(3,1,1,1,1)	(2,2,1,1,1)	(2,1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1,1)
(7)	1	1	1	1	1	1
(6,1)	4	4	5	5	6	7
(5,2)	8	9	11	12	16	21
(4,3)	11	13	15	18	25	35
(5,1,1)	14	15	21	22	31	42
(4,2,1)	25	30	39	46	70	105
(3,3,1)	30	37	46	58	90	140
(3,2,2)	39	51	62	81	130	210
(4,1,1,1)	43	51	73	84	135	210
(3,2,1,1)	67	87	114	148	250	420
(2,2,2,1)	87	120	150	207	360	630
(3,1,1,1,1)	114	150	208	270	480	840
(2,2,1,1,1)	148	207	270	378	690	1260
(2,1,1,1,1,1)	250	360	480	690	1320	2520
(1,1,1,1,1,1,1)	420	630	840	1260	2520	5040

Tabelul 2.8 (n = 8)

8	(8)	(7.1)	(6.2)	(5.3)	(6.1.1)	(4.4)
(8)	1	1	1	1	1	1
(7.1)	1	2	2	2	3	2
(6.2)	1	2	3	3	4	3
(5.3)	1	2	3	4	4	4
(6.1.1)	1	3	4	4	7	4
(4.4)	1	2	3	4	4	5
(5.2.1)	1	3	5	6	8	6
(4.3.1)	1	3	5	7	8	8
(5.1.1.1)	1	4	7	8	13	8
(4.2.2)	1	3	6	8	9	9
(3.3.2)	1	3	6	9	9	10
(4.2.1.1)	1	4	8	11	14	12
(3.3.1.1)	1	4	8	12	14	14
(3.2.2.1)	1	4	9	14	15	16
(4.1.1.1.1)	1	5	11	15	21	16
(2.2.2.2)	1	4	10	16	16	19
(3.2.1.1.1)	1	5	12	19	22	22
(2.2.2.1.1)	1	5	13	22	23	26
(3.1.1.1.1.1)	1	6	16	26	31	30
(2.2.1.1.1.1)	1	6	17	30	32	36
(2.1.1.1.1.1.1)	1	7	22	41	43	50
(1.1.1.1.1.1.1.1)	1	8	28	56	56	70

8	(5.2.1)	(4.3.1)	(5.1.1.1)	(4.2.2)	(3.3.2)
(8)	1	1	1	1	1
(7.1)	3	3	4	3	3
(6.2)	5	5	7	6	6
(5.3)	6	7	8	8	9
(6.1.1)	8	8	13	9	9
(4.4)	6	8	8	9	10
(5.2.1)	12	13	19	16	17
(4.3.1)	13	17	20	20	23
(5.1.1.1)	19	20	34	25	26
(4.2.2)	16	20	25	26	29
(3.3.2)	17	23	26	29	35
(4.2.1.1)	25	31	43	40	45
(3.3.1.1)	26	36	44	45	54
(3.2.2.1)	31	43	52	57	69
(4.1.1.1.1)	39	47	73	63	70
(2.2.2.2)	36	52	60	72	88
(3.2.1.1.1)	47	66	85	89	108
(2.2.2.1.1)	54	80	96	111	139
(3.1.1.1.1.1)	71	100	136	140	170
(2.2.1.1.1.1)	80	122	150	173	220
(2.1.1.1.1.1.1)	117	185	228	270	350
(1.1.1.1.1.1.1.1)	168	280	336	420	560

Tabelul 2.8(continuare)

8	(4,2,1,1)	(3,3,1,1)	(3,2,2,1)	(4,1,1,1,1)	(2,2,2,2)	(3,2,1,1,1)	(2,2,2,1,1)
(8)	1	1	1	1	1	1	1
(7.1)	4	4	4	5	4	5	5
(6.2)	8	8	9	11	10	12	13
(5.3)	11	12	14	15	16	19	22
(6.1.1)	14	14	15	21	16	22	23
(4.4)	12	14	16	16	19	22	26
(5.2.1)	25	26	31	39	36	47	54
(4.3.1)	31	36	43	47	52	66	80
(5.1.1.1)	43	44	52	73	60	85	96
(4.2.2)	40	45	57	63	72	89	111
(3.3.2)	45	54	69	70	88	108	139
(4.2.1.1)	68	76	96	115	120	160	198
(3.3.1.1)	76	92	116	126	148	194	248
(3.2.2.1)	96	116	154	162	204	260	345
(4.1.1.1.1)	115	126	162	209	204	286	354
(2.2.2.2)	120	148	204	204	282	348	480
(3.2.1.1.1)	160	194	260	286	348	463	618
(2.2.2.1.1)	198	248	345	354	480	618	861
(3.1.1.1.1.1)	265	320	440	500	600	820	1110
(2.2.1.1.1.1)	324	412	584	606	828	1092	1548
(2.1.1.1.1.1.1)	525	680	990	1020	1440	1920	2790
(1.1.1.1.1.1.1.1)	840	1120	1680	1680	2520	3360	5040

8	(3,1,1,1,1,1)	(2,2,1,1,1,1)	(2,1,1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1,1,1)
(8)	1	1	1	1
(7.1)	6	6	7	8
(6.2)	16	17	22	28
(5.3)	26	30	41	56
(6.1.1)	31	32	43	56
(4.4)	30	36	50	70
(5.2.1)	71	80	117	168
(4.3.1)	100	122	185	280
(5.1.1.1)	136	150	228	336
(4.2.2)	140	173	270	420
(3.3.2)	170	220	350	560
(4.2.1.1)	265	324	525	840
(3.3.1.1)	320	412	680	1120
(3.2.2.1)	440	584	990	1680
(4.1.1.1.1)	500	606	1020	1680
(2.2.2.2)	600	828	1440	2520
(3.2.1.1.1)	820	1092	1920	3360
(2.2.2.1.1)	1110	1548	2790	5040
(3.1.1.1.1.1)	1520	2040	3720	6720
(2.2.1.1.1.1)	2040	2892	5400	10080
(2.1.1.1.1.1.1)	3720	5400	10440	20160
(1.1.1.1.1.1.1.1)	6720	10080	20160	40320

Tabelul 2.9 (n = 9)

9	(9)	(8,1)	(7,2)	(7,1,1)	(6,3)
(9)	1	1	1	1	1
(8,1)	1	2	2	3	2
(7,2)	1	2	3	4	3
(7,1,1)	1	3	4	7	4
(6,3)	1	2	3	4	4
(5,4)	1	2	3	4	4
(6,2,1)	1	3	5	8	6
(5,3,1)	1	3	5	8	7
(6,1,1,1)	1	4	7	13	8
(4,4,1)	1	3	5	8	7
(5,2,2)	1	3	6	9	8
(4,3,2)	1	3	6	9	9
(5,2,1,1)	1	4	8	14	11
(3,3,3)	1	3	6	9	10
(4,3,1,1)	1	4	8	14	12
(5,1,1,1,1)	1	5	11	21	15
(4,2,2,1)	1	4	9	15	14
(3,3,2,1)	1	4	9	15	15
(3,2,2,2)	1	4	10	16	17
(4,2,1,1,1)	1	5	12	22	19
(3,3,1,1,1)	1	5	12	22	20
(3,2,2,1,1)	1	5	13	23	23
(4,1,1,1,1,1)	1	6	16	31	26
(2,2,2,2,1)	1	5	14	24	26
(3,2,1,1,1,1)	1	6	17	32	31
(2,2,2,1,1,1)	1	6	18	33	35
(3,1,1,1,1,1)	1	7	22	43	42
(2,2,1,1,1,1,1)	1	7	23	44	47
(2,1,1,1,1,1,1,1)	1	8	29	57	63
(1,1,1,1,1,1,1,1,1)	1	9	36	72	84

9	(5,4)	(6,2,1)	(5,3,1)	(6,1,1,1)	(4,4,1)
(9)	1	1	1	1	1
(8,1)	2	3	3	4	3
(7,2)	3	5	5	7	5
(7,1,1)	4	8	8	13	8
(6,3)	4	6	7	8	7
(5,4)	5	6	8	8	9
(6,2,1)	6	12	13	19	13
(5,3,1)	8	13	17	20	18
(6,1,1,1)	8	19	20	34	20
(4,4,1)	9	13	18	20	21
(5,2,2)	9	16	20	25	21
(4,3,2)	11	17	24	26	27
(5,2,1,1)	12	25	31	43	32
(3,3,3)	12	18	27	27	30
(4,3,1,1)	15	26	37	44	42
(5,1,1,1,1)	16	39	47	73	48
(4,2,2,1)	17	31	44	52	49
(3,3,2,1)	19	32	49	53	56
(3,2,2,2)	22	37	58	61	67
(4,2,1,1,1)	23	47	67	85	74
(3,3,1,1,1)	26	48	74	86	86
(3,2,2,1,1)	30	55	88	97	102
(4,1,1,1,1,1)	31	71	101	136	110
(2,2,2,2,1)	35	62	104	108	123
(3,2,1,1,1,1)	41	81	132	151	154
(2,2,2,1,1,1)	48	90	156	165	186
(3,1,1,1,1,1,1)	56	118	197	229	230
(2,2,1,1,1,1,1)	66	129	232	246	280
(2,1,1,1,1,1,1,1)	91	182	343	357	420
(1,1,1,1,1,1,1,1,1)	126	252	504	504	630

Tabelul 2.9 (continuare)

9	(5,2,2)	(4,3,2)	(5,2,1,1)	(3,3,3)	(4,3,1,1)
(9)	1	1	1	1	1
(8,1)	3	3	4	3	4
(7,2)	6	6	8	6	8
(7,1,1)	9	9	14	9	14
(6,3)	8	9	11	10	12
(5,4)	9	11	12	12	15
(6,2,1)	16	17	25	18	26
(5,3,1)	20	24	31	27	37
(6,1,1,1)	25	26	43	27	44
(4,4,1)	21	27	32	30	42
(5,2,2)	26	30	40	33	46
(4,3,2)	30	39	46	45	60
(5,2,1,1)	40	46	68	51	77
(3,3,3)	33	45	51	55	69
(4,3,1,1)	46	60	77	69	101
(5,1,1,1,1)	63	71	115	78	127
(4,2,2,1)	58	75	97	87	125
(3,3,2,1)	63	87	105	105	145
(3,2,2,2)	78	109	129	132	181
(4,2,1,1,1)	90	116	161	135	206
(3,3,1,1,1)	97	135	172	162	240
(3,2,2,1,1)	119	169	210	207	298
(4,1,1,1,1,1)	141	180	266	210	335
(2,2,2,2,1)	144	212	252	264	372
(3,2,1,1,1,1)	183	263	339	324	486
(2,2,2,1,1,1)	219	330	402	417	606
(3,1,1,1,1,1,1)	282	410	543	510	785
(2,2,1,1,1,1,1)	333	515	634	660	980
(2,1,1,1,1,1,1,1)	504	805	987	1050	1575
(1,1,1,1,1,1,1,1,1)	756	1260	1512	1680	2520

9	(5,1,1,1,1)	(4,2,2,1)	(3,3,2,1)	(3,2,2,2)	(4,2,1,1,1)
(9)	1	1	1	1	1
(8,1)	5	4	4	4	5
(7,2)	11	9	9	10	12
(7,1,1)	21	15	15	16	22
(6,3)	15	14	15	17	19
(5,4)	16	17	19	22	23
(6,2,1)	39	31	32	37	47
(5,3,1)	47	44	49	58	67
(6,1,1,1)	73	52	53	61	85
(4,4,1)	48	49	56	67	74
(5,2,2)	63	58	63	78	90
(4,3,2)	71	75	87	109	116
(5,2,1,1)	115	97	105	129	161
(3,3,3)	78	87	105	132	135
(4,3,1,1)	127	125	145	181	206
(5,1,1,1,1)	209	163	174	216	287
(4,2,2,1)	163	163	188	243	272
(3,3,2,1)	174	188	227	295	313
(3,2,2,2)	216	243	295	396	408
(4,2,1,1,1)	287	272	313	408	479
(3,3,1,1,1)	302	313	378	496	548
(3,2,2,1,1)	370	403	493	666	710
(4,1,1,1,1,1)	501	455	520	690	840
(2,2,2,2,1)	444	516	644	894	912
(3,2,1,1,1,1)	626	669	822	1128	1229
(2,2,2,1,1,1)	738	852	1077	1515	1556
(3,1,1,1,1,1,1)	1044	1110	1370	1920	2115
(2,2,1,1,1,1,1)	1206	1405	1800	2580	2670
(2,1,1,1,1,1,1,1)	1932	2310	3010	4410	4515
(1,1,1,1,1,1,1,1,1)	3024	3780	5040	7560	7560

## 2.11 Concluzii și observații

În cadrul acestui capitol s-a început prin definirea receptorului dezechilibrat discret (**RDD**) și elaborarea modelului matematic respectiv. S-a enunțat problema determinării numărului **N(RDD)** al receptorilor dezechilibrați discreți de un anumit tip, cu evidențierea proprietăților acestui număr.

În continuare s-au prezentat patru metode pentru calculul numărului **N(RDD)** împreună cu exemple concrete, precum și un program de calculator elaborat în acest sens și utilizat la calcularea primelor zece tabele.

În încheierea acestui capitol, menționăm că numerele  $G_n^{k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}(l_1, l_2, \dots, l_m)$  (2.14) pot fi utilizate și în alte ramuri ale tehnicii, în care intervin sisteme discrete și finite. Cu alte cuvinte, modelul matematic expus este comun pentru mai multe probleme concrete, numerele (2.14) având și o importanță în sine, deoarece reprezintă o generalizare pentru unele concepte fundamentale din combinatorică [P13], [P15].

În lucrarea [B2] sunt utilizate cazuri particulare ale numerelor (2.14) în cibernetica sistemelor discrete. Cazul general nu este abordat, nici în această lucrare nici în alte lucrări din literatura de specialitate.

Din acest motiv, conținutul prezentului capitol este original atât prin problematica abordată cât și prin metodele de calcul propuse pentru cazul general.

Principalele contribuții originale ale autorului sunt enumerate în continuare:

- Introduc noțiunea de receptor dezechilibrat discret (**RDD**).
- Elaborez modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret.
- Elaborez metoda enumerării pentru calculul numărului **N(RDD)**.
- Elaborez metoda polinoamelor de tip Newton pentru calculul numărului **N(RDD)**.
- Elaborez metoda de recurență pentru calculul numărului **N(RDD)**.
- Elaborez metoda reducerii ordinului pentru calculul numărului **N(RDD)**.
- Elaborez programul de calculator **RDD** pentru calculul numărului **N(RDD)**. Folosind acest program de calculator am calculat toate numerele **N(RDD)** pentru valori ale lui  $n$  mai mici sau egale decât zece.

**CAPITOLUL 3**  
**CARACTERIZAREA SISTEMELOR TRIFAZATE**  
**NESIMETRICE CU AJUTORUL ANALIZEI**  
**ARMONICE**





### 3. CARACTERIZAREA SISTEMELOR TRIFAZATE NESIMETRICE CU AJUTORUL ANALIZEI ARMONICE

#### 3.1 Puntea de diode alimentată cu un sistem trifazat nesimetric de tensiuni

În cele ce urmează vom analiza puntea de diode alimentând un receptor pur rezistiv. Se va prezenta o metodă analitică exactă de calcul, o metodă de simulare pe calculator și o comparație între rezultatele obținute prin cele două metode [A1], [G7], [L2], [P19], [R13], [S3], [S4], [S5], [S7], [W3].

Se va studia forma de undă a tensiunii redresate  $u_d$  precum și spectrul de armonici al tensiunii  $u_d$ .

De asemenea, vom prezenta rezultatele măsurătorilor experimentale efectuate în laborator.

##### 3.1.1 Metoda analitică

Considerăm o punte trifazată de diode ideale alimentată cu un sistem trifazat nesimetric de tensiuni (fig. 3.1).

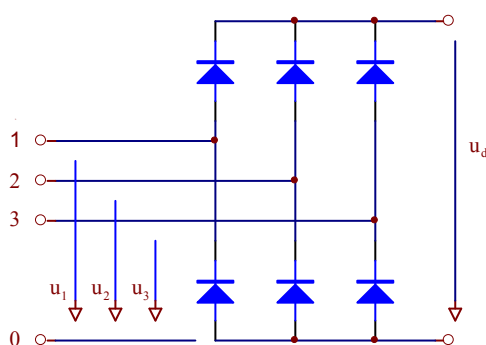


Fig. 3.1 Punte de diode ideale alimentată nesimetric

Sistemul trifazat nesimetric de tensiuni este notat  $(u_1, u_2, u_3)$ . Tensiunea redresată este  $u_d$ .

### 3.1.1.1 Considerarea cazului general. Teorema pozițiilor

Se consideră sistemul trifazat nesimetric general  $(u_1, u_2, u_3)$  de secvență directă. Sistemul este nesimetric la modul general, deci prezintă nesimetrie atât de module cât și de unghiuri.

Expresiile generale ale tensiunilor sistemului trifazat sunt:

$$\begin{cases} u_1(x) = U_{m1} \sin(x - x_1) \\ u_2(x) = U_{m2} \sin(x - x_2) \\ u_3(x) = U_{m3} \sin(x - x_3) \end{cases} \quad (3.1)$$

unde am notat  $x = \omega t$  [M17], [S22], [S29], [T2].

Notăm cu  $a, b, c$  abscisele punctelor de intersecție ale curbelor  $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ , care se găsesc în intervalul  $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ . Mai exact:

-  $a$  corespunde la  $u_2 \cap u_3$

-  $b$  corespunde la  $u_3 \cap u_1$

-  $c$  corespunde la  $u_1 \cap u_2$

Aceste abscise rezultă din următoarele ecuații:

$$u_2(x) = u_3(x); u_3(x) = u_1(x); u_1(x) = u_2(x);$$

Rezolvând aceste ecuații, se obțin următoarele expresii:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} a &= \frac{U_{m2} \sin x_2 - U_{m3} \sin x_3}{U_{m2} \cos x_2 - U_{m3} \cos x_3} \\ \operatorname{tg} b &= \frac{U_{m3} \sin x_3 - U_{m1} \sin x_1}{U_{m3} \cos x_3 - U_{m1} \cos x_1} \\ \operatorname{tg} c &= \frac{U_{m1} \sin x_1 - U_{m2} \sin x_2}{U_{m1} \cos x_1 - U_{m2} \cos x_2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

De aici rezultă imediat  $a, b, c$  [P19].

Fără a restrânge generalitatea, alegem ca origine de fază mărimea având amplitudinea maximă și fie  $u_1$  această mărime.

Deci  $x_1 = 0$ ;  $0 < x_2 < x_3 < 2\pi$  și  $0 < U_{m2} \leq U_{m1}$ ;  $0 < U_{m3} \leq U_{m1}$ . În această situație putem lua  $U_{m1} = 1$  iar  $U_{m2}, U_{m3}$  vor fi numere pozitive subunitare.

Se pot imagina și sisteme trifazate la limită, în care pot interveni unele din următoarele situații:  
 $U_{m2} = 0$ ;  $U_{m3} = 0$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_2 = x_3$ ;  $x_3 = 2\pi$ . Aceste sisteme posedă o nesimetrie accentuată.

În aceste condiții (mărimea cu amplitudinea maximă este  $u_1$  și se alege origine de fază) se constată că pot exista 4 cazuri privind poziția relativă a numerelor  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Vom numi această afirmație teorema pozițiilor.

Teorema pozițiilor poate fi ilustrată prin metoda grafică. Din cele  $3! = 6$  situații trebuie să scădem 2 datorită poziției privilegiate a lui  $u_1$  (origine de fază). Demonstrația teoremei pozițiilor este dată în anexele prezentei lucrări.

Cazurile care pot să existe, după poziția relativă a numerelor  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , sunt următoarele:

Cazul 1:  $a < b < c$ ;

Cazul 2:  $a < c < b$ ;

Cazul 3:  $b < c < a$ ;

Cazul 4:  $c < b < a$ .

În situații particulare, poate interveni egalitatea între două din numerele  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , de asemenea egalitatea unuia din aceste numere cu  $-\frac{\pi}{2}$  sau  $+\frac{\pi}{2}$ .

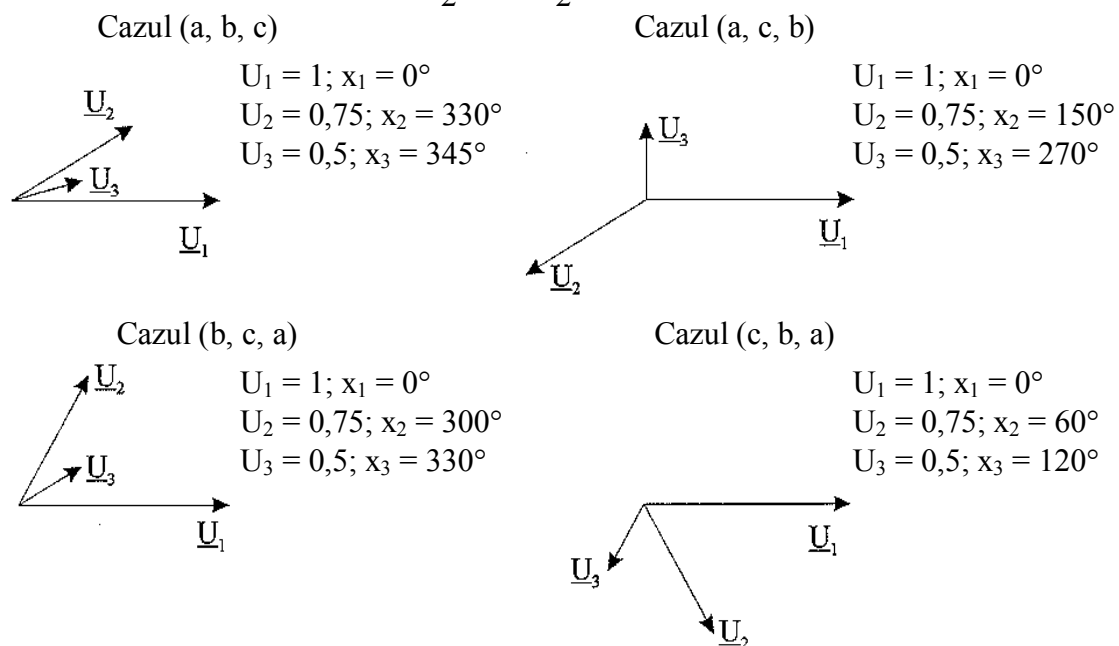


Fig. 3.2 Exemplificări pentru cele patru cazuri de sisteme nesimetrice

În figura 3.2 s-au reprezentat fazorial 4 sisteme la modul general, deci cu nesimetrie atât de module cât și de unghiuri. Sistemele considerate reprezintă cele patru cazuri care pot exista și care au fost prezentate mai înainte.

În toate cazurile, vom nota cu  $d$  suma dintre abscisa cea mai mică și numărul  $\pi$ :

$$d = \min(a, b, c) + \pi \quad (3.3)$$

În fiecare din cele 4 cazuri, semnalul  $u_d(x)$  rezultă periodic cu perioada  $\pi$  [P19].

Expresia generală a dezvoltării funcției  $u_d(x)$  în serie Fourier este dată de următoarea relație:

$$u_d(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n \frac{\pi}{l} x + b_n \sin n \frac{\pi}{l} x \quad (3.4)$$

unde  $2l = \pi$  este perioada. [M17], [S17], [S22], [S29].

Deci:

$$u_d(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2nx + b_n \sin 2nx \quad (3.5)$$

În continuare, vom studia pe rând cele patru cazuri.

### Cazul 1

Acest caz îl numim pe scurt cazul (a, b, c).

Avem  $a < b < c < d$ .

În figura 3.3 s-a prezentat sistemul nesimetric ( $u_1, u_2, u_3$ ) funcție de  $x$ , precum și tensiunea  $u_d(x)$ .

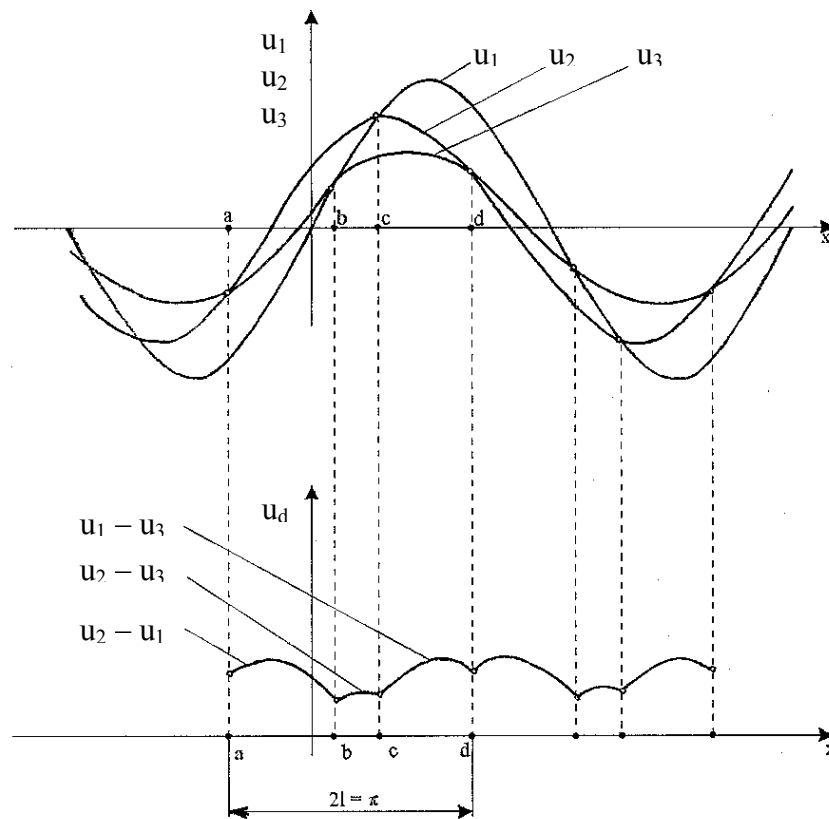


Fig. 3.3 Sistem nesimetric aparținând cazului 1 și tensiunea  $u_d$  corespunzătoare

Se poate scrie:

$$u_d(x) = \begin{cases} u_2(x) - u_1(x), & \text{petru } a \leq x < b \\ u_2(x) - u_3(x), & \text{petru } b \leq x < c \\ u_1(x) - u_3(x), & \text{petru } c \leq x < d \end{cases} \quad (3.6)$$

Coeficienții dezvoltării în serie Fourier sunt dați de relațiile:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_a^d u_d(x) dx \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_a^d u_d(x) \cos 2nx dx \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_a^d u_d(x) \sin 2nx dx \end{aligned} \quad (3.7)$$

Efectuând calculele, se obțin următoarele expresii pentru  $a_n$ ,  $b_n$ , și  $a_0$ .

Pentru coeficientul  $a_n$ :

$$\begin{aligned} &(4n^2 - 1) \pi a_n = \\ &= -U_{m1} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)b + x_1] - (2n-1) \cos [(2n+1)b - x_1] \} \\ &\quad - U_{m1} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)c + x_1] - (2n-1) \cos [(2n+1)c - x_1] \} \\ &\quad - U_{m2} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)a + x_2] - (2n-1) \cos [(2n+1)a - x_2] \} \\ &\quad + U_{m2} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)c + x_2] - (2n-1) \cos [(2n+1)c - x_2] \} \\ &\quad + U_{m3} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)a + x_3] - (2n-1) \cos [(2n+1)a - x_3] \} \\ &\quad + U_{m3} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)b + x_3] - (2n-1) \cos [(2n+1)b - x_3] \} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pentru coeficientul  $b_n$ :

$$\begin{aligned} &(4n^2 - 1) \pi b_n = \\ &= -U_{m1} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)b + x_1] - (2n-1) \sin [(2n+1)b - x_1] \} \\ &\quad - U_{m1} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)c + x_1] - (2n-1) \sin [(2n+1)c - x_1] \} \\ &\quad - U_{m2} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)a + x_2] - (2n-1) \sin [(2n+1)a - x_2] \} \\ &\quad + U_{m2} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)c + x_2] - (2n-1) \sin [(2n+1)c - x_2] \} \\ &\quad + U_{m3} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)a + x_3] - (2n-1) \sin [(2n+1)a - x_3] \} \\ &\quad + U_{m3} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)b + x_3] - (2n-1) \sin [(2n+1)b - x_3] \} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pentru coeficientul  $a_0$  (termenul liber):

$$\begin{aligned}
& -\pi a_0 = \\
& = -U_{m1}[\cos(b-x_1) + \cos(c-x_1)] - \\
& \quad - U_{m2}[\cos(a-x_2) - \cos(c-x_2)] \\
& \quad + U_{m3}[\cos(a-x_3) + \cos(b-x_3)]
\end{aligned} \tag{3.10}$$

### Cazul 2

Acest caz îl numim pe scurt cazul (a, c, b).

Avem  $a < c < b < d$ .

În figura 3.4 s-a reprezentat sistemul nesimetric ( $u_1, u_2, u_3$ ) funcție de  $x$  precum și tensiunea  $u_d(x)$ .

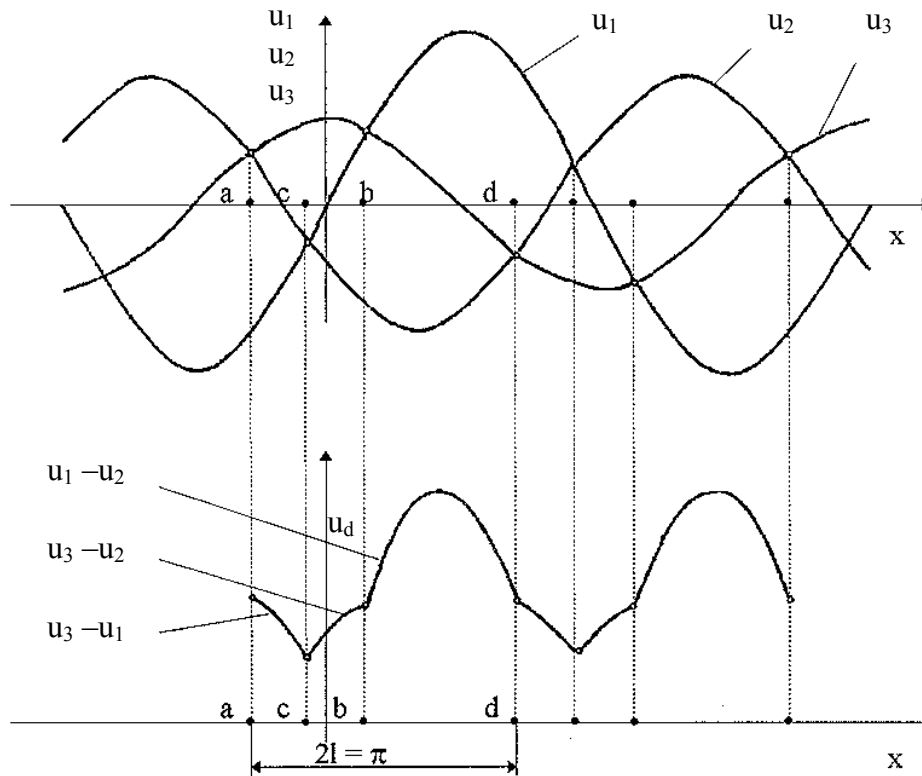


Fig. 3.4 Sistemul nesimetric aparținând cazului 2 și tensiunea  $u_d$  corespunzătoare

Se poate scrie:

$$u_d(x) = \begin{cases} u_3(x) - u_1(x), & \text{pentru } a \leq x < c \\ u_3(x) - u_2(x), & \text{pentru } c \leq x < b \\ u_1(x) - u_2(x), & \text{pentru } b \leq x < d \end{cases} \tag{3.11}$$

Coefficienții dezvoltării în serie Fourier sunt dați de relațiile:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi_a} \int_a^d u_d(x) dx \\
 a_n &= \frac{2}{\pi_a} \int_a^d u_d(x) \cos 2nx dx \\
 b_n &= \frac{2}{\pi_a} \int_a^d u_d(x) \sin 2nx dx
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Efectuând calculele, se obțin următoarele expresii pentru  $a_n$ ,  $b_n$ , și  $a_0$ .

Pentru coeficientul  $a_n$ :

$$\begin{aligned}
 (4n^2 - 1) \pi a_n &= \\
 &= -U_{m1} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)c + x_1] - (2n-1) \cos [(2n+1)c - x_1] \} \\
 &\quad - U_{m1} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)b + x_1] - (2n-1) \cos [(2n+1)b - x_1] \} \\
 &\quad + U_{m2} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)a + x_2] - (2n-1) \cos [(2n+1)a - x_2] \} \\
 &\quad + U_{m2} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)c + x_2] - (2n-1) \cos [(2n+1)c - x_2] \} \\
 &\quad - U_{m3} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)a + x_3] - (2n-1) \cos [(2n+1)a - x_3] \} \\
 &\quad + U_{m3} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)b + x_3] - (2n-1) \cos [(2n+1)b - x_3] \}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Pentru coeficientul  $b_n$ :

$$\begin{aligned}
 (4n^2 - 1) \pi b_n &= \\
 &= -U_{m1} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)c + x_1] - (2n-1) \sin [(2n+1)c - x_1] \} \\
 &\quad - U_{m1} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)b + x_1] - (2n-1) \sin [(2n+1)b - x_1] \} \\
 &\quad + U_{m2} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)a + x_2] - (2n-1) \sin [(2n+1)a - x_2] \} \\
 &\quad + U_{m2} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)c + x_2] - (2n-1) \sin [(2n+1)c - x_2] \} \\
 &\quad - U_{m3} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)a + x_3] - (2n-1) \sin [(2n+1)a - x_3] \} \\
 &\quad + U_{m3} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)b + x_3] - (2n-1) \sin [(2n+1)b - x_3] \}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Pentru coeficientul  $a_0$  (termenul liber):

$$\begin{aligned}
 -\pi a_0 &= \\
 &= -U_{m1} [\cos(c - x_1) + \cos(b - x_1)] \\
 &\quad + U_{m2} [\cos(a - x_2) + \cos(c - x_2)] \\
 &\quad - U_{m3} [\cos(a - x_3) - \cos(b - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

### Cazul 3

Acest caz îl numim pe scurt cazul (b, c, a).

Avem:  $b < c < a < d$ .



În figura 3.5 s-a reprezentat sistemul nesimetric ( $u_1, u_2, u_3$ ) funcție de  $x$  precum și tensiunea  $u_d(x)$ .

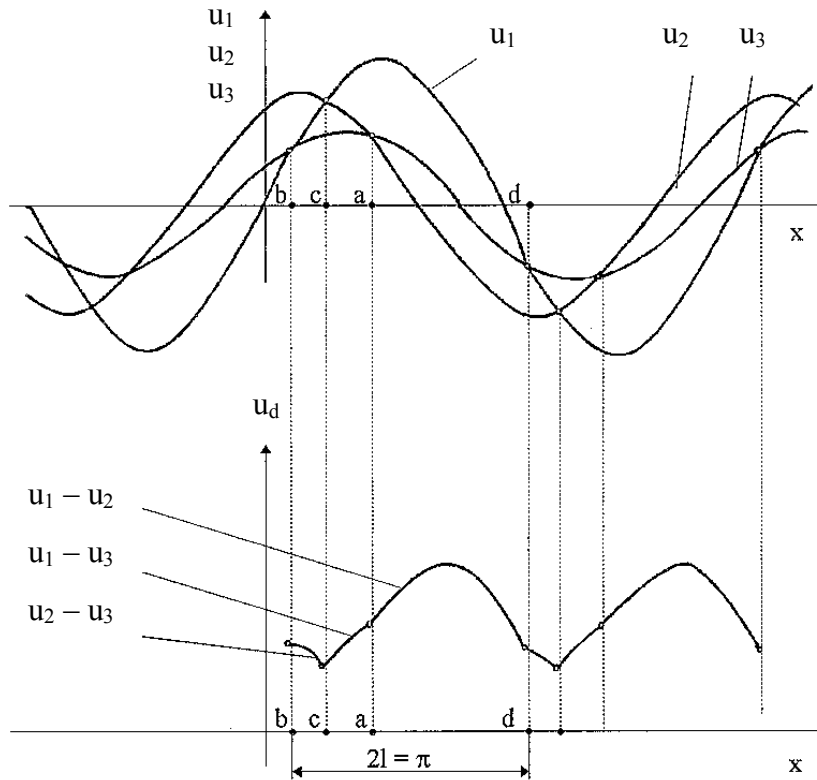


Fig. 3.5 Sistem nesimetric aparținând cazului 3 și tensiunea  $u_d$  corespunzătoare

Se poate scrie:

$$u_d(x) = \begin{cases} u_2(x) - u_3(x), & \text{pentru } b \leq x < c \\ u_1(x) - u_3(x), & \text{pentru } c \leq x < a \\ u_1(x) - u_2(x), & \text{pentru } a \leq x < d \end{cases} \quad (3.16)$$

Coeficienții dezvoltării în serie Fourier sunt dați de relațiile:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_b^d u_d(x) dx \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_b^d u_d(x) \cos 2nx dx \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_b^d u_d(x) \sin 2nx dx \end{aligned} \quad (3.17)$$

Efectuând calculele, se obțin următoarele expresii pentru  $a_n$ ,  $b_n$ , și  $a_0$ .

Pentru coeficientul  $a_n$ :

$$\begin{aligned}
& (4n^2 - 1) \pi a_n = \\
& = -U_{m1} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)c + x_1] - (2n-1) \cos [(2n+1)c - x_1] \} \\
& \quad - U_{m1} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)b + x_1] - (2n-1) \cos [(2n+1)b - x_1] \} \\
& \quad + U_{m2} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)c + x_2] - (2n-1) \cos [(2n+1)c - x_2] \} \\
& \quad + U_{m2} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)a + x_2] - (2n-1) \cos [(2n+1)a - x_2] \} \\
& \quad + U_{m3} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)b + x_3] - (2n-1) \cos [(2n+1)b - x_3] \} \\
& \quad - U_{m3} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)a + x_3] - (2n-1) \cos [(2n+1)a - x_3] \}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Pentru coeficientul  $b_n$ :

$$\begin{aligned}
& (4n^2 - 1) \pi b_n = \\
& = -U_{m1} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)c + x_1] - (2n-1) \sin [(2n+1)c - x_1] \} \\
& \quad - U_{m1} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)b + x_1] - (2n-1) \sin [(2n+1)b - x_1] \} \\
& \quad + U_{m2} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)c + x_2] - (2n-1) \sin [(2n+1)c - x_2] \} \\
& \quad + U_{m2} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)a + x_2] - (2n-1) \sin [(2n+1)a - x_2] \} \\
& \quad + U_{m3} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)b + x_3] - (2n-1) \sin [(2n+1)b - x_3] \} \\
& \quad - U_{m3} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)a + x_3] - (2n-1) \sin [(2n+1)a - x_3] \}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Pentru coeficientul  $a_0$  (termenul liber):

$$\begin{aligned}
& -\pi a_0 = \\
& = -U_{m1} [\cos(c - x_1) + \cos(b - x_1)] \\
& \quad + U_{m2} [\cos(c - x_2) + \cos(a - x_2)] \\
& \quad + U_{m3} [\cos(b - x_3) - \cos(a - x_3)]
\end{aligned} \tag{3.20}$$

#### Cazul 4

Acest caz îl numim pe scurt cazul (c, b, a).

În figura 3.6 s-a reprezentat sistemul nesimetric ( $u_1, u_2, u_3$ ) funcție de  $x$  precum și tensiunea  $u_d(x)$ .

Se poate scrie:

$$u_d(x) = \begin{cases} u_3(x) - u_2(x), & \text{pentru } c \leq x < b \\ u_1(x) - u_2(x), & \text{pentru } b \leq x < a \\ u_1(x) - u_3(x), & \text{pentru } a \leq x < d \end{cases} \tag{3.21}$$

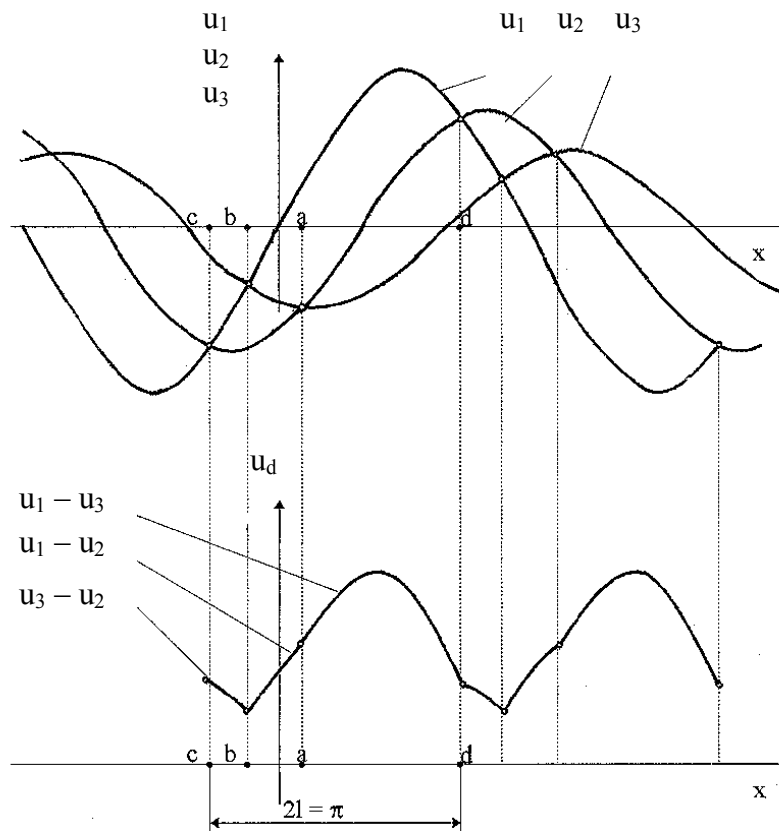


Fig. 3.6 Sistem nesimetric aparținând cazului 4 și tensiunea  $u_d$  corespunzătoare

Coefficienții dezvoltării în serie Fourier sunt dați de relațiile:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_c^d u_d(x) dx \\
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_c^d u_d(x) \cos 2nx dx \\
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_c^d u_d(x) \sin 2nx dx
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Efectuând calculele, se obțin următoarele expresii pentru  $a_n$ ,  $b_n$ , și  $a_0$ .

Pentru coeficientul  $a_n$ :

$$\begin{aligned}
 (4n^2 - 1) \pi a_n &= \\
 &= -U_{m1} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)b + x_1] - (2n-1) \cos [(2n+1)b - x_1] \} \\
 &\quad - U_{m1} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)c + x_1] - (2n-1) \cos [(2n+1)c - x_1] \} \\
 &\quad + U_{m2} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)c + x_2] - (2n-1) \cos [(2n+1)c - x_2] \} \\
 &\quad - U_{m2} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)a + x_2] - (2n-1) \cos [(2n+1)a - x_2] \} \\
 &\quad + U_{m3} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)b + x_3] - (2n-1) \cos [(2n+1)b - x_3] \} \\
 &\quad + U_{m3} \{ (2n+1) \cos [(2n-1)a + x_3] - (2n-1) \cos [(2n+1)a - x_3] \}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pentru coeficientul  $b_n$ :

$$\begin{aligned}
 (4n^2 - 1) \pi b_n &= \\
 &= -U_{m1} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)b + x_1] - (2n-1) \sin [(2n+1)b - x_1] \} \\
 &\quad - U_{m1} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)c + x_1] - (2n-1) \sin [(2n+1)c - x_1] \} \\
 &\quad + U_{m2} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)c + x_2] - (2n-1) \sin [(2n+1)c - x_2] \} \\
 &\quad - U_{m2} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)a + x_2] - (2n-1) \sin [(2n+1)a - x_2] \} \\
 &\quad + U_{m3} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)b + x_3] - (2n-1) \sin [(2n+1)b - x_3] \} \\
 &\quad + U_{m3} \{ (2n+1) \sin [(2n-1)a + x_3] - (2n-1) \sin [(2n+1)a - x_3] \}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Pentru coeficientul  $a_0$  (termenul liber):

$$\begin{aligned}
 -\pi a_0 &= \\
 &= -U_{m1} [\cos(b - x_1) + \cos(c - x_1)] \\
 &\quad + U_{m2} [\cos(c - x_2) + \cos(a - x_2)] \\
 &\quad + U_{m3} [\cos(b - x_3) - \cos(a - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

### 3.1.1.2 Cazul sistemului simetric

În acest caz particular (caz limită) avem:

$$\begin{aligned}
 U_{m1} &= U_{m2} = U_{m3} = U_m \\
 x_1 &= 0; \quad x_2 = \frac{2\pi}{3}; \quad x_3 = \frac{4\pi}{3}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

În figura 3.7 este reprezentat fazorial sistemul simetric:

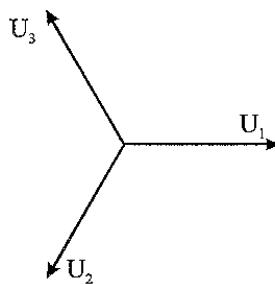


Fig. 3.7 Sistem simetric de tensiuni (reprezentare fazorială)

În figura 3.8 s-a reprezentat sistemul simetric ( $u_1, u_2, u_3$ ) funcție de  $x$ , precum și tensiunea  $u_d(x)$ .

În acest caz se obține:

$$a = -\frac{\pi}{2}; \quad c = -\frac{\pi}{6}; \quad b = \frac{\pi}{6}; \quad d = \frac{\pi}{2} \tag{3.27}$$

Particularizând formulele generale (sau abordând direct acest caz) obținem:

$$b_n = 0 \text{ (pentru orice } n). \tag{3.28}$$

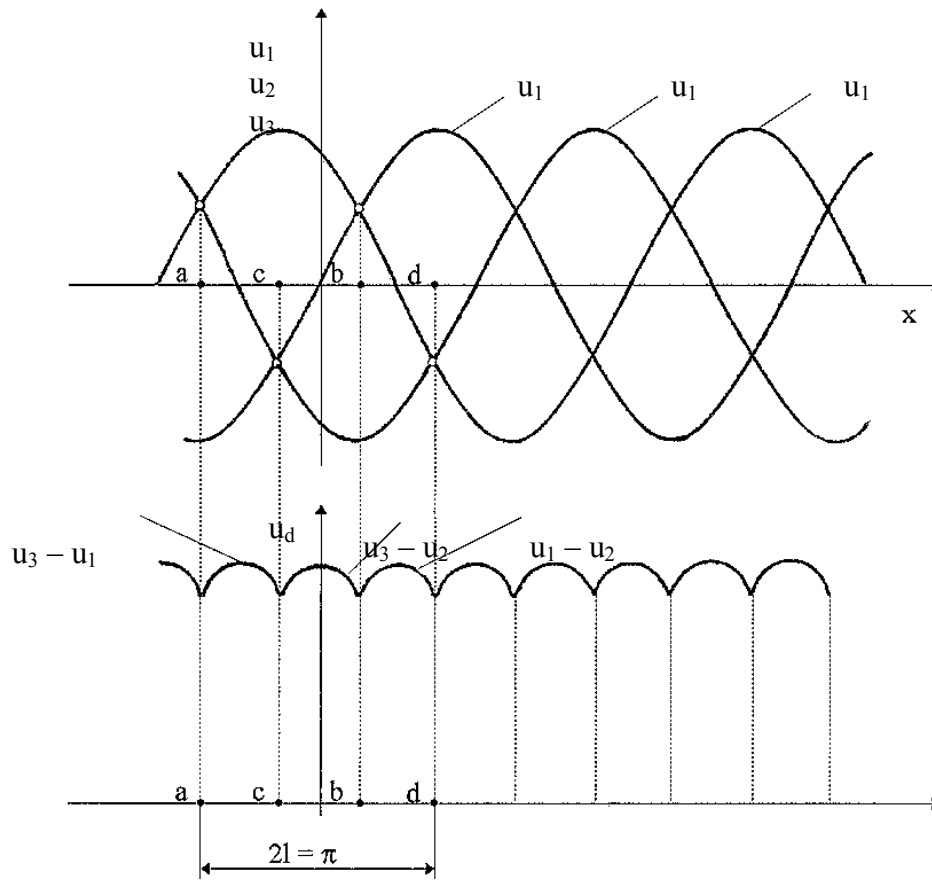


Fig. 3.8 Sistem simetric și tensiunea  $u_d$  corespunzătoare

$$a_n = \begin{cases} \frac{6\sqrt{3}(-1)^{k+1}U_m}{\pi(36k^2 - 1)}, & \text{pentru } n = 3k \\ 0, & \text{pentru } n = 3k - 1 \\ 0, & \text{pentru } n = 3k - 2 \end{cases} \quad (3.29)$$

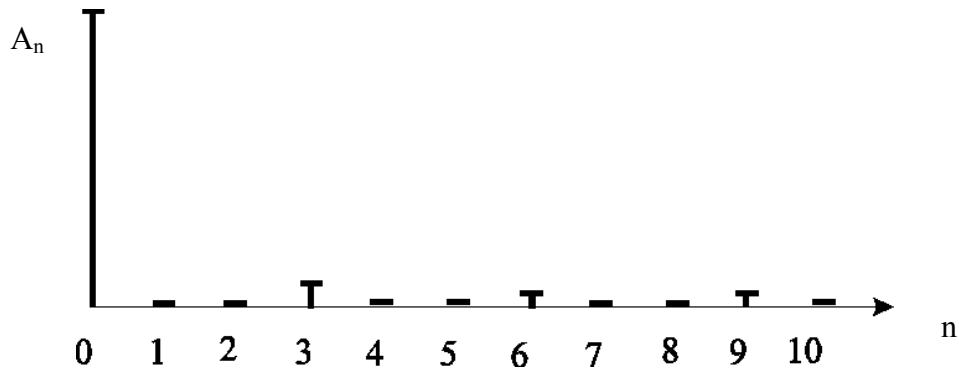
unde  $k \geq 1$

$$a_0 = \frac{3\sqrt{3}U_m}{\pi} \quad (3.30)$$

Descompunerea în serie Fourier a tensiunii  $u_d(x)$  este următoarea:

$$u_d(x) = \frac{3\sqrt{3}U_m}{\pi} + \frac{6\sqrt{3}U_m}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{36k^2 - 1} \cos 6kx \quad (3.31)$$

Spectrul de armonici pentru  $u_d$  este reprezentat în figura 3.9.

Fig. 3.9 Spectrul de armonici al tensiunii  $u_d$  pentru sistemul simetric

Se observă că amplitudinea armonicii corespunde lui  $n = 1$  este nulă:  $A_1 = 0$ . De asemenea, avem și  $A_2 = 0$ .

### 3.1.1.3 Cazul nesimetriei de module (de amplitudini)

În acest caz avem:

$$U_{m1} \neq U_{m2} \neq U_{m3}$$

$$\text{dar: } x_2 = \frac{2\pi}{3}, x_3 = \frac{4\pi}{3} \quad (3.32)$$

Toate considerațiile făcute pentru cazul general se particularizează imediat [P19].

$$\text{Notăm: } U_{m2} = \alpha U_{m1} \quad (3.33)$$

$$U_{m3} = \beta U_{m1} \quad (3.34)$$

unde  $\alpha$  și  $\beta$  sunt parametri pozitivi, subunitari.

Folosind relațiile generale (2) obținem:

$$\text{tg } a = -\sqrt{3} \cdot \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \quad (3.35)$$

$$\text{tg } b = \frac{\beta\sqrt{3}}{2 + \beta} \quad (3.36)$$

$$\text{tg } c = -\frac{\alpha\sqrt{3}}{2 + \alpha} \quad (3.37)$$

Se observă că dacă  $\alpha > \beta$  ne găsim în cazul (a, c, b) iar dacă  $\alpha < \beta$  ne găsim în cazul (c, b, a).

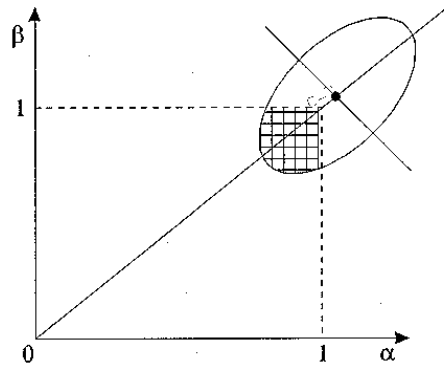
Coefficienții  $a_1$  și  $b_1$  vor depinde de  $\alpha$  și  $\beta$  și de asemenea:

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = f(\alpha, \beta) \quad (3.38)$$

Calculând gradul de disimetrie și gradul de asimetrie în acest caz, se obține:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_h = \frac{\sqrt{(2-\alpha-\beta)^2 + 3(\alpha-\beta)^2}}{2(1+\alpha+\beta)} \quad (3.39)$$

Dacă se impune  $\varepsilon_i = \varepsilon_h \leq 10\%$  se obține domeniul de variație pentru  $\alpha$  și  $\beta$  prezentat în figura 3.10. Elipsa are centrul de coordonate  $\left(\frac{17}{16}, \frac{17}{16}\right)$ , semiaxa mare egală cu  $5\sqrt{2}/16 \approx 0,44$  și semiaxa mică  $1/4 = 0,25$  [R13].



**Fig. 3.10** Domeniul de variație pentru  $\alpha$  și  $\beta$  la grad de asimetrie și disimetrie impus

În cazul particular  $\alpha = \beta$  obținem:

$$\operatorname{tg} a = \pm\infty \quad (3.40)$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2+\alpha} \quad (3.41)$$

$$\operatorname{tg} c = \frac{-\alpha\sqrt{3}}{2+\alpha} \quad (3.42)$$

În acest caz  $a_1 = f(\alpha)$  iar  $b_1 = 0$ .

Obținem:

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = |a_1| \quad (3.43)$$

De asemenea:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_h = \frac{1-\alpha}{1+2\alpha} \quad (3.44)$$

Dacă se impune  $\varepsilon_i = \varepsilon_h \leq 10\%$  se obține:

$$\alpha \geq \frac{3}{4} \quad (3.45)$$

și deci 
$$\alpha \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \quad (3.46)$$

Efectuându-se calcule numerice pentru  $\varepsilon_i = \varepsilon_h \in [0, 1]$  s-a obținut dependența  $A_1/U_{m1} = f(\varepsilon_i)$  reprezentată în figura 3.11.

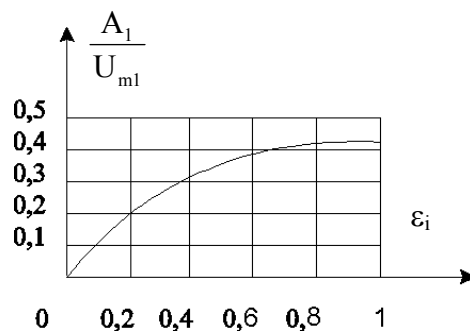


Fig. 3.11 Variația raportului  $A_1/U_{m1}$  funcție de  $\varepsilon_i$

Se observă creșterea coeficientului global de nesimetrie  $k_n = A_1/U_{m1}$  odată cu creșterea nesimetriei sistemului, estimată în mod clasic prin gradul de disimetrie egal cu gradul de asimetrie în acest caz. Acesta este coeficientul global de nesimetrie de ordinul I, deci care ia în considerare numai armonica de ordinul I. El se mai poate nota pentru claritate cu  $k_{n1}$ . În continuare, în această lucrare se va introduce coeficientul global de nesimetrie de ordinul II care ține seama și de armonica de ordinul II ( $k_{n2}$ ). Uneori vom nota mai simplu,  $k_{n2} = k_n$ .

Acest rezultat confirmă justetea introducerii coeficientului global de nesimetrie ca un indicator al unui sistem trifazat nesimetric [R13], [P19].

### 3.1.1.4 Cazul nesimetriei de unghiuri (de defazaje)

În acest caz avem:

$$x_2 \neq \frac{2\pi}{3}; x_3 \neq \frac{4\pi}{3}$$

dar: 
$$U_{m1} = U_{m2} = U_{m3} = U_m \quad (3.47)$$

Și în acest caz formulele și considerațiile generale se particularizează imediat.

Folosind relațiile generale (3.2) obținem:

$$\operatorname{tg} a = -\operatorname{ctg} \frac{x_2 + x_3}{2} \quad (3.48)$$

$$\operatorname{tg} b = -\operatorname{ctg} \frac{x_3}{2} \quad (3.49)$$

$$\operatorname{tg} c = -\operatorname{ctg} \frac{x_2}{2} \quad (3.50)$$

Din inegalitatea 
$$0 < x_2 < x_3 < 2\pi \quad (3.51)$$

rezultă: 
$$\operatorname{tg} c < \operatorname{tg} b \quad (3.52)$$



ceea ce înseamnă că ne putem găsi în cazul (a, c, b) sau în cazul (c, b, a).

### 3.1.1.5 Cazul anulării unei tensiuni

Să presupunem că  $u_3 = 0$ , deci  $U_{m3} = 0$ . Avem un sistem trifazat la limită, respectiv un sistem accentuat nesimetric.

Vom avea condițiile:

$$\begin{aligned} U_{m1} &= U_{m2} = U_m \\ U_{m3} &= 0 \\ x_1 &= 0; x_2 = \frac{2\pi}{3}; x_3 = \frac{4\pi}{3} \end{aligned} \quad (3.53)$$

În figura 3.12 s-a reprezentat fazorial acest sistem nesimetric iar în figura 3.13 s-au reprezentat  $u_1, u_2, u_3, u_d$  funcție de  $x$ .

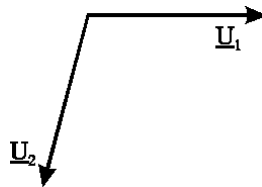


Fig. 3.12 Sistem accentuat nesimetric ( $u_3 = 0$ ), reprezentare fazorială

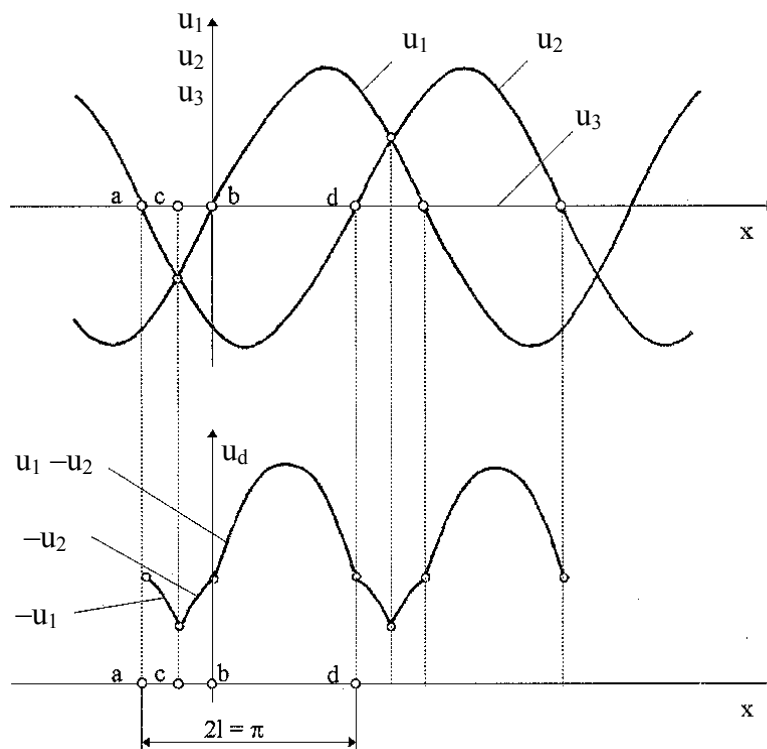


Fig. 3.13 Sistem accentuat nesimetric ( $u_3 = 0$ ) și tensiunea  $u_d$  corespunzătoare

Rezultă în acest caz:

$$a = -\frac{\pi}{3}; c = -\frac{\pi}{6}; b = 0; d = \frac{2\pi}{3} \quad (3.54)$$

Din formulele generale se obțin în urma unor calcule următoarele expresii pentru  $a_n$ ,  $b_n$ , și  $a_0$ :

$$a_n = \frac{U_m}{\pi(4n^2 - 1)} \left[ -2 - 2\sqrt{3} \cos \frac{n\pi}{3} - 2 \cos \frac{2n\pi}{3} \right] \quad (3.55)$$

$$b_n = \frac{U_m}{\pi(4n^2 - 1)} \left[ 2 \sin \frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3} \sin \frac{n\pi}{3} \right] \quad (3.56)$$

$$a_0 = \frac{U_m(2 + \sqrt{3})}{\pi} \quad (3.57)$$

Spectrul de armonici pentru  $u_d$  este indicat în figura 3.14.

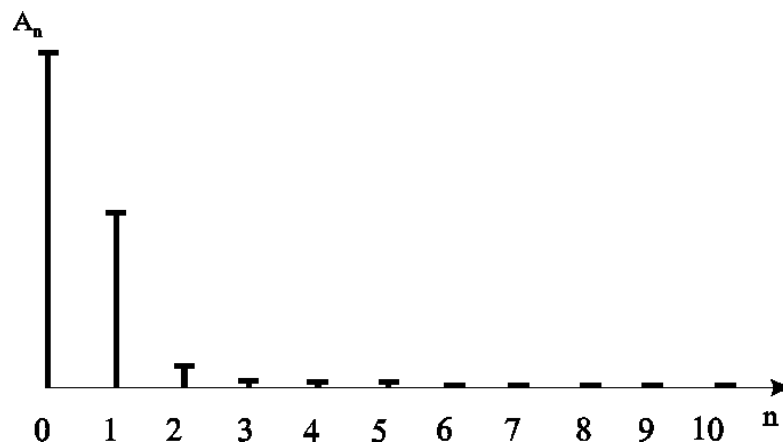


Fig.3.14 Spectrul de armonici al tensiunii  $u_d$  pentru sistemul accentuat nesimetric cu  $u_3 = 0$

Amplitudinea armonicii fundamentale :

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (3.58)$$

se obține în urma unui calcul.

$$A_1 = \frac{2U_m}{3\pi} \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \quad (3.59)$$

$$A_1 = \frac{2U_m}{3\pi} (1 + \sqrt{3}) \quad (3.60)$$

$$A_1 \approx 0,579 U_m \quad (3.61)$$

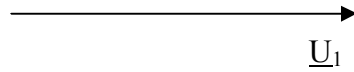
### 3.1.1.6 Cazul anulării a două tensiuni

Să presupunem că  $u_3 = 0$ ;  $u_2 = 0$ , deci  $U_{m3} = U_{m2} = 0$ .

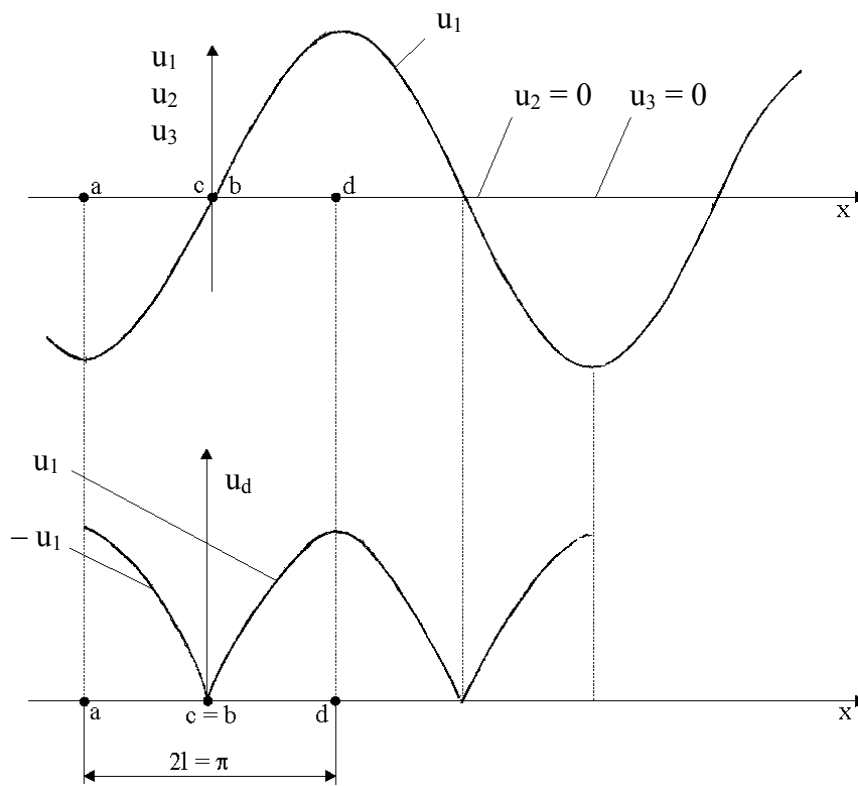
Vom avea condițiile:

$$\begin{aligned}
 U_{m1} &= U_m \\
 U_{m2} &= U_{m3} = 0 \\
 x_1 &= 0; x_2 = \frac{2\pi}{3}; x_3 = \frac{4\pi}{3}
 \end{aligned}
 \tag{3.62}$$

În figura 3.15 s-a reprezentat fazorial acest sistem nesimetric iar în figura 3.16 s-au reprezentat  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  și  $u_d$  funcție de  $x$ .



**Fig.3.15** Sistem accentuat nesimetric ( $u_3 = 0$ ,  $u_2 = 0$ ), reprezentare fazorială



**Fig.3.16** Sistem accentuat nesimetric ( $u_3 = 0$ ,  $u_2 = 0$ ) și tensiunea  $u_d$  corespunzătoare

Rezultă în acest caz:

$$a = -\frac{\pi}{2}; b = c = 0; d = \frac{\pi}{2}
 \tag{3.63}$$

Din formulele generale se obțin următoarele expresii:

$$a_n = -\frac{4U_m}{\pi(4n^2 - 1)}
 \tag{3.64}$$

$$b_n = 0 \quad (3.65)$$

$$a_0 = \frac{2U_m}{\pi} \quad (3.66)$$

Spectrul de armonici pentru  $u_d$  este indicat în figura 3.17.

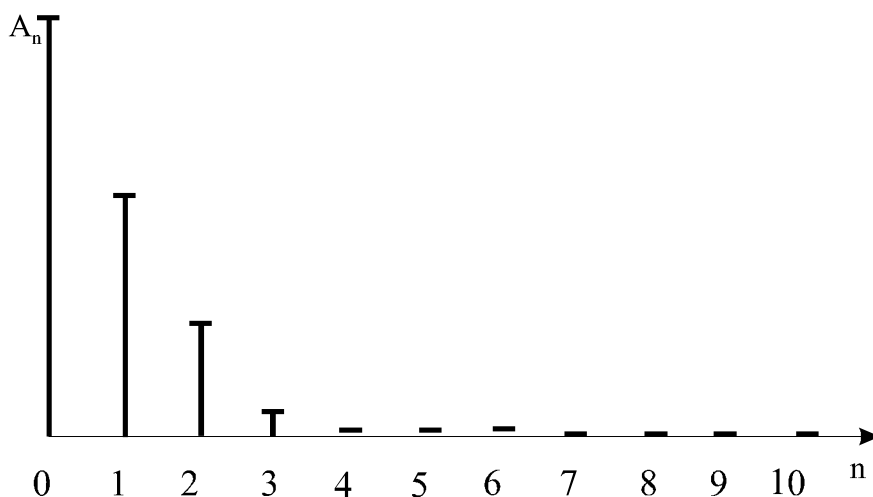


Fig.3.17 Spectrul de armonici al tensiunii  $u_d$  pentru sistemul accentuat nesimetric cu  $u_3 = 0$ ,  $u_2 = 0$

Amplitudinea armonicii fundamentale:

$$A_1 = \frac{4U_m}{3\pi} \quad (3.67)$$

$$A_1 \approx 0,424 U_m \quad (3.68)$$

### 3.1.1.7 Cazul funcționării monofazate

În acest caz,  $u_3 = 0$  deci  $U_{m3} = 0$ .

Vom avea condițiile:

$$\begin{aligned} U_{m1} &= U_{m2} = U_m \\ U_{m3} &= 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$x_1 = 0; x_2 = \pi; x_3 \text{ oarecare}$$

În figura 3.18 s-a reprezentat fazorial acest sistem nesimetric iar în figura 3.19 s-au reprezentat  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  și  $u_d$  funcție de  $x$ .

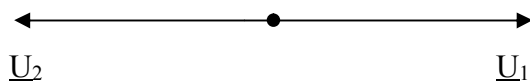


Fig. 3.18 Sistem accentuat nesimetric (cazul funcționării monofazate, reprezentare fazorială)

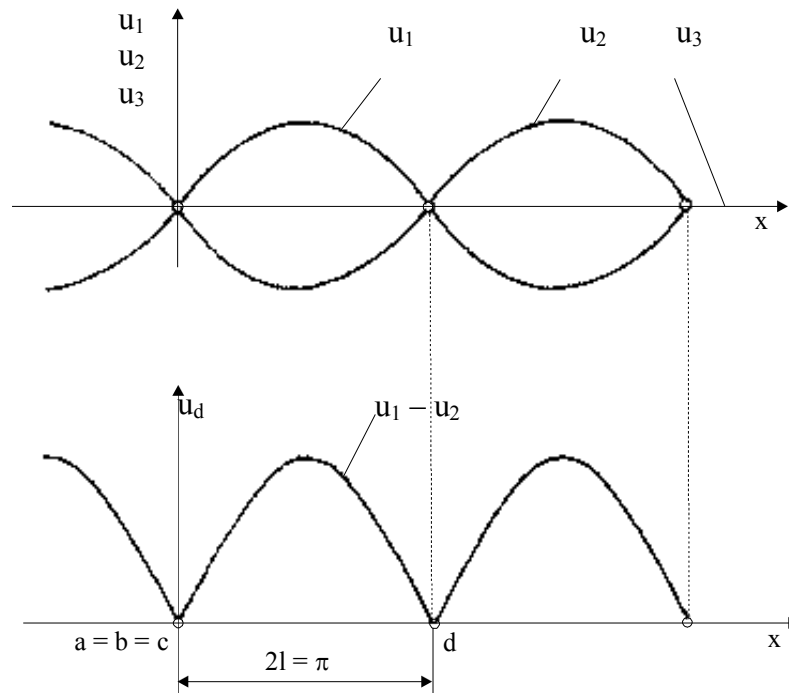


Fig. 3.19 Sistem accentuat nesimetric (cazul funcționării monofazate) și tensiunea  $u_d$  corespunzătoare

Rezultă:

$$a = b = c = 0; d = \pi \quad (3.70)$$

Particularizând formulele generale din cazul  $(a, c, b)$  sau  $(b, c, a)$  obținem:

$$a_n = -\frac{8U_m}{\pi(4n^2 - 1)} \quad (3.71)$$

$$a_0 = \frac{4U_m}{\pi} \quad (3.72)$$

$$b_n = 0 \quad (3.73)$$

Descompunerea în serie Fourier a tensiunii  $u_d(x)$  este următoarea:

$$u_d(x) = \frac{4U_m}{\pi} - \frac{8U_m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} \quad (3.74)$$

Spectrul de armonici pentru  $u_d$  este reprezentat în figura 3.20.

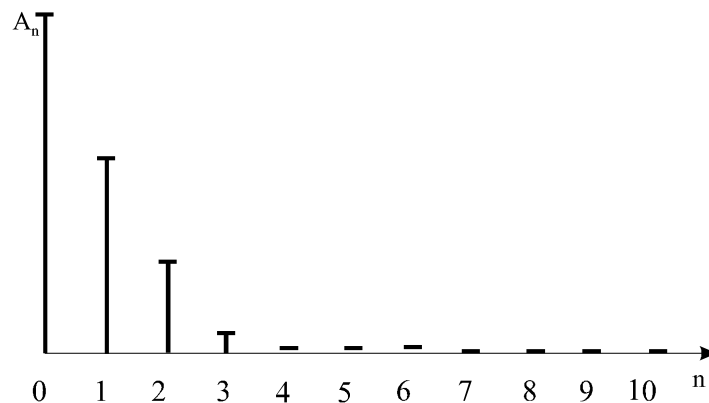


Fig.3.20 Spectrul de armonici al tensiunii  $u_d$  pentru sistemul accentuat nesimetric ce corespunde cazului funcționării monofazate

Amplitudinea armonicii fundamentale este:

$$A_1 = \frac{8U_m}{3\pi} \quad (3.75)$$

$$A_1 \approx 0,848 U_m \quad (3.76)$$

### 3.1.1.8 Sisteme de secvență inversă

Analiza sistemelor de secvență inversă se reduce la analiza sistemelor de secvență directă. Într-adevăr, în cazul unui sistem de secvență inversă cu  $U_{m1} = A$ ,  $U_{m3} = B$ ,  $U_{m2} = C$  și  $x_3 = \beta$ ,  $x_2 = \gamma$  va trebui să considerăm sistemul „pereche“ de secvență directă:  $U_{m1} = A$ ,  $U_{m2} = B$ ,  $U_{m3} = C$  și  $x_2 = \beta$ ,  $x_3 = \gamma$ . Coeficienții seriei Fourier aferenți lui  $u_d$  vor fi aceiași pentru cele două sisteme [P19].

### 3.1.2 Program de calculator PDIODE

Pe baza metodei analitice prezentate anterior s-a elaborat un program de calculator (numit **PDIODE**).

Programul elaborat parcurge următoarele etape:

1. Se introduc ca date inițiale parametrii  $U_{m1}$ ,  $U_{m2}$ ,  $U_{m3}$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ; vom pune întotdeauna  $U_{m1} = 1$  și  $x_1 = 0$ ; fazele inițiale se pot exprima în grade sau în radiani (opțional).
2. Se calculează  $U_h$ ,  $U_d$ ,  $U_i$  precum și gradele de asimetrie și disimetrie  $\epsilon_h$ ,  $\epsilon_i$ , cu ajutorul formulelor cunoscute; acestea vor fi afișate în final.
3. Se calculează numitorii și numărătorii expresiilor pentru calculul numerelor a, b, c; ei sunt notați  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ , respectiv  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ . Dacă cel puțin unul dintre numitori este zero, se afișează „caz singular de tip 1“ precum și valorile numitorilor. Dacă nu, se **calculează** numerele a, b, c pe baza relațiilor (3.2).
4. Dacă avem  $a = b$  sau  $b = c$  sau  $c = a$  se afișează „caz singular de tip 2“ precum și valorile lui a, b, c.
5. Dacă nu, se calculează în unul dintre cele 4 cazuri în care ne putem găsi, cu formulele corespunzătoare valorile lui  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$ , pentru  $n = 1, 2, \dots, 10$ . De asemenea, se calculează  $A_n$  și se afișează lista coeficienților  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $A_n$  precum și a, b, c.
6. Se afișează coeficientul global de nesimetrie  $k_n = A_1 + A_2$ .
7. Se afișează reprezentarea grafică a spectrului lui  $u_d$  (amplitudinile funcție de ordinul armonicii respective).

Listiugul programului **PDIODE** este prezentat în anexele prezentei lucrări, ca și o serie de rezultate obținute prin utilizarea programului.

Ecranul programului **PDIODE** este prezentat în figura 3.21. S-a considerat sistemul trifazat nesimetric de tensiuni caracterizat de următorii parametri:  $U_{m1} = 1$ ,  $U_{m2} = 0,75$ ,  $U_{m3} = 0,5$ ;  $x_1 = 0^\circ$ ,  $x_2 = 150^\circ$ ,  $x_3 = 270^\circ$  ( care reprezintă cazul acb) aplicat asupra unei punți de diode ideale. S-a obținut analiza armonică a tensiunii  $u_d$  (fig.3.21.a) și reprezentarea spectrului de armonici (fig. 3.21.b).

```
PROGRAM PENTRU ANALIZA PUNTII DE DIODE IDEALE ALIMENTATE CU UN SISTEM NESIMETRIC
DE TENSIUNI (PDIODE).
```

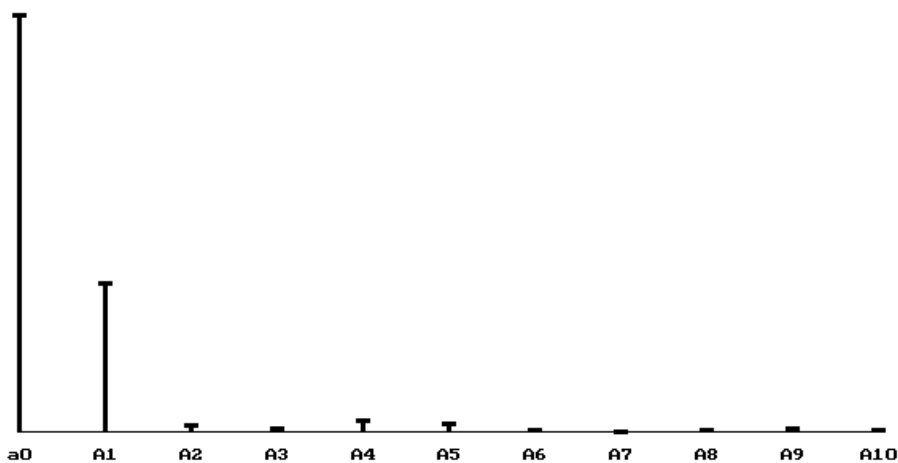
```
Introduceti valorile tensiunilor , Um1,Um2,Um3:1 0.75 0.5
Alegeti exprimarea fazelor in radiani sau grade [r/g]:g
Introduceti valorile fazelor initiale , x1,x2,x3:0 150 270
```

```
a=-9.3223663069E-01 b= 4.6364760900E-01 c =-2.2353961103E-01
Sistem in cazul : acb
a0= 1.2412070235E+00
a1=-3.9910117761E-01 b1= 1.8673781197E-01 A1= 4.4062768909E-01
a2= 6.8289869380E-03 b2=-1.5205778986E-02 A2= 1.6668856505E-02
a3=-3.2567712774E-03 b3= 1.0190115325E-02 A3= 1.0697897433E-02
a4= 8.9668533640E-03 b4= 3.2923918075E-02 A4= 3.4123142304E-02
a5= 1.4224891016E-02 b5= 1.6447888970E-02 A5= 2.1745817436E-02
a6= 2.0848083423E-03 b6= 1.8542852677E-03 A6= 2.7901253876E-03
a7=-1.1967117158E-03 b7= 9.7157456710E-04 A7= 1.5414525845E-03
a8= 4.5626173602E-03 b8=-2.3736831050E-03 A8= 5.1431360724E-03
a9= 4.1860762919E-03 b9=-6.4031959158E-03 A9= 7.6501080161E-03
a10= 7.0674286465E-04 b10=-3.2440767011E-03 A10= 3.3201685378E-03
Coeficientul global de nesimetrie kn= 4.5729654559E-01

epsilon_h= 1.7113799853E-01 epsilon_i= 3.4768005591E-01
```

a)

acb



b)

Fig.3.21 Ecranul programului PDIODE ( a – analiza armonică, b – spectrul)

### 3.1.3 Metoda simulării pe calculator

Pentru modelarea și simularea pe calculator a punții de diode alimentată cu un sistem nesimetric de tensiuni și având ca sarcină o rezistență pură, am utilizat produsul soft **PSPICE** al firmei MicroSim Corporatin (SUA).

În figura 3.22 este prezentată schema electrică a unei punți trifazate de diode, cu numerotarea corespunzătoare a nodurilor.

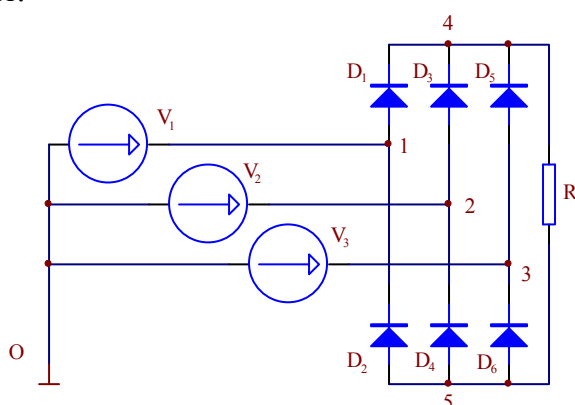


Fig. 3.22 Puntea de diode pentru modelarea PSPICE

Fiecare dintre tensiunile V1, V2, V3 au fost generate în cadrul programului **PSPICE** folosind instrucțiunea pentru specificarea surselor de tensiune sinusoidală SIN.

Sintaxa acestei instrucțiuni este:

SIN (< vo > < va > < f > < td > < df > < faza >)

și poate defini pe cazul cel mai general un semnal sinusoidal amortizat.

Explicitarea parametrilor din instrucțiunea de mai sus este următoarea:

Parametri	Valoarea implicată	Unitate
vo – tensiunea de offset	–	volt
va – amplitudinea	–	volt
f – frecvența	1/TSTOP	hertz
td – întârzierea	0	secunde
df – factor de amortizare	0	secunde
faza – defazajul semnalului	0	grade

Am folosit vo = 0, td = 0, df = 0.

Utilizăm diode pentru care sunt specificați în cadrul instrucțiunii .MODEL parametrii de model: IS (curentul de saturație al joncțiunii) și BV (tensiunea de străpungere a joncțiunii).



S-a utilizat modelul de diodă:

MODEL DI D(IS = 2e - 15 BV = 1000)

Rezistența de sarcină R1 are valoarea 1 k $\Omega$

Folosind modelul de punte prezentat mai sus , s-a făcut analiza **PSPICE** pentru mai multe cazuri, relizându-se următoarele:

- analiza tranzitorie (cu pasul 5 ms) pentru mărimile V(1), V(2), V(3), V(4,5);
- reprezentarea funcției de timp a mărimilor V(1), V(2), V(3), V(4,5), pe intervalul 0...40 ms;
- analiza Fourier pentru mărimea V(4,5);
- reprezentarea spectrului de armonici pentru mărimea V(4,5).

Rezultatele obținute în urma analizei cu programul **PSPICE** concordă cu rezultatele obținute prin metoda analitică (respectiv cu programul **PDIODE** care are la bază această metodă).

În continuare vom prezenta detaliat numai analiza Fourier pentru mărimea  $V(4,5) = u_d$ . Mai exact, vom prezenta într-un tabel rezultatele obținute cu metoda analitică și cu metoda simulării **PSPICE** pentru componenta continuă și primele patru armonici, precum și o comparație între aceste rezultate. În cazul simulării **PSPICE**, amplitudinea tensiunii maxime V(1) este de 100 V și prin urmare rezultatele metodei analitice au fost amplificate de 100 de ori pentru a fi comparate cu acelea de la analiza Fourier, unde s-a considerat  $U_{ml} = 100V$ . Prin alegerea acestei tensiuni de 100 V s-a urmărit reducerea erorii produse de căderea de tensiune pe diode în conducție directă (de cca. 0,8 V). Frecvența centrală a analizei Fourier a fost de 50 Hz.

### 3.1.4 Compararea rezultatelor obținute prin metoda analitică și prin metoda simulării pe calculator

S-au analizat prin ambele metode opt cazuri particulare care sunt prezentate în continuare, cu notațiile de la modelarea **PSPICE**.

#### 1. Cazul sistemului simetric:

Mărimea	Amplitudinea	Faza
V1	100 V	0°
V2	100 V	-120°
V3	100 V	-240°

**2. Cazul sistemului nesimetric (anularea unei tensiuni):**

Mărimea	Amplitudinea	Faza
V1	100 V	0°
V2	100 V	-120°
V3	0 V	-240°

**3. Cazul sistemului nesimetric (anularea a două tensiuni):**

Mărimea	Amplitudinea	Faza
V1	100 V	0°
V2	0 V	-120°
V3	0 V	-240°

**4. Cazul sistemului nesimetric (funcționare monofazată)**

Mărimea	Amplitudinea	Faza
V1	100 V	0°
V2	100 V	-180°
V3	0 V	0°

**5. Cazul sistemului nesimetric caracterizat de:**

Mărimea	Amplitudinea	Faza
V1	100 V	0°
V2	75 V	-330°
V3	50 V	-345°

**6. Cazul sistemului nesimetric caracterizat de:**

Mărimea	Amplitudinea	Faza
V1	100 V	0°
V2	75 V	-150°
V3	50 V	-270°

**7. Cazul sistemului nesimetric caracterizat de:**

Mărimea	Amplitudinea	Faza
V1	100 V	0°
V2	75 V	-300°
V3	50 V	-330°

### 8. Cazul sistemului nesimetric caracterizat de:

Mărimea	Amplitudinea	Faza
V1	100 V	0°
V2	75 V	-60°
V3	50 V	-120°

Rezultatele obținute sunt trecute în tabelul 3.1.

Tabelul 3.1.

Sistemul trifazat aplicat punții	Frecvența (Hz)	Componenta Fourier pentru V(4,5)	Metoda analitică (programul PDIODE) (V)	Metoda simulării pe calculator (PSPICE) (V)	Eroare relativă (%)
Sistemul 1 (simetric)	0	$a_0$	165,3	163,3	-1,2
	100	$A_1$	-	-	-
	200	$A_2$	-	-	-
	300	$A_3$	9,5	9,5	-
	400	$A_4$	-	-	-
Sistemul 2 ( $V_3 = 0$ )	0	$a_0$	118,7	116,8	-1,6
	100	$A_1$	57,9	57,3	-1
	200	$A_2$	3,1	3,1	-
	300	$A_3$	0,5	0,49	-2
	400	$A_4$	0,73	0,72	-1,3
Sistemul 3 ( $V_3 = 0, V_2 = 0$ )	0	$a_0$	63,8	61,9	-2,9
	100	$A_1$	42,4	41,8	-1,4
	200	$A_2$	8,5	8,4	-1,1
	300	$A_3$	3,6	3,5	-2,8
	400	$A_4$	2,02	1,96	2,9
Sistemul 4 (monofazat)	0	$a_0$	127,3	125,3	-1,5
	100	$A_1$	84,8	83,7	-1,2
	200	$A_2$	16,9	16,4	-2,9
	300	$A_3$	7,2	7,0	-2,7
	400	$A_4$	4,04	3,95	-2,2

Tabelul 3.1.(continuare)

Sistemul trifazat Aplicat punții	Frecvența (Hz)	Componenta Fourier pentru V(4,5)	Metoda analitică (programul PDIODE) (V)	Metoda simulării pe calculator (PSPICE) (V)	Eroare relativă (%)
Sistemul 5 (caz (a,b,c))	0	a <sub>0</sub>	42,7	41,9	-1,8
	100	A <sub>1</sub>	12,4	12,3	-0,8
	200	A <sub>2</sub>	3,05	2,97	-2,6
	300	A <sub>3</sub>	0,82	0,8	-2,4
	400	A <sub>4</sub>	0,45	0,44	-2,2
Sistemul 6 (caz (a,c,b))	0	a <sub>0</sub>	124,1	122,2	-1,5
	100	A <sub>1</sub>	44,0	43,5	-1,1
	200	A <sub>2</sub>	1,66	1,62	-2,4
	300	A <sub>3</sub>	1,07	1,10	2,8
	400	A <sub>4</sub>	3,41	3,31	-2,9
Sistemul 7 (caz (b,c,a))	0	a <sub>0</sub>	61,2	59,5	-2,7
	100	A <sub>1</sub>	31,2	30,8	-1,2
	200	A <sub>2</sub>	2,96	2,89	-2,3
	300	A <sub>3</sub>	1,24	1,21	-2,4
	400	A <sub>4</sub>	0,56	0,55	-1,7
Sistemul 8 (caz (c,b,a))	0	a <sub>0</sub>	91,8	89,9	-2,0
	100	A <sub>1</sub>	42,6	42,1	-1,1
	200	A <sub>2</sub>	3,05	2,98	-2,2
	300	A <sub>3</sub>	1,42	1,38	-2,8
	400	A <sub>4</sub>	0,99	1,01	-2,0

După cum se observă, rezultatele obținute prin metoda analitică (respectiv cu programul **PDIODE**, bazat pe metoda analitică) și prin metoda simulării pe calculator (**PSPICE**) sunt apropiate, eroarea relativă maximă nedepășind 2,9 %.

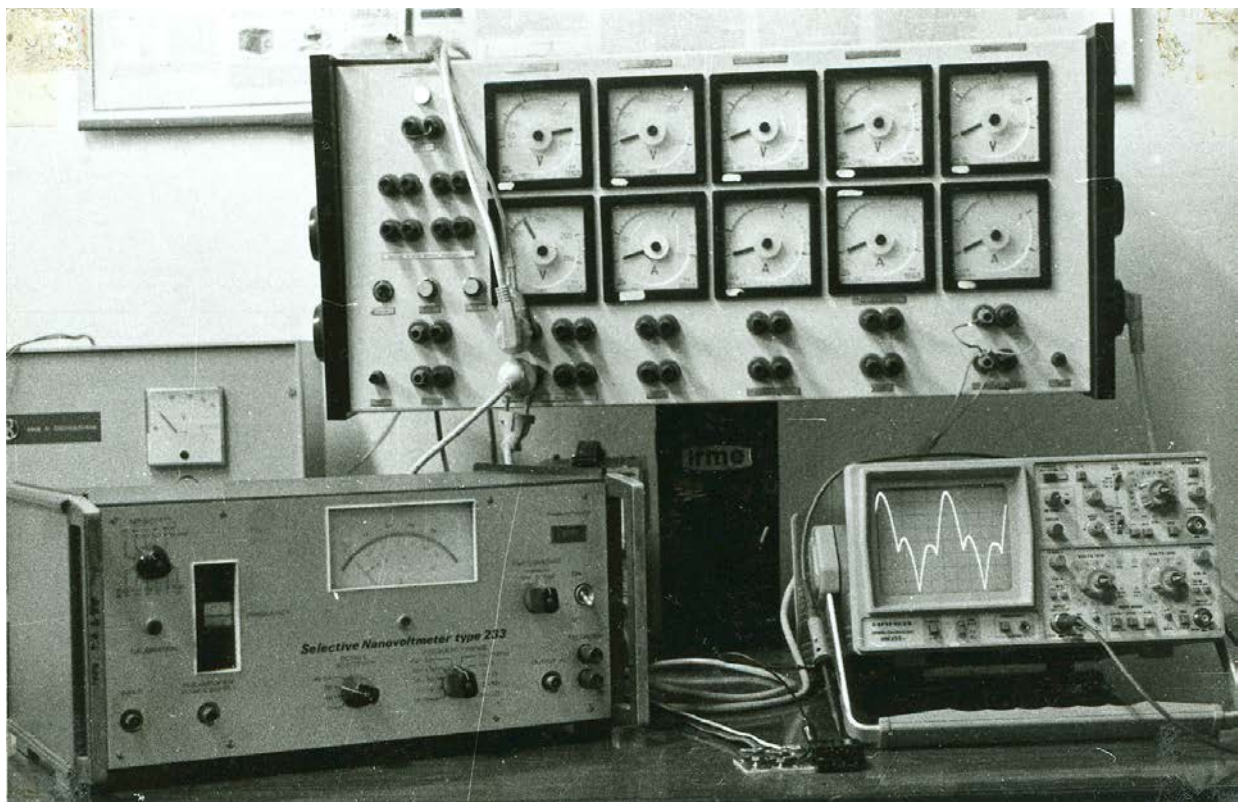
### 3.1.5 Măsurători experimentale

Pentru verificarea rezultatelor obținute prin metoda analitică și prin metoda simulării pe calculator s-au măsurat experimental armonicile tensiunii  $u_d$  în cazurile prezentate în paragrafele 3.1.1.2 (cazul sistemului simetric), 3.1.1.5 (cazul anulării unei tensiuni), 3.1.1.6 (cazul anulării a două tensiuni) și 3.1.1.7 (cazul funcționării monofazate).

S-a utilizat un nanovoltmetru selectiv UNIPAN-tip 233 (Polonia) cu următoarele date tehnice principale:

- intrare:  $1\mu\text{V} \dots 100\text{ mV}$
- divizor al tensiunii de intrare: 1 : 1000
- frecvența: 1,5 ... 150 kHz
- selectivitate: 0; 18; 36; 54 dB/octavă.

Tensiunea  $u_d$  a fost vizualizată cu ajutorul unui osciloscop HAMEG-HM 203, 20 Mhz (Germania) (fig. 3.23)



**Fig.3.23** Vizualizarea tensiunii  $u_d$  și măsurarea armonicilor respective

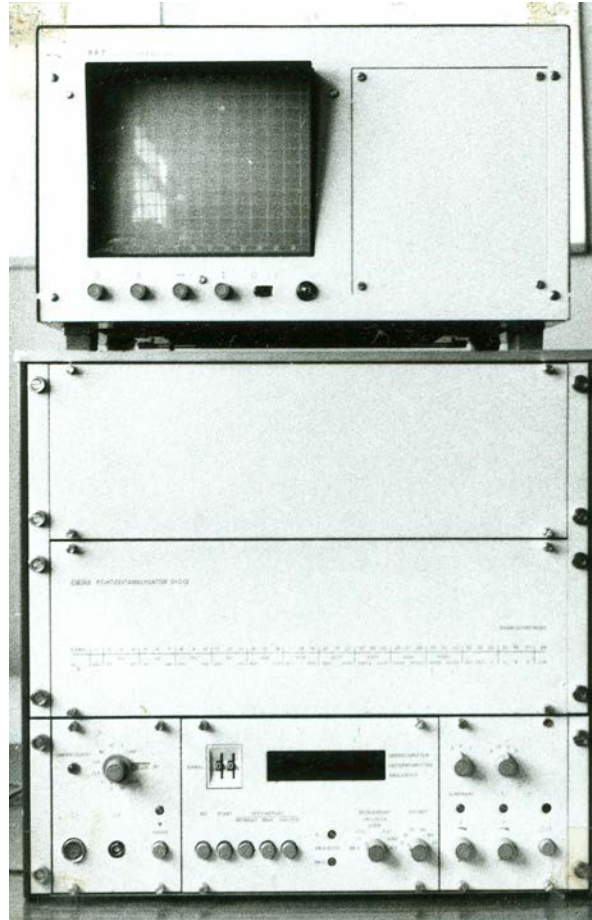
S-au obținut următoarele date experimentale, pornind de la situația inițială  $U_{m1} = U_{m2} = U_{m3} = 24V$  (tabelul 3.2).

Tabelul 3.2

Sistemul trifazat aplicat punții	Frecvența (Hz)	Componenta Fourier pentru $u_d$	Valori măsurate experimental (V)	Valori obținute prin simulare PSPICE (V)	Eroare relativă (%)
Sistemul 1 (simetric)	0	$a_0$	39,3	39,2	0,2
	300	$A_3$	2,26	2,28	-0,8
	600	$A_6$	0,480	0,484	-0,8
Sistemul 2 ( $u_3 = 0$ )	0	$a_0$	28,1	28	0,3
	100	$A_1$	13,7	13,75	-0,4
	200	$A_2$	0,745	0,750	-0,6
Sistemul 3 ( $u_3 = 0, u_2 = 0$ )	0	$a_0$	14,9	14,8	0,6
	100	$A_1$	9,95	10	-0,5
	200	$A_2$	1,99	2,01	-0,9
	300	$A_3$	0,81	0,815	-0,6
Sistemul 4 (monofazat)	0	$a_0$	30,16	30,1	0,2
	100	$A_1$	20,15	20	0,7
	200	$A_2$	3,9	3,93	-0,7
	300	$A_3$	1,67	1,68	-0,6

Valorile măsurate experimental sunt apropiate de acelea obținute prin simulare **PSPICE** (eroare relativă maximă 0,9%).

De asemenea s-a făcut analiza armonică a tensiunii  $u_d$ , folosind aparatul RFT-Sichtgerät SG1 (Germania) (fig3.24). Rezultatele obținute coincid practic cu acelea din tabelul 3.2.



**Fig.3.24** Analiza armonică a tensiunii  $u_d$  cu aparatul RFT-Sichtgerat SG1

### 3.2 Puntea de diode alimentând o sarcină complexă

În cele ce urmează se va studia puntea de diode alimentând o sarcină formată dintr-o rezistență  $R_d$ , o reactanță inductivă  $X_d$  și o sursă de tensiune contraelectromotoare  $E_d$ . Sursa de tensiune alternativă trifazată posedă în cele trei faze reactanțele  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$ . Sistemul de tensiuni electromotoare ( $e_a$ ,  $e_b$ ,  $e_c$ ) este în general nesimetric.

Se vor deduce formele de undă ale mărimilor care intervin la funcționarea punții și se vor calcula armonicile acestor mărimi.

Se va prezenta o metodă analitică obținută prin adaptarea și dezvoltarea unor procedee de calcul din literatura tehnică de specialitate [R3], [R4], [S3], [S4], [S5], [S6], [S7], [S8], [W3].

Apoi se va face o modelare și o simulare pe calculator precum și o comparație a rezultatelor obținute prin metoda analitică și prin metoda analizei pe calculator.

#### 3.2.1 Metoda analitică

Metoda analitică dezvoltată în continuare permite calculul armonicilor de curent pentru o punte trifazată de diode sub condiții de dezechilibru a sursei de alimentare. Expresiile analitice pentru armonicile de curent sunt obținute luând în considerare efectele undei de curent continuu și a

unghiului de comutație. În literatura de specialitate există lucrări care tratează această problemă, dar în diferite ipoteze de lucru [S6].

Astfel, în unele lucrări impedanța pentru partea de curent continuu este considerată infinită, deci curentul continuu este considerat perfect constant (fără efect de undă, deci fără ondulații). În alte lucrări se neglijează reactanța de comutație (deci unghiul de comutație) sau se consideră puntea ca o sursă de tensiune ideală (impedanța părții de curent alternativ este cu mult mai mică decât impedanța părții de curent continuu).

În metoda analitică prezentată în continuare se iau în considerare efectele undei de curent continuu și ale unghiului de comutație. Impedanța părții de curent alternativ nu este necesar să fie mai mică decât impedanța părții de curent continuu. Ele pot fi comparabile în mărime.

Metoda este foarte precisă, rezultatele obținute fiind foarte apropiate față de acelea obținute prin metoda simulării pe calculator [S6].

### 3.2.1.1 Expresiile generale pentru armonicile de curent.

În figura 3.25 este reprezentată puntea trifazată analizată.

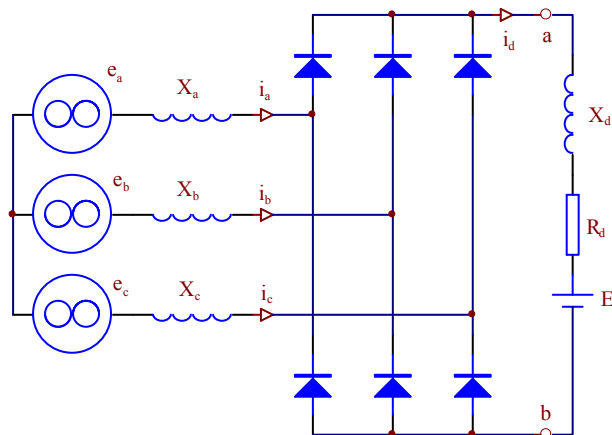


Fig.3.25 Punte de diode alimentată nesimetric, cu o sarcină complexă

Curentul  $i_d$  al părții de curent continuu constă în componenta  $I_d$  și în componenta alternativă  $i_{dr}$ . Expresia generală pentru acest curent va fi deci:

$$i_d = I_d + i_{dr} = I_d + \sum_m i_{dm} = I_d + \sum_m \sqrt{2} I_{dm} \cos(mx - \beta_m) \quad (3.77)$$

unde:

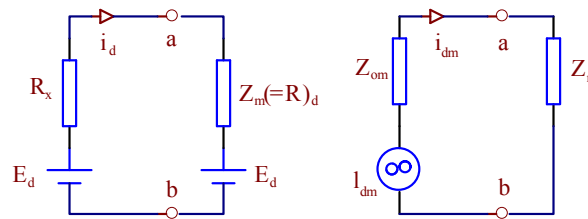
$m$  = ordinul armonicii;

$I_{dm}$  = valoarea efectivă a armonicii  $m$ ;

$\beta_m$  = faza inițială pentru armonica  $m$ .



Considerând circuitele echivalente pentru componenta de curent continuu și pentru aceea de curent alternativ, le reprezentăm în figura 3.26.



**Fig.3.26** Circuite echivalente pentru componenta de curent continuu, respectiv de curent alternativ

Notăm:

$E_{d0}$  = tensiunea medie la mers în gol;

$R_x$  = rezistența ipotetică reprezentând tensiunea revenind comutației;

$e_{dm}$  = armonica de ordinul m a t.e.m.;

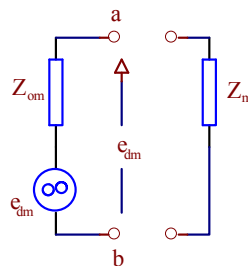
$Z_m$  = impedanța pentru armonica de ordin m în circuitul de c.c., văzută pe la bornele a și b;

$Z_{om}$  = impedanța pentru armonica de ordin m pentru partea de c.a. văzută pe la bornele a și b;

Evident, în figura 3.26 avem circuite echivalente de tip Thévenin. Armonica m de curent pentru partea de c.c. este dată de relația:

$$\underline{I}_{dm} = \frac{\underline{E}_{dm}}{\underline{Z}_m + \underline{Z}_{om}} \quad (3.78)$$

Dacă reactanța de filtraj  $X_d$  este infinit de mare, bornele a și b în fig. 3.26 sunt conectate cu sarcina de c.c. pentru componenta de c.c. și circuitul este deschis pentru componenta de c.a. (fig.3.27).



**Fig.3.27** Circuitul echivalent pentru componenta de curent alternativ la mers în gol

Deci tensiunea de circuit deschis (t.e.m.)  $e_{dm}$  poate fi determinată folosind prezumția că în zona de c.c. curentul  $i_d$  nu are ondulații, adică  $i_d = I_d$ . De asemenea, cunoscând armonica de curent  $i_{dm}$ , valorile lui  $I_{dm}$  și  $\beta_m$  din relația (3.77) pot fi cu ușurință obținute.

Curentul de linie de c.a. poate fi analizat pe o cale asemănătoare. Mai precis, curentul de linie  $i_a$  (din faza a) constă din curentul  $i_{oa}$  care este produs de curentul neted de c.c. egal cu valoarea medie  $I_d$  și din curentul  $\Delta i_a$  care este determinat în zona de c.a. de către componenta  $i_{dr}$  injectată în circuitul de redresare.

Deci, el are expresia:

$$i_a = i_{0a} + \Delta i_a \quad (3.79)$$

Similar, ecuațiile pentru curenții de linie de c.a. pentru celelalte două faze pot fi scrise în felul următor:

$$i_b = i_{0b} + \Delta i_b \quad (3.80)$$

$$i_c = i_{0c} + \Delta i_c \quad (3.81)$$

Calcularea detaliată a curenților pentru zonele de c.c. și de c.a. este prezentată în continuare.

### 3.2.1.2 Calcularea armonicilor de curent pentru partea de curent continuu.

#### Funcțiile de comutație ale redresării și determinarea lui $e_{dm}$

În paragraful precedent s-a prezentat tensiunea de circuit deschis (t.e.m.)  $e_{dm}$ , egală cu armonica componentă a tensiunii de ieșire de c.c. pentru cazul mărimii infinite a reactanței de netezire, adică având curent continuu perfect neted. În acest caz, tensiunea  $e_d$  din zona de c.c. se poate exprima cu ajutorul funcțiilor de comutație ale redresării  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$ , arătate în fig. 3.28.

Avem:

$$e_d = S_a e_a + S_b e_b + S_c e_c \quad (3.82)$$

unde  $e_a$ ,  $e_b$ ,  $e_c$  sunt tensiunile electromotoare de pe cele trei faze dezechilibrate, date de relațiile:

$$e_a = E_a \sin(x - x_1) \quad (3.83)$$

$$e_b = E_a \sin(x - x_2) \quad (3.84)$$

$$e_c = E_a \sin(x - x_3) \quad (3.85)$$

Fiecare funcție de comutație a redresării poate fi exprimată cu seriile Fourier următoare:

$$S_a = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_{an} \cos nx + B_{an} \sin nx \quad (3.86)$$

$$S_b = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_{bn} \cos nx + B_{bn} \sin nx \quad (3.87)$$

$$S_c = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_{cn} \cos nx + B_{cn} \sin nx \quad (3.88)$$

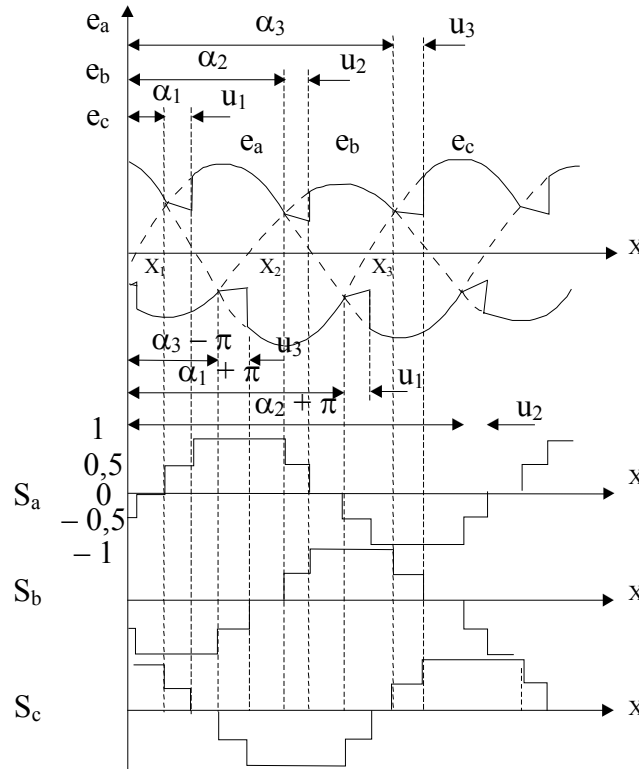


Fig. 3.28 Sistemul nesimetric de alimentare și funcțiile de comutație ale redresării

unde:

$$A_{an} = -\frac{2}{n\pi} \left[ \sin n \left( \alpha_1 + \frac{u_1}{2} \right) \cos \frac{nu_1}{2} - \sin n \left( \alpha_2 + \frac{u_2}{2} \right) \cos \frac{nu_2}{2} \right] \quad (3.89)$$

$$B_{an} = \frac{2}{n\pi} \left[ \cos n \left( \alpha_1 + \frac{u_1}{2} \right) \cos \frac{nu_1}{2} - \cos n \left( \alpha_2 + \frac{u_2}{2} \right) \cos \frac{nu_2}{2} \right] \quad (3.90)$$

$$A_{bn} = -\frac{2}{n\pi} \left[ \sin n \left( \alpha_2 + \frac{u_2}{2} \right) \cos \frac{nu_2}{2} - \sin n \left( \alpha_3 + \frac{u_3}{2} \right) \cos \frac{nu_3}{2} \right] \quad (3.91)$$

$$B_{bn} = \frac{2}{n\pi} \left[ \cos n \left( \alpha_2 + \frac{u_2}{2} \right) \cos \frac{nu_2}{2} - \cos n \left( \alpha_3 + \frac{u_3}{2} \right) \cos \frac{nu_3}{2} \right] \quad (3.92)$$

$$A_{cn} = -\frac{2}{n\pi} \left[ \sin n \left( \alpha_3 + \frac{u_3}{2} \right) \cos \frac{nu_3}{2} - \sin n \left( \alpha_1 + \frac{u_1}{2} \right) \cos \frac{nu_1}{2} \right] \quad (3.93)$$

$$B_{cn} = \frac{2}{n\pi} \left[ \cos n \left( \alpha_3 + \frac{u_3}{2} \right) \cos \frac{nu_3}{2} - \cos n \left( \alpha_1 + \frac{u_1}{2} \right) \cos \frac{nu_1}{2} \right] \quad (3.94)$$

În aceste relații avem:

$$n = 2k - 1; k = 1, 2, 3, \dots$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  = unghiurile de aprindere ale fazelor respective de la punctul zero  $x = 0$ , arătate în fig. 3.28

$u_1, u_2, u_3$  = unghiurile de comutație ale fazelor respective, arătate în fig. 3.28.

Sub condiții de dezechilibru (nesimetrie) ale sursei, unghiurile de comutație  $u_1, u_2, u_3$  în fazele a, b, c sunt date de relațiile:

$$u_1 = \arccos \left[ 1 - \frac{(X_c + X_a) I_d}{\sqrt{E_c^2 + E_a^2 - 2E_c E_a \cos(x_3 - x_1)}} \right] \quad (3.95)$$

$$u_2 = \arccos \left[ 1 - \frac{(X_a + X_b) I_d}{\sqrt{E_a^2 + E_b^2 - 2E_a E_b \cos(x_1 - x_2)}} \right] \quad (3.96)$$

$$u_3 = \arccos \left[ 1 - \frac{(X_b + X_c) I_d}{\sqrt{E_b^2 + E_c^2 - 2E_b E_c \cos(x_2 - x_3)}} \right] \quad (3.97)$$

unde:

$$\alpha_1 = \arctg \frac{-E_c \sin x_3 + E_a \sin x_1}{-E_c \cos x_3 + E_a \cos x_1} \quad (3.98)$$

$$\alpha_2 = \arctg \frac{-E_a \sin x_1 + E_b \sin x_2}{-E_a \cos x_1 + E_b \cos x_2} \quad (3.99)$$

$$\alpha_3 = \arctg \frac{-E_b \sin x_2 + E_c \sin x_3}{-E_b \cos x_2 + E_c \cos x_3} \quad (3.100)$$

Deducerea unghiurilor de comutație este dată la sfârșitul acestui capitol.

Înlocuind ecuațiile 3.83, 3.84, 3.85, și 3.86, 3.87, 3.88 în ecuația 3.82 obținem:

$$e_d = E_{d0} + \sum_{m=2,4,6\dots}^{\infty} A_{dm} \cos mx + B_{dm} \sin mx \quad (3.101)$$

unde:

$$E_{d0} = \frac{1}{2} [E_a (-A_{a1} \sin x_1 + B_{a1} \cos x_1) + E_b (-A_{b1} \sin x_2 + B_{b1} \cos x_2) + E_c (-A_{c1} \sin x_3 + B_{c1} \cos x_3)] \quad (3.102)$$

$$A_{dm} = -\frac{1}{2} \{ E_a [(A_{a(m-1)} + A_{a(m+1)}) \sin x_1 + (B_{a(m-1)} - B_{a(m+1)}) \cos x_1] + E_b [(A_{b(m-1)} + A_{b(m+1)}) \sin x_2 + (B_{b(m-1)} - B_{b(m+1)}) \cos x_2] + E_c [(A_{c(m-1)} + A_{c(m+1)}) \sin x_3 + (B_{c(m-1)} - B_{c(m+1)}) \cos x_3] \} \quad (3.103)$$

$$B_{dm} = \frac{1}{2} \{ E_a [(A_{a(m-1)} - A_{a(m+1)}) \cos x_1 - (B_{a(m-1)} + B_{a(m+1)}) \sin x_1] + E_b [(A_{b(m-1)} - A_{b(m+1)}) \cos x_2 - (B_{b(m-1)} + B_{b(m+1)}) \sin x_2] + E_c [(A_{c(m-1)} - A_{c(m+1)}) \cos x_3 - (B_{c(m-1)} + B_{c(m+1)}) \sin x_3] \} \quad (3.104)$$

$$m = 2k; k = 1, 2, 3, \dots$$

Primul termen din partea dreaptă a ecuației 3.101 (adică  $E_{d0}$ ) reprezintă componenta continuă a lui  $e_d$  iar restul termenilor reprezintă armonicile. Deci, am obținut armonica de ordinul  $m$  alui  $e_{dm}$  din ecuația 3.78.

### 3.2.1.3 Impedanțele $Z_m$ și $Z_{om}$

Impedanța  $Z_m$  pentru armonica  $m$ , din zona de c.c. văzută pe bornele a și b ale circuitelor de redresare este determinată după fig. 3.25 în felul următor:

$$\underline{Z}_m = R_d + jm X_d \quad (3.105)$$

În cealaltă zonă, impedanța  $\underline{Z}_{om}$  pentru armonica  $m$  a părții de c.a. văzută pe la aceleași borne este afectată de perioada de comutație. Luând în considerare unghiurile de comutație, impedanța  $\underline{Z}_{om}$  poate fi exprimată aproximativ ca:

$$\underline{Z}_{om} = jm \left( 2 - \frac{u_1 + u_2 + u_3}{2\pi} \right) \frac{X_a + X_b + X_c}{3} \quad (3.106)$$

Deducerea lui  $\underline{Z}_{om}$  se face la sfârșitul acestui capitol.

### 3.2.1.4 Armonicile de curent pentru zona de curent continuu

Armonica  $m$  de curent pentru zona de c.c.  $i_{dm}$  poate fi dedusă din ecuațiile 3.78, 3.101, 3.105, 3.106. Deci, expresia pentru curentul  $i_d$  din zona de c.c. poate fi descrisă în felul următor:

$$i_d = I_d + i_{dr} \quad (3.107)$$

$$i_d = I_d + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \sqrt{2} I_{dm} \cos(mx - \beta_m) \quad (3.108)$$

unde:

$$I_{dm} = \frac{\sqrt{(A_{dm}^2 + B_{dm}^2)}/2}{|\underline{Z}_m + \underline{Z}_{om}|} \quad (3.109)$$

$$\beta_m = \arctg \frac{B_{dm}}{A_{dm}} + \arctg \frac{\text{Im}(\underline{Z}_m + \underline{Z}_{om})}{\text{Re}(\underline{Z}_m + \underline{Z}_{om})} \quad (3.110)$$

$$m = 2k; k = 1, 2, 3, \dots$$

### 3.2.1.5 Calcularea armonicilor de curent pentru zona de curent alternativ.

#### Curenții $i_{oa}$ , $i_{ob}$ , $i_{oc}$

După cum rezultă din paragraful 3.2.1.1, curenții de linie din zona de c.a.  $i_{oa}$ ,  $i_{ob}$ ,  $i_{oc}$  sunt produși de curentul constant  $I_d$  din partea de c.c. Deci, după ecuațiile 3.95 ... 3.100 și 3.125 curentul alternativ  $i_{oa}$  în faza a arătat în fig. 3.29 este reprezentat de o formă simetrică de undă descrisă de:

$$(a) \alpha_1 \leq x < \alpha_1 + u_1$$

$$i_{oa} = \frac{1 - \cos(x - \alpha_1)}{1 - \cos u_1} \cdot I_d \quad (3.111)$$

$$(b) \alpha_1 + u_1 \leq x < \alpha_2$$

$$i_{oa} = I_d \quad (3.112)$$

$$(c) \alpha_2 \leq x < \alpha_2 + u_2$$

$$i_{oa} = \left[ 1 - \frac{1 - \cos(x - \alpha_2)}{1 - \cos u_2} \right] I_d \quad (3.113)$$

$$(d) \alpha_2 + u_2 \leq x < \alpha_1 + \pi$$

$$i_{oa} = 0 \quad (3.114)$$

De aici, seria Fourier a curentului  $i_{oa}$  este exprimată prin

$$i_{oa} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_{oan} \cos nx + B_{oan} \sin nx) \quad (3.115)$$

unde  $A_{oan}$  și  $B_{oan}$  sunt dați la sfârșitul capitolului.

Expresiile lui  $i_{ob}$  și  $i_{oc}$  pentru fazele b și c pot fi obținute schimbând notațiile în ecuația 3.115 în felul următor:

Faza b:

b în loc de a

a în loc de c

2 în loc de 1

1 în loc de 3

Faza c:

c în loc de a

b în loc de c

3 în loc de 1

2 în loc de 3

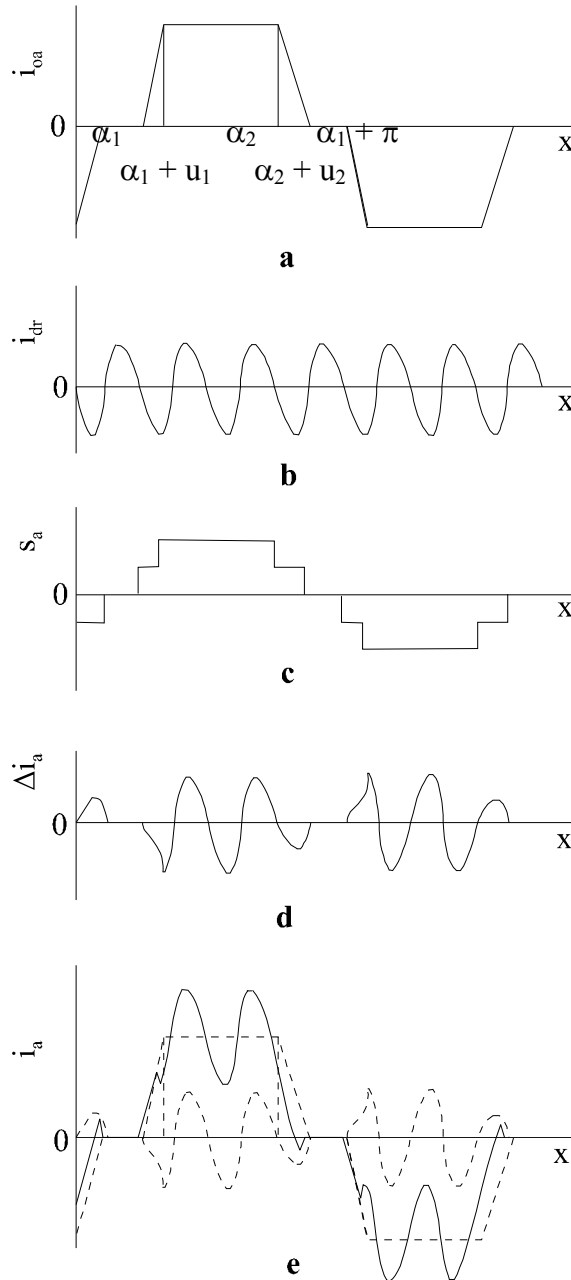


Fig. 3.29 Formele de undă ale curenților alternativi

### 3. 2. 1. 6. Armonicile de curent pentru partea de curent alternativ

Formele de undă ale curenților de linie pe partea de curent alternativ sunt redată în figura 3.29.

Analizând figurile 3.29 b la 3.29 d se poate concluziona că curentul  $\Delta i_a$  care este determinat în faza a de componenta de c.a.  $i_{dr}$  a părții de c.c., poate fi obținut prin multiplicarea curentului  $i_{dr}$  cu funcția de comutație a redresării  $S_a$ .

$$\Delta i_a = S_a i_{dr} \quad (3.116)$$

$$\Delta i_a = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \Delta A_{an} \cos nx + \Delta B_{an} \sin nx \quad (3.117)$$

unde:

$$\Delta A_{an} = \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} I_{dm} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (A_{a(n-m)} + A_{a(n+m)}) \cdot \cos \beta_m - (B_{a(n-m)} + B_{a(n+m)}) \cdot \sin \beta_m \right] \quad (3.118)$$

$$\Delta B_{an} = \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} I_{dm} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (A_{a(n-m)} + A_{a(n+m)}) \cdot \cos \beta_m - (B_{a(n-m)} + B_{a(n+m)}) \cdot \sin \beta_m \right] \quad (3.119)$$

$$n = 2k - 1; k = 1, 2, 3, \dots$$

$$m = 2k; k = 1, 2, 3, \dots$$

Aici trebuie notat:

$$A_{a(n-m)} = A_{a(m-n)} \quad \text{și} \quad (3.120)$$

$$B_{a(n-m)} = -B_{a(m-n)} \quad (3.121)$$

pentru  $n - m < 0$ .

Prin urmare curentul de linie  $i_a$  arătat în figura 3.29 este dedus din ecuațiile 3.79, 3.115, și 3.117 după cum urmează:

$$i_a = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} [(A_{oan} + \Delta A_{an}) \cos nx + (B_{oan} + \Delta B_{an}) \sin nx] \quad (3.122)$$

$$i_a = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} [A_{ian} \cos nx + B_{ian} \sin nx] \quad (3.123)$$

Valoarea efectivă  $I_{an}$  a armonicii  $n$  alui  $i_a$  este:

$$I_{an} = \frac{\sqrt{A_{ian}^2 + B_{ian}^2}}{2}$$

Expresiile pentru  $i_b$  și  $i_c$  rezultă ușor prin reamplasarea indicilor după cum s-a arătat mai înainte.

### 3.2.1.7 Deducerea unghiurilor de comutație

Când curentul este transferat din faza  $c$  la faza  $a$ , curentul de comutare  $i$  în faza  $a$  poate fi exprimat în felul următor:

$$i = \frac{1}{X_c + X_{a\alpha_1}} \int_0^x (e_a - e_c) dx \quad (3.124)$$



$$i = \frac{1}{X_c + X_a} \sqrt{E_c^2 + E_a^2 - 2E_c E_a \cos(x_3 - x_1)} \cdot [1 - \cos(x - \alpha_1)] \quad (3.125)$$

unde  $\alpha_1$  este dat de ecuația 3.98.

Unghiul de comutație  $u_1$  în faza a rezultă din condiția  $i = I_d$  la  $x = \alpha_1 + u_1$  în ecuația 3.125 și este dat de relația 3.95.

Unghiul de comutație  $u_2$  și  $u_3$  în fazele b și c sunt obținute în același mod.

### 3.2.1.8 Deducerea lui $Z_{om}$

Este dificil a obține exact impedanța  $Z_{om}$  a părții de c.a. văzută pe la bornele a și b în figura 3.25. Se prezintă aici o soluție aproximativă.

Pentru că reactanța de comutare nu diferă foarte mult în fiecare fază, considerăm efectul fiecărei reactanțe de comutare în medie pentru determinarea lui  $Z_{om}$ .

Astfel, reactanța medie de comutare pentru o fază este dată de:

$$X_e = \frac{X_a + X_b + X_c}{3} \quad (3.126)$$

Utilizând reactanța medie de comutare, reactanța  $X_t$  a părții de c.a. văzută pe la bornele de ieșire a și b este dată de  $\frac{3}{2} X_e$  pentru perioada de comutație și de  $2X_e$  pentru restul perioadei.

Deci, valoarea medie a lui  $X_t$  pe o jumătate de ciclu ( $\pi$  radiani) are expresia următoare:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \pi} X_t dx = \left( 2 - \frac{u_1 + u_2 + u_3}{2\pi} \right) X_e = \left( 2 - \frac{u_1 + u_2 + u_3}{2} \right) \cdot \frac{X_a + X_b + X_c}{3} \quad (3.127)$$

Exprimând ecuația 3.127 în termenii unei impedanțe pentru armonica  $m$ , găsim ecuația 3.106.

### 3.2.1.9 Deducerea coeficienților Fourier ai ecuației (3.115)

Coeficienții Fourier  $A_{oan}$  și  $B_{oan}$  sunt următorii:

$$\begin{aligned}
A_{\text{oan}} = & \frac{2I_d}{n\pi} \left[ -\sin n(\alpha_1 + u_1) + \sin n(\alpha_2 + u_2) \right] + \\
& + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{I_d}{1 - \cos u_1} \cdot \left\{ \frac{2}{n} \sin \frac{nu_1}{2} \cos n \left( \alpha_1 + \frac{u_1}{2} \right) - \right. \\
& - \frac{1}{n+1} \sin \frac{(n+1)u_1}{2} \cdot \cos \left[ (n+1) \left( \alpha_1 + \frac{u_1}{2} \right) - \alpha_1 \right] - \\
& \left. - \frac{1}{n-1} \sin \frac{(n-1)u_1}{2} \cdot \cos \left[ (n-1) \left( \alpha_1 + \frac{u_1}{2} \right) + \alpha_1 \right] \right\} + \\
& + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{I_d}{1 - \cos u_2} \cdot \left\{ -\frac{2}{n} \sin \frac{nu_2}{2} \cos n \left( \alpha_2 + \frac{u_2}{2} \right) - \right. \\
& - \frac{1}{n+1} \sin \frac{(n+1)u_2}{2} \cdot \cos \left[ (n+1) \left( \alpha_2 + \frac{u_2}{2} \right) - \alpha_2 \right] - \\
& \left. - \frac{1}{n-1} \sin \frac{(n-1)u_2}{2} \cdot \cos \left[ (n-1) \left( \alpha_2 + \frac{u_2}{2} \right) + \alpha_2 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.128}$$

$$\begin{aligned}
B_{\text{oan}} = & \frac{2I_d}{n\pi} \cdot \left[ \cos n(\alpha_1 + u_1) - \cos n(\alpha_2 + u_2) \right] + \\
& + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{I_d}{1 - \cos u_1} \cdot \left\{ \frac{2}{n} \sin \frac{nu_1}{2} \sin n \left( \alpha_1 + \frac{u_1}{2} \right) - \right. \\
& - \frac{1}{n+1} \sin \frac{(n+1)u_1}{2} \cdot \sin \left[ (n+1) \left( \alpha_1 + \frac{u_1}{2} \right) - \alpha_1 \right] - \\
& \left. - \frac{1}{n-1} \sin \frac{(n-1)u_1}{2} \cdot \sin \left[ (n-1) \left( \alpha_1 + \frac{u_1}{2} \right) + \alpha_1 \right] \right\} + \\
& + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{I_d}{1 - \cos u_2} \cdot \left\{ -\frac{2}{n} \sin \frac{nu_2}{2} \sin \left[ n \left( \alpha_2 + \frac{u_2}{2} \right) \right] + \right. \\
& + \frac{1}{n+1} \cdot \sin \frac{(n+1)u_2}{2} \sin \left[ (n+1) \left( \alpha_2 + \frac{u_2}{2} \right) - \alpha_2 \right] + \\
& \left. + \frac{1}{n-1} \sin \frac{(n-1)u_2}{2} \sin \left[ (n-1) \left( \alpha_2 + \frac{u_2}{2} \right) + \alpha_2 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.129}$$

### 3.2.2 Metoda simulării pe calculator

S-a realizat modelarea PSPICE a punții de diode alimentată cu un sistem nesimetric de tensiuni și având o sarcină complexă formată dintr-o rezistență, o inductanță și o tensiune contraelectromotoare.

În figura 3.30 este prezentată schema electrică a unei punți trifazate de diode, a sursei, a sarcinii, cu numerotarea corespunzătoare a nodurilor.

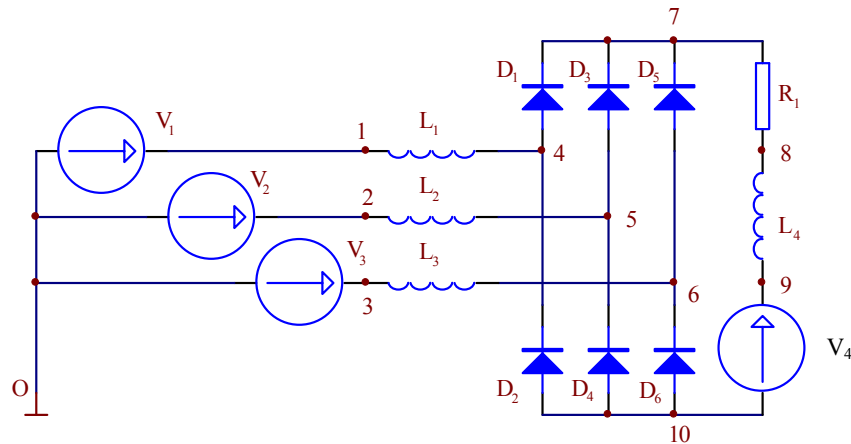


Fig. 3.30 Puntea de diode cu sarcină complexă, pentru modelarea PSPICE

Folosind modelul prezentat mai sus, s-a făcut analiza **PSPICE** pentru mai multe cazuri, modelul de lucru fiind asemănător cu cel descris la paragraful 3.1.3.

Interesează în mod deosebit analiza Fourier a curenților  $i_d$ ,  $i_a$ ,  $i_b$ ,  $i_c$ . Rezultatele obținute în urma analizei cu programul **PSPICE** concordă cu rezultatele obținute prin metoda analitică prezentată anterior. În continuare, vom prezenta comparativ aceste rezultate.

### 3.2.3. Compararea rezultatelor obținute prin metoda analitică și prin metoda simulării pe calculator

S-au analizat prin ambele metode patru cazuri particulare (I – sistemul simetric , II , III , IV – sisteme nesimetrice). Aceste cazuri particulare, respectiv parametrii de circuit sunt redate în tabelul : 3.3., cu notațiile din figura 3.30 (modelare **PSPICE**).

Tabelul 3.3

Parametrii de circuit	Sistem simetric I	Sistem nesimetric II	Sistem nesimetric III	Sistem nesimetric IV
$E_a(V_1)$ (val. max.)	100 V	100	100	100
$E_b(V_2)$ (val. max.)	100 V	95	100	95
$E_c(V_3)$ (val. max.)	100 V	90	100	90
$x_1$	$0^0$	$0^0$	$0^0$	$0^0$
$x_2$	$120^0$	$120^0$	$117^0$	$117^0$
$x_3$	$240^0$	$240^0$	$243^0$	$243^0$
$X_a(X_1)$	10 $\Omega$	10	10	10
$X_b(X_2)$	10 $\Omega$	10	10	11
$X_c(X_3)$	10 $\Omega$	10	10	9
$L_1$	0,03184 H	0,03184	0,03184	0,03184
$L_2$	0,03184 H	0,03184	0,03184	0,03503
$L_3$	0,03184 H	0,03184	0,03184	0,02866
$X_d(X_4)$	5 $\Omega$	5	1	5
$L_4$	0,01592 H	0,01592	0,01592	0,01592
$R_d(R_1)$	10 $\Omega$	10	10	10
$E_d(V_4)$	145 V	145	145	145

Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelele : 3.4 , 3.5 , 3.6 , 3.7.

Tabelul 3.4

Sistem simetric I	Frecvența ( Hz )	Componenta Fourier	Metoda analitică (A)	Metoda simulării pe calculator (A)	Eroare relativă %
$i_d$ ( I ( R <sub>1</sub> ) )	0	$I_d$	0,9161	0,9101	0,7
	100	$\sqrt{2}I_{d2}$	-	-	-
	200	$\sqrt{2}I_{d4}$	-	-	-
	300	$\sqrt{2}I_{d6}$	0,0975	0,0965	1
	400	$\sqrt{2}I_{d8}$	-	-	-
$i_a$ ( I ( V <sub>1</sub> ) )	0	$I_a$	-	-	-
	50	$\sqrt{2}I_{a1}$	1,0140	1,0040	1
	150	$\sqrt{2}I_{a3}$	0,0094	0,0096	-2
	250	$\sqrt{2}I_{a5}$	0,2075	0,2050	1,2
	350	$\sqrt{2}I_{a7}$	0,0731	0,0714	2,3
$i_b$ ( I ( V <sub>2</sub> ) )	0	$I_b$	-	-	-
	50	$\sqrt{2}I_{b1}$	1,0140	1,0040	1
	150	$\sqrt{2}I_{b3}$	0,0094	0,0096	-2
	250	$\sqrt{2}I_{b5}$	0,2075	0,2050	1,2
	350	$\sqrt{2}I_{b7}$	0,0731	0,0714	2,3
$i_c$ ( I ( V <sub>3</sub> ) )	0	$I_c$	-	-	-
	50	$\sqrt{2}I_{c1}$	1,0140	1,0040	1
	150	$\sqrt{2}I_{c3}$	0,0094	0,0096	-2
	250	$\sqrt{2}I_{c5}$	0,2075	0,2050	1,2
	350	$\sqrt{2}I_{c7}$	0,0731	0,0714	2,3

Tabelul 3.5

Sistem nesimetric II	Frecvența ( Hz )	Componenta Fourier	Metoda analitică (A)	Metoda simulării pe calculator (A)	Eroare relativă %
$i_d$ ( I ( R <sub>1</sub> ) )	0	$I_d$	0,5109	0,5084	0,5
	100	$\sqrt{2}I_{d2}$	0,1060	0,1065	- 0,5
	200	$\sqrt{2}I_{d4}$	0,0197	0,0195	1
	300	$\sqrt{2}I_{d6}$	0,0810	0,0815	0,6
	400	$\sqrt{2}I_{d8}$	0,0112	0,0111	0,9
$i_a$ ( I ( V <sub>1</sub> ) )	0	$I_a$	-	-	-
	50	$\sqrt{2}I_{a1}$	0,6362	0,6282	1,2
	150	$\sqrt{2}I_{a3}$	0,0250	0,0254	-1,5
	250	$\sqrt{2}I_{a5}$	0,1261	0,1238	1,8
	350	$\sqrt{2}I_{a7}$	0,0481	0,0469	2,6
$i_b$ ( I ( V <sub>2</sub> ) )	0	$I_b$	-	-	-
	50	$\sqrt{2}I_{b1}$	0,5455	0,5333	2,2
	150	$\sqrt{2}I_{b3}$	0,0741	0,0732	1,2
	250	$\sqrt{2}I_{b5}$	0,1469	0,1432	2,6
	350	$\sqrt{2}I_{b7}$	0,0357	0,0362	-1,4
$i_c$ ( I ( V <sub>3</sub> ) )	0	$I_c$	-	-	-
	50	$\sqrt{2}I_{c1}$	0,5261	0,5240	0,4
	150	$\sqrt{2}I_{c3}$	0,0621	0,0629	-1,2
	250	$\sqrt{2}I_{c5}$	0,1351	0,1330	1,5
	350	$\sqrt{2}I_{c7}$	0,0252	0,0246	2,4

Tabelul 3.6

Sistem nesimetric III	Frecvența ( Hz )	Componenta Fourier	Metoda analitică (A)	Metoda simulării pe calculator (A)	Eroare relativă %
$i_d$ ( I ( R <sub>1</sub> ) )	0	$I_d$	0,9136	0,9086	0,6
	100	$\sqrt{2}I_{d2}$	0,1230	0,1223	0,6
	200	$\sqrt{2}I_{d4}$	0,0242	0,0244	-0,8
	300	$\sqrt{2}I_{d6}$	0,0931	0,0921	1,1
	400	$\sqrt{2}I_{d8}$	0,0117	0,0116	0,8
$i_a$ ( I ( V <sub>1</sub> ) )	0	$I_a$	-	-	-
	50	$\sqrt{2}I_{a1}$	0,9236	0,9145	1
	150	$\sqrt{2}I_{a3}$	0,0289	0,0286	1
	250	$\sqrt{2}I_{a5}$	0,2151	0,2177	-1,1
	350	$\sqrt{2}I_{a7}$	0,0525	0,0519	1,1
$i_b$ ( I ( V <sub>2</sub> ) )	0	$I_b$	-	-	-
	50	$\sqrt{2}I_{b1}$	1,0776	1,0670	1
	150	$\sqrt{2}I_{b3}$	0,0608	0,0598	1,6
	250	$\sqrt{2}I_{b5}$	0,1902	0,1865	2
	350	$\sqrt{2}I_{b7}$	0,0825	0,0805	2,5
$i_c$ ( I ( V <sub>3</sub> ) )	0	$I_c$	-	-	-
	50	$\sqrt{2}I_{c1}$	1,0241	1,0140	1
	150	$\sqrt{2}I_{c3}$	0,0852	0,0867	-1,7
	250	$\sqrt{2}I_{c5}$	0,2073	0,2035	1,8
	350	$\sqrt{2}I_{c7}$	0,0702	0,0684	2,6

Tabelul 3.7

Sistem nesimetric IV	Frecvența ( Hz )	Componenta Fourier	Metoda analitică (A)	Metoda simulării pe calculator (A)	Eroare relativă %
$i_d$ ( I ( R <sub>1</sub> ) )	0	$I_d$	0,5028	0,4998	0,6
	100	$\sqrt{2}I_{d2}$	0,0483	0,0486	- 0,6
	200	$\sqrt{2}I_{d4}$	0,0685	0,0068	0,7
	300	$\sqrt{2}I_{d6}$	0,0850	0,0842	0,9
	400	$\sqrt{2}I_{d8}$	0,00425	0,0043	-1,1
$i_a$ ( I ( V <sub>1</sub> ) )	0	$I_a$	-	-	-
	50	$\sqrt{2}I_{a1}$	0,5749	0,5687	1
	150	$\sqrt{2}I_{a3}$	0,0310	0,0304	1,9
	250	$\sqrt{2}I_{a5}$	0,1250	0,1264	-1,1
	350	$\sqrt{2}I_{a7}$	0,0413	0,0403	2,5
$i_b$ ( I ( V <sub>2</sub> ) )	0	$I_b$	-	-	-
	50	$\sqrt{2}I_{b1}$	0,5740	0,5667	1,3
	150	$\sqrt{2}I_{b3}$	0,0302	0,0295	2,3
	250	$\sqrt{2}I_{b5}$	0,1293	0,1323	-2,2
	350	$\sqrt{2}I_{b7}$	0,0423	0,0412	2,6
$i_c$ ( I ( V <sub>3</sub> ) )	0	$I_c$	-	-	-
	50	$\sqrt{2}I_{c1}$	0,5280	0,5177	2
	150	$\sqrt{2}I_{c3}$	0,0093	0,0091	2,2
	250	$\sqrt{2}I_{c5}$	0,1419	0,1423	-0,3
	350	$\sqrt{2}I_{c7}$	0,0343	0,0335	2,4



După cum se observă din tabelele 3.4 , 3.5 , 3.6 , 3.7 , rezultatele obținute prin metoda analitică prezentată și prin metoda simulării pe calculator (**PSPICE**) sunt apropiate , eroarea relativă nedepășind 1,1 % pentru armonicile de curent ale părții de curent continuu și respectiv 2,6% pentru armonicile de curent ale părții de curent alternativ . Erorile care apar se datorează în bună măsură faptului că impedanța  $Z_{0m}$  nu poate fi calculată decât aproximativ .

În concluzie, rezultatele obținute confirmă valabilitatea metodei analitice propuse pentru puntea trifazată de diode cu alimentare nesimetrică și având o sarcină complexă formată dintr-o rezistență , o inductivitate și o tensiune contraelectromotoare .

### 3.3. Introducerea unui coeficient global de nesimetrie (CGN)

Din cele prezentate în subcapitolul 3.1 privind puntea de diode ideale alimentată cu un sistem trifazat nesimetric de tensiuni, rezultă că oricărui sistem nesimetric îi corespunde în mod univoc o tensiune  $u_d$  și deci o serie Fourier atașată. La modificarea nesimetriei sistemului trifazat îi va corespunde o modificare corespunzătoare a seriei de armonici. Prin urmare, la modificarea nesimetriei sistemului trifazat ( $u_1, u_2, u_3$ ) se va modifica spectrul de armonici al tensiunii  $u_d$ .

În acest fel, putem caracteriza un sistem trifazat nesimetric prin coeficienții  $a_n, b_n, a_0, a_i$  a seriei Fourier a tensiunii  $u_d$  obținută prin redresarea sistemului ( $u_1, u_2, u_3$ ) cu o punte trifazată de diode [P19].

#### 3.3.1. Punerea problemei

În paragraful 3.1.1.2. am văzut că tensiunea  $u_d$  corespunzătoare unui sistem trifazat simetric ( $u_1, u_2, u_3$ ) nu are armonică corespunzătoare lui  $n = 1$  (deci de pulsație  $2\omega$  și frecvență  $2f$ ) și de asemenea pentru  $n = 2$  (deci de pulsație  $4\omega$  și frecvență  $4f$ ).

Pe de altă parte, tensiunea  $u_d$  corespunzătoare unui sistem trifazat accentuat nesimetric cum este cel de la paragraful 3.1.1.7 (funcționare monofazată) conține o armonică importantă corespunzătoare lui  $n = 1$  dar și una corespunzătoare lui  $n = 2$ .

Deoarece intuitiv este clar că la creșterea nesimetriei sistemului ( $u_1, u_2, u_3$ ) trebuie să crească amplitudinea armonicilor corespunzătoare lui  $n = 1$  și  $n = 2$  din tensiunea  $u_d$ , vom defini în continuare un coeficient global de nesimetrie (**CGN**). Acesta va ține seama concomitent de nesimetria de module și de nesimetria de faze .

Putem considera  $U_{m1} = 1$  și  $U_{m2}$ ,  $U_{m3}$ , numere pozitive subunitare. Altfel spus, pentru orice sistem trifazat simetric ( $u_1, u_2, u_3$ ) putem considera un sistem trifazat “asemenea” cu cel dat, la care  $U_{m1} = 1$  și  $U_{m2}$ ,  $U_{m3}$  sunt numere pozitive subunitare iar fazele inițiale sunt aceleași cu ale sistemului inițial.

Definim coeficientul global de simetrie ca suma amplitudinilor armonicilor corespunzătoare lui  $n = 1$  și  $n = 2$  pentru tensiunea  $u_d$  atașată sistemului trifazat “asemenea” având  $U_{m1} = 1$  [P19].

Deoarece armonica corespunzătoare lui  $n$  are amplitudinea:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (3.130)$$

rezultă că armonicile corespunzătoare lui  $n = 1$  și  $n = 2$  vor avea amplitudinile:

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (3.131)$$

$$A_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \quad (3.132)$$

Rezultă coeficientul global de nesimetrie:

$$k_n = \frac{A_1 + A_2}{U_{m1}} \quad (3.133)$$

Punând  $U_{m1} = 1$ , putem scrie:

$$k_n = A_1 + A_2 \quad (3.134)$$

Deoarece în această definiție se ia în considerare și armonica de ordinul 2, putem nota pentru claritate  $k_n = k_{n2}$ . Inițial am considerat un coeficient de nesimetrie care lua în considerare numai armonicile de ordinul 1 [P19] și care avea definiția:

$$k_{n1} = \frac{A_1}{U_{m1}} \quad (3.135)$$

În urma cercetărilor efectuate am ajuns la concluzia că se poate face o caracterizare mai cuprinzătoare a nesimetriei unui sistem trifazat cu ajutorul coeficientului global de nesimetrie de ordinul 2 ( $k_n = k_{n2}$ ). Din acest motiv, în cele ce urmează se va studia acest coeficient.

Se pot imagina și alți coeficienți de nesimetrie, cum este  $k_n = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2}$ , care va fi studiat într-o lucrare viitoare.

### 3.3.2. Analiza generală pe cazuri

Vom analiza cele patru cazuri, prezentând formulele de calcul pentru  $a_1, b_1, a_2, b_2$ , care intervin în definiția coeficientului global de nesimetrie.

### Cazul 1

Este vorba de cazul (a, b, c).

Prin particularizarea formulelor generale (3.8) și (3.9), obținem:

$$\begin{aligned}
 3 \pi a_1 &= -U_{m1} [3 \cos (b + x_1) - \cos (3b - x_1)] \\
 &= -U_{m1} [3 \cos (c + x_1) - \cos (3c - x_1)] \\
 &= -U_{m2} [3 \cos (a + x_2) - \cos (3a - x_2)] \\
 &= +U_{m2} [3 \cos (c + x_2) - \cos (3c - x_2)] \\
 &= +U_{m3} [3 \cos (a + x_3) - \cos (3a - x_3)] \\
 &= +U_{m3} [3 \cos (b + x_3) - \cos (3b - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.136}$$

$$\begin{aligned}
 3 \pi b_1 &= -U_{m1} [3 \sin (b + x_1) - \sin (3b - x_1)] \\
 &= -U_{m1} [3 \sin (c + x_1) - \sin (3c - x_1)] \\
 &= -U_{m2} [3 \sin (a + x_2) - \sin (3a - x_2)] \\
 &= +U_{m2} [3 \sin (c + x_2) - \sin (3c - x_2)] \\
 &= +U_{m3} [3 \sin (a + x_3) - \sin (3a - x_3)] \\
 &= +U_{m3} [3 \sin (b + x_3) - \sin (3b - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.137}$$

$$\begin{aligned}
 15 \pi a_2 &= -U_{m1} [5 \cos (3b + x_1) - 3 \cos (5b - x_1)] \\
 &= -U_{m1} [5 \cos (3c + x_1) - 3 \cos (5c - x_1)] \\
 &= -U_{m2} [5 \cos (3a + x_2) - 3 \cos (5a - x_2)] \\
 &= +U_{m2} [5 \cos (3c + x_2) - 3 \cos (5c - x_2)] \\
 &= +U_{m3} [5 \cos (3a + x_3) - 3 \cos (5a - x_3)] \\
 &= +U_{m3} [5 \cos (3b + x_3) - 3 \cos (5b - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.138}$$

$$\begin{aligned}
 15 \pi b_2 &= -U_{m1} [5 \sin (3b + x_1) - 3 \sin (5b - x_1)] \\
 &= -U_{m1} [5 \sin (3c + x_1) - 3 \sin (5c - x_1)] \\
 &= -U_{m2} [5 \sin (3a + x_2) - 3 \sin (5a - x_2)] \\
 &= +U_{m2} [5 \sin (3c + x_2) - 3 \sin (5c - x_2)] \\
 &= +U_{m3} [5 \sin (3a + x_3) - 3 \sin (5a - x_3)] \\
 &= +U_{m3} [5 \sin (3b + x_3) - 3 \sin (5b - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.139}$$

Rezultă coeficientul global de nesimetrie:

$$k_n = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \tag{3.140}$$

**Cazul 2**

Este vorba de cazul (a, c, b).

Prin particularizarea formulelor generale (1.13) și (1.14), obținem:

$$\begin{aligned}
 3 \pi a_1 &= -U_{m1} [3 \cos (c + x_1) - \cos (3c - x_1)] \\
 &= -U_{m1} [3 \cos (b + x_1) - \cos (3b - x_1)] \\
 &= +U_{m2} [3 \cos (a + x_2) - \cos (3a - x_2)] \\
 &= +U_{m2} [3 \cos (c + x_2) - \cos (3c - x_2)] \\
 &= -U_{m3} [3 \cos (a + x_3) - \cos (3a - x_3)] \\
 &= +U_{m3} [3 \cos (b + x_3) - \cos (3b - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.141}$$

$$\begin{aligned}
 3 \pi b_1 &= -U_{m1} [3 \sin (c + x_1) - \sin (3c - x_1)] \\
 &= -U_{m1} [3 \sin (b + x_1) - \sin (3b - x_1)] \\
 &= +U_{m2} [3 \sin (a + x_2) - \sin (3a - x_2)] \\
 &= +U_{m2} [3 \sin (c + x_2) - \sin (3c - x_2)] \\
 &= -U_{m3} [3 \sin (a + x_3) - \sin (3a - x_3)] \\
 &= +U_{m3} [3 \sin (b + x_3) - \sin (3b - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.142}$$

$$\begin{aligned}
 15 \pi a_2 &= -U_{m1} [5 \cos (3c + x_1) - 3 \cos (5c - x_1)] \\
 &= -U_{m1} [5 \cos (3b + x_1) - 3 \cos (5b - x_1)] \\
 &= +U_{m2} [5 \cos (3a + x_2) - 3 \cos (5a - x_2)] \\
 &= +U_{m2} [5 \cos (3c + x_2) - 3 \cos (5c - x_2)] \\
 &= -U_{m3} [5 \cos (3a + x_3) - 3 \cos (5a - x_3)] \\
 &= +U_{m3} [5 \cos (3b + x_3) - 3 \cos (5b - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.143}$$

$$\begin{aligned}
 15 \pi b_2 &= -U_{m1} [5 \sin (3c + x_1) - 3 \sin (5c - x_1)] \\
 &= -U_{m1} [5 \sin (3b + x_1) - 3 \sin (5b - x_1)] \\
 &= +U_{m2} [5 \sin (3a + x_2) - 3 \sin (5a - x_2)] \\
 &= +U_{m2} [5 \sin (3c + x_2) - 3 \sin (5c - x_2)] \\
 &= -U_{m3} [5 \sin (3a + x_3) - 3 \sin (5a - x_3)] \\
 &= +U_{m3} [5 \sin (3b + x_3) - 3 \sin (5b - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.144}$$

Rezultă coeficientul global de nesimetrie:

$$k_n = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \tag{3.145}$$

### Cazul 3

Este vorba de cazul (b, c, a).

Prin particularizarea formulelor generale (3.18) și (3.19), obținem:

$$\begin{aligned}
 3 \pi a_1 &= -U_{m1} [3 \cos (c + x_1) - \cos (3c - x_1)] \\
 &= -U_{m1} [3 \cos (b + x_1) - \cos (3b - x_1)] \\
 &= +U_{m2} [3 \cos (c + x_2) - \cos (3c - x_2)] \\
 &= +U_{m2} [3 \cos (a + x_2) - \cos (3a - x_2)] \\
 &= +U_{m3} [3 \cos (b + x_3) - \cos (3b - x_3)] \\
 &= -U_{m3} [3 \cos (a + x_3) - \cos (3a - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.146}$$

$$\begin{aligned}
 3 \pi b_1 &= -U_{m1} [3 \sin (c + x_1) - \sin (3c - x_1)] \\
 &= -U_{m1} [3 \sin (b + x_1) - \sin (3b - x_1)] \\
 &= +U_{m2} [3 \sin (c + x_2) - \sin (3c - x_2)] \\
 &= +U_{m2} [3 \sin (a + x_2) - \sin (3a - x_2)] \\
 &= +U_{m3} [3 \sin (b + x_3) - \sin (3b - x_3)] \\
 &= -U_{m3} [3 \sin (a + x_3) - \sin (3a - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.147}$$

$$\begin{aligned}
 15 \pi a_2 &= -U_{m1} [5 \cos (3c + x_1) - 3 \cos (5c - x_1)] \\
 &= -U_{m1} [5 \cos (3b + x_1) - 3 \cos (5b - x_1)] \\
 &= +U_{m2} [5 \cos (3c + x_2) - 3 \cos (5c - x_2)] \\
 &= +U_{m2} [5 \cos (3a + x_2) - 3 \cos (5a - x_2)] \\
 &= +U_{m3} [5 \cos (3b + x_3) - 3 \cos (5b - x_3)] \\
 &= -U_{m3} [5 \cos (3a + x_3) - 3 \cos (5a - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.148}$$

$$\begin{aligned}
 15 \pi b_2 &= -U_{m1} [5 \sin (3c + x_1) - 3 \sin (5c - x_1)] \\
 &= -U_{m1} [5 \sin (3b + x_1) - 3 \sin (5b - x_1)] \\
 &= +U_{m2} [5 \sin (3c + x_2) - 3 \sin (5c - x_2)] \\
 &= +U_{m2} [5 \sin (3a + x_2) - 3 \sin (5a - x_2)] \\
 &= +U_{m3} [5 \sin (3b + x_3) - 3 \sin (5b - x_3)] \\
 &= -U_{m3} [5 \sin (3a + x_3) - 3 \sin (5a - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.149}$$

Rezultă coeficientul global de nesimetrie:

$$k_n = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \tag{3.150}$$

**Cazul 4**

Este vorba de cazul (c, b, a).

Prin particularizarea formulelor generale (3.23) și (3.24), obținem:

$$\begin{aligned}
 3 \pi a_1 &= -U_{m1} [3 \cos (b + x_1) - \cos (3b - x_1)] \\
 &= -U_{m1} [3 \cos (c + x_1) - \cos (3c - x_1)] \\
 &= +U_{m2} [3 \cos (c + x_2) - \cos (3c - x_2)] \\
 &= -U_{m2} [3 \cos (a + x_2) - \cos (3a - x_2)] \\
 &= +U_{m3} [3 \cos (b + x_3) - \cos (3b - x_3)] \\
 &= +U_{m3} [3 \cos (a + x_3) - \cos (3a - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.151}$$

$$\begin{aligned}
 3 \pi b_1 &= -U_{m1} [3 \sin (b + x_1) - \sin (3b - x_1)] \\
 &= -U_{m1} [3 \sin (c + x_1) - \sin (3c - x_1)] \\
 &= +U_{m2} [3 \sin (c + x_2) - \sin (3c - x_2)] \\
 &= -U_{m2} [3 \sin (a + x_2) - \sin (3a - x_2)] \\
 &= +U_{m3} [3 \sin (b + x_3) - \sin (3b - x_3)] \\
 &= +U_{m3} [3 \sin (a + x_3) - \sin (3a - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.152}$$

$$\begin{aligned}
 15 \pi a_2 &= -U_{m1} [5 \cos (3b + x_1) - 3 \cos (5b - x_1)] \\
 &= -U_{m1} [5 \cos (3c + x_1) - 3 \cos (5c - x_1)] \\
 &= +U_{m2} [5 \cos (3c + x_2) - 3 \cos (5c - x_2)] \\
 &= -U_{m2} [5 \cos (3a + x_2) - 3 \cos (5a - x_2)] \\
 &= +U_{m3} [5 \cos (3b + x_3) - 3 \cos (5b - x_3)] \\
 &= +U_{m3} [5 \cos (3a + x_3) - 3 \cos (5a - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.153}$$

$$\begin{aligned}
 15 \pi b_2 &= -U_{m1} [5 \sin (3b + x_1) - 3 \sin (5b - x_1)] \\
 &= -U_{m1} [5 \sin (3c + x_1) - 3 \sin (5c - x_1)] \\
 &= +U_{m2} [5 \sin (3c + x_2) - 3 \sin (5c - x_2)] \\
 &= -U_{m2} [5 \sin (3a + x_2) - 3 \sin (5a - x_2)] \\
 &= +U_{m3} [5 \sin (3b + x_3) - 3 \sin (5b - x_3)] \\
 &= +U_{m3} [5 \sin (3a + x_3) - 3 \sin (5a - x_3)]
 \end{aligned} \tag{3.154}$$

Rezultă coeficientul global de nesimetrie:

$$k_n = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \tag{3.155}$$

### 3.3.3. Analiza unor cazuri particulare

În cazul sistemului trifazat simetric (paragraful 3.1.1.2) coeficientul global de nesimetrie este nul:

$$k_n = 0 \quad (3.156)$$

În cazul  $u_3 = 0$  (paragraful 3.1.1.5), coeficientul global de nesimetrie rezultă:

$$k_n = \frac{8+12\sqrt{3}}{15\pi} \approx 0,611 \quad (3.157)$$

În cazul  $u_3 = 0$  și  $u_2 = 0$  (paragraful 3.1.1.6), coeficientul global de nesimetrie rezultă:

$$k_n = \frac{24}{15\pi} \approx 0,509 \quad (3.158)$$

În cazul  $u_3 = 0$  și  $u_2 = -u_1$  de funcționare monofazată (paragraful 3.1.1.7), coeficientul global de nesimetrie rezultă:

$$k_n = \frac{48}{15\pi} \approx 1,018 \quad (3.159)$$

### 3.3.4. Cazul sistemelor de secvență inversă

Având în vedere cele arătate în paragraful 3.1.1.8 rezultă că pentru orice sistem nesimetric de secvență inversă, coeficientul global de nesimetrie este egal cu cel al sistemului pereche de secvență directă [P19].

### 3.3.5. Program de calculator pentru analiza sistemelor trifazate nesimetrice. (SISNES)

S-a realizat programul de calculator **SISNES** care are trei subprograme:

1. Program pentru calculul coeficientul global de nesimetrie (**CGN**).
2. Program pentru determinarea coeficientul global de nesimetrie maxim (**MAXIK**)
3. Program pentru analiza claselor de dezechilibru ale receptoarelor dezechilibrate discrete (**RDD**)

Programul pentru calculul coeficientului global de nesimetrie (**CGN**) permite calculul acestui coeficient pentru orice sistem trifazat de secvență directă. Sistemul este definit prin

introducerea de la tastatură a parametrilor  $U_{m1} = 1$ ,  $U_{m2}$ ,  $U_{m3}$  (subunitari),  $x_1 = 0$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  ( $x_2 < x_3$ ). Acest subprogram ne furnizează pe lângă valoarea coeficientului global de nesimetrie  $k_n = A_1 + A_2$  și lista amplitudinilor primelor 10 armonici ale lui  $u_d$ , gradul de asimetrie, gradul de disimetrie și reprezentarea grafică a spectrului de armonici.

Programul pentru determinarea coeficientului global de nesimetrie maxim (**MAXIK**) permite găsirea sistemului trifazat având  $k_n$  maxim.

În acest scop se analizează toate sistemele trifazate obținute prin parcurgerea rețelelor de discretizare pentru  $U_{m2}$ ,  $U_{m3}$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , redate în figura 3.31:

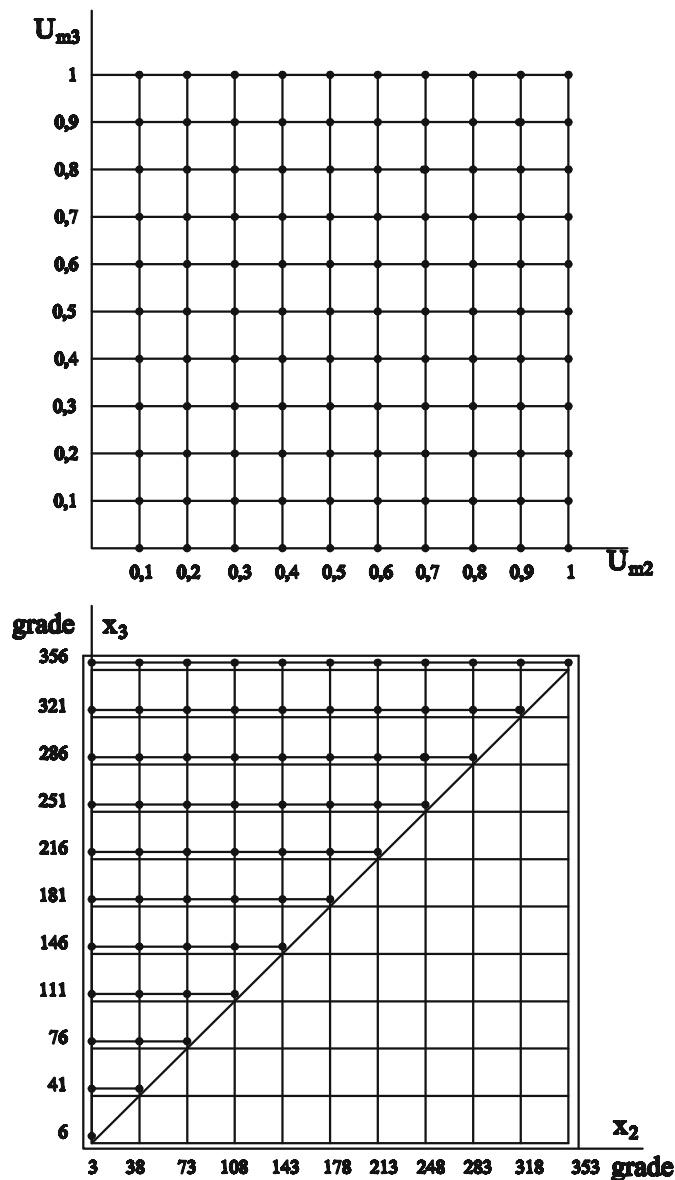


Fig. 3.31 Rețele de discretizare pentru  $U_{m2}$ ,  $U_{m3}$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ .



Se calculează de fiecare dată coeficientul global de nesimetrie și în final se indică valoarea maximă. Programul dă posibilitatea alegerii locului de afișare a rezultatelor: pe ecran sau într-un fișier text (date.txt). Acest fișier conține lista tuturor sistemelor analizate, cu valoarea coeficientului global de nesimetrie, iar în final se indică  $k_n$  maxim.

Rulând programul **MAXIK** s-a obținut coeficientul global de nesimetrie maxim dintr-un număr de 6600 de sisteme simetrice analizate. Anume,  $k_{n\max} = 1,018333$  și se obține pentru sistemul definit de  $U_{m1} = 1$ ;  $U_{m2} = 0,1$ ;  $U_{m3} = 1$ ;  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 178^0$ ;  $x_3 = 181^0$ .

Programul **MAXIK** crează de asemenea încă două fișiere text: verifmax.txt și verifmin.txt (în directorul rădăcină al hard-disk-ului). Acestea au rol de verificare al rezultatelor. În fișierul verifmax sunt date sistemele care au  $k_n > 1,01$  iar în fișierul verifmin sunt date sistemele care au  $k_n < 0,02$ .

Al treilea subprogram al programului **SISNES** permite utilizarea programului **RDD** prin intermediul programului **SISNES**.

Programul **SISNES** afișează la început un meniu central, cu patru posibilități de selecție:

Selecție 1: Programul **CGN**

Selecție 2: Programul **MAXIK**

Selecție 3: Programul **RDD**

Selecție 4: Ieșire (Exit)

Listingul programului de calculator **SISNES** este dat în anexele lucrării.

### 3.3.6 Program de calculator pentru reprezentarea variației coeficientului global de nesimetrie (VARK)

S-a realizat programul de calculator **VARK** care permite reprezentarea grafică 3D a variației coeficientului global de nesimetrie.

Coeficientul global de nesimetrie este o funcție (continuă) de patru parametri:  $U_{m2}$ ,  $U_{m3}$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  (deoarece luăm întotdeauna  $U_{m1} = 1$ ,  $x_1 = 0$ ). Se pot realiza reprezentări grafice ale variației lui  $k_n = k_{n2}$  funcție de 2 parametri, ceilalți 2 fiind menținuți constanți.

Programul **VARK** oferă următoarele posibilități de reprezentare:

1. Grafic  $k_{n2} = f(U_{m2}, U_{m3})$
2. Grafic  $k_{n2} = f(U_{m2}, x_2)$
3. Grafic  $k_{n2} = f(U_{m2}, x_3)$

4. Grafic  $k_{n2} = f(U_{m3}, x_2)$
5. Grafic  $k_{n2} = f(U_{m3}, x_3)$
6. Grafic  $k_{n2} = f(x_2, x_3)$
7. Ieșire.

Pentru fiecare posibilitate, se pot realiza trei tipuri de reprezentări grafice:

1. Cu bare.
2. Suprafață.
3. Mixt.

De asemenea, la fiecare reprezentare se indică coeficientul global de nesimetrie maxim și sistemul nesimetric pentru care se obține. În grafic, acest maxim este indicat printr-o bară îngroșată.

Programul **VARK** lucrează în felul următor:

1. Se introduce un sistem trifazat nesimetric prin parametrii  $U_{m1}$ ,  $U_{m2}$ ,  $U_{m3}$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ .
2. Se realizează analiza armonică a tensiunii  $u_d$  corespunzătoare.
3. Se alege una din cele șase variante de reprezentare 3D.

În acest moment, programul menține constanți cei doi parametri care nu variază în timpul reprezentării alese. Mai exact, valorile acestor parametri sunt “moșteniți” de la introducere (vezi punctul 1 de mai sus). Cei doi parametri variabili variază în conformitate cu rețelele de discretizare din figura 3.31. Programul calculează de fiecare dată valoarea coeficientului global de nesimetrie  $k_{n2}$  și apoi realizează reprezentarea grafică 3D a variației lui  $k_{n2}$  funcție de parametrii variabili specifici variantei de reprezentare alese.

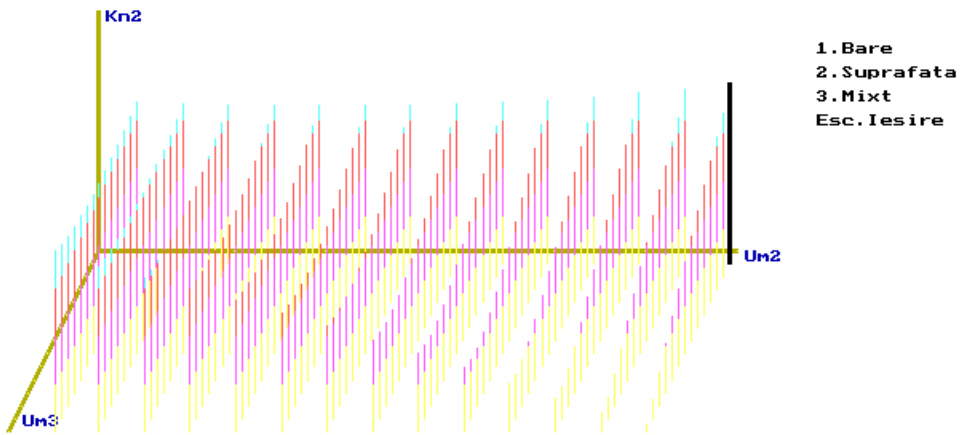
Aplicația Vark 1 lucrează după rețelele de discretizare din figura 3.31, deci realizează o diviziune a intervalului de variație maxim pentru  $x_2$  și  $x_3$  în  $n = 11$  puncte. Aplicația Vark 2 permite o discretizare mai fină (corespunzătoare la  $n = 11 \dots 15$ , la alegere).

De asemenea, am realizat rularea programului **VARK** în mediul **MATLAB**. Datele obținute în programul **VARK** sunt transformate în fișiere ASCII care sunt prelucrate în mediul **MATLAB** pentru realizarea unor reprezentări grafice 3D cu parametri îmbunătățiți. Mediul **MATLAB** permite scalarea automată a axelor și modificarea punctului de vedere asupra suprafeței, ceea ce conduce la reprezentări 3D de calitate superioară. De asemenea se pot realiza reprezentări de forma “mesh” (suprafață-rețea) sau “surf” (suprafață plină). Suprafețele obținute sunt color, cu indicarea prin modificarea culorilor a variației lui  $k_{n2}$ .

În continuare sunt redată o serie de reprezentări grafice 3D ale variației coeficientului global de nesimetrie, realizate cu programul **VARK**, respectiv cu programul **VARK** rulat în mediul **MATLAB**.

PROGRAM PENTRU REPREZENTAREA VARIATIEI COEFICIENTULUI

GLOBAL DE NESIMETRIE (UARK)

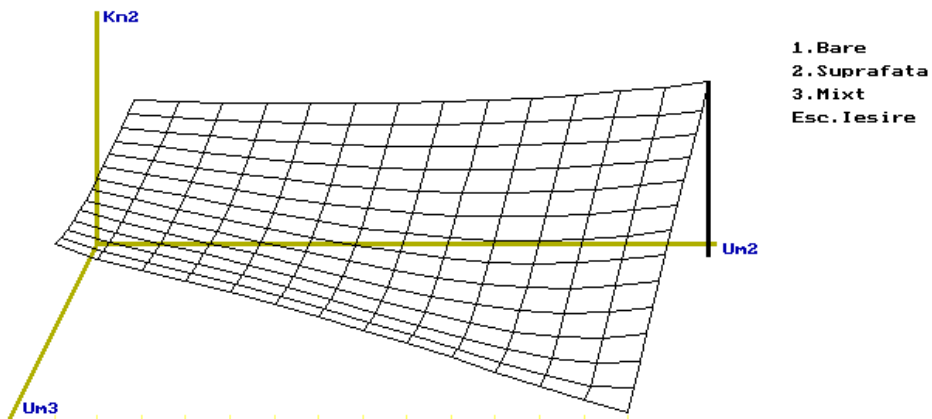


Coeficient global de nesimetrie maxim : 0.567952  
 Um1 = 1.0000 , Um2 = 0.9714 , Um3 = 0.0429  
 x1 = 0 , x2 = 120 , x3 = 240

Fig.3.32. Reprezentarea coeficientului global de nesimetrie când variază  $U_{m2}$  și  $U_{m3}$  și sunt constanți  $x_2=120^0$  și  $x_3=240^0$  (varianta cu bare)

PROGRAM PENTRU REPREZENTAREA VARIATIEI COEFICIENTULUI

GLOBAL DE NESIMETRIE (UARK)

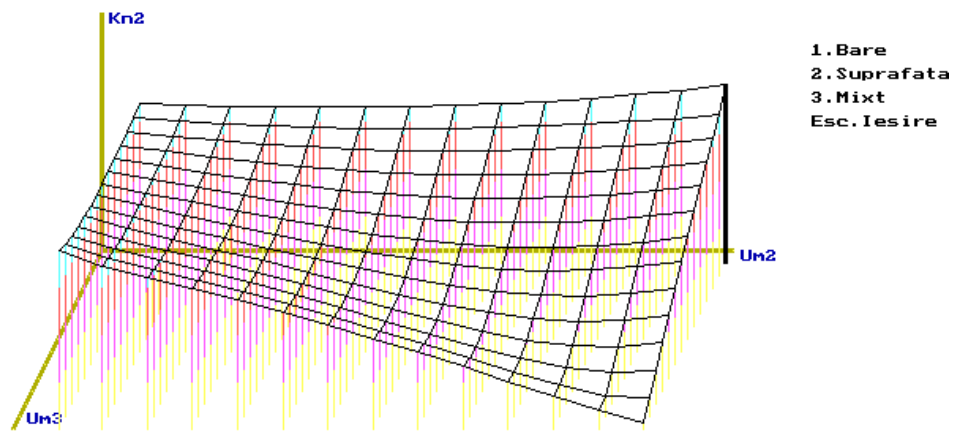


Coeficient global de nesimetrie maxim : 0.567952  
 Um1 = 1.0000 , Um2 = 0.9714 , Um3 = 0.0429  
 x1 = 0 , x2 = 120 , x3 = 240

Fig.3.33. Reprezentarea coeficientului global de nesimetrie când variază  $U_{m2}$  și  $U_{m3}$  și sunt constanți  $x_2=120^0$  și  $x_3=240^0$  (varianta suprafață)

## PROGRAM PENTRU REPREZENTAREA VARIATIEI COEFICIENTULUI

## GLOBAL DE NESIMETRIE (UARK)



Coefficient global de nesimetrie maxim : 0.567952

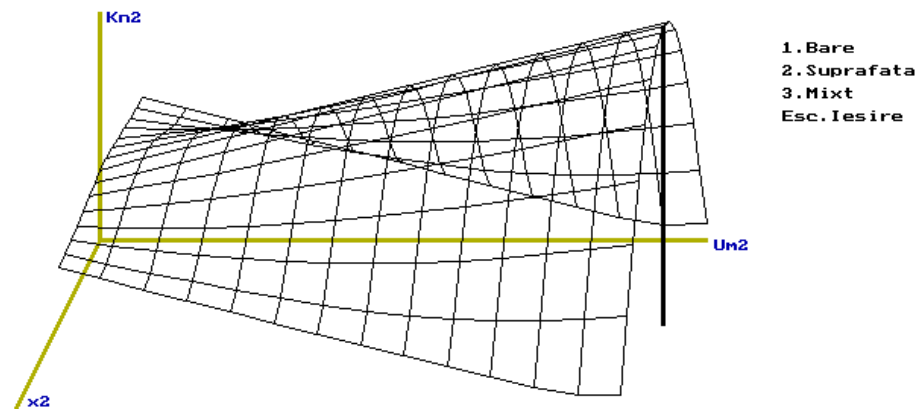
$Um1 = 1.0000$  ,  $Um2 = 0.9714$  ,  $Um3 = 0.0429$

$x1 = 0$  ,  $x2 = 120$  ,  $x3 = 240$

Fig.3.34. Reprezentarea coeficientului global de nesimetrie când variază  $Um_2$  și  $Um_3$  și sunt constanți  $x_2=120^0$  și  $x_3=240^0$

## PROGRAM PENTRU REPREZENTAREA VARIATIEI COEFICIENTULUI

## GLOBAL DE NESIMETRIE (UARK)



Coefficient global de nesimetrie maxim : 0.991094

$Um1 = 1.0000$  ,  $Um2 = 0.9714$  ,  $Um3 = 1.0000$

$x1 = 0$  ,  $x2 = 178$  ,  $x3 = 356$

(varianta mixtă)

Fig.3.35. Reprezentarea coeficientului global de nesimetrie când variază  $Um_2$  și  $x_2$  și sunt constanți  $Um_3=1$  și  $x_3=356^0$

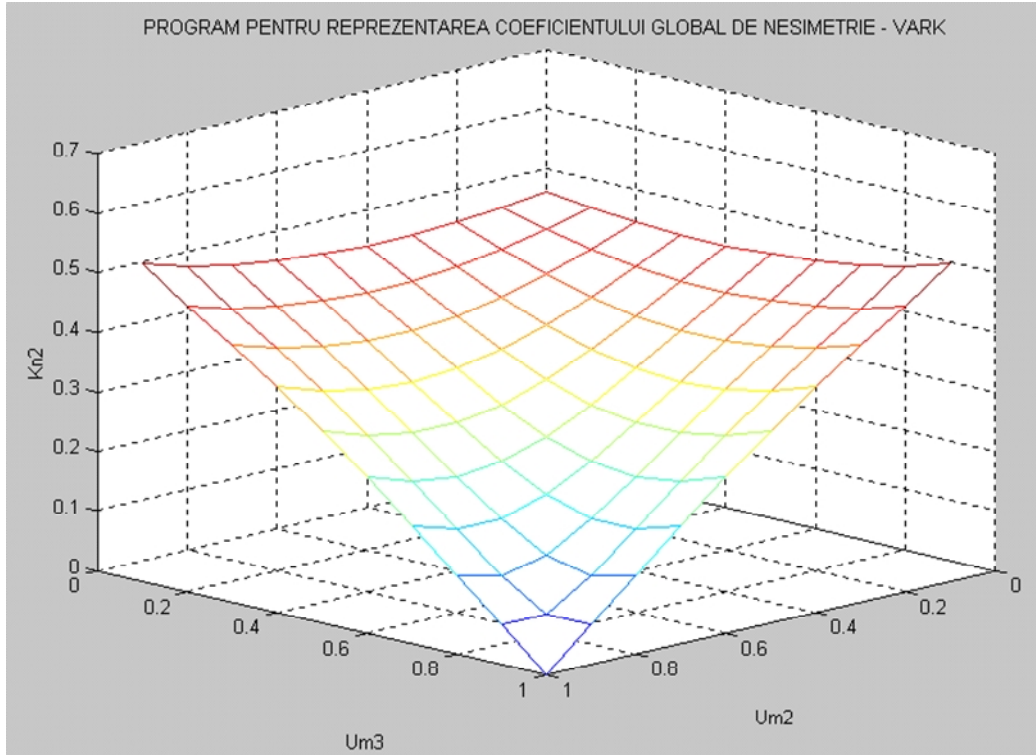


Fig.3.36. Reprezentarea coeficientului global de nesimetrie când variază  $U_{m2}$  și  $U_{m3}$  și sunt constanți  $x_2=120^0$  și  $x_3=240^0$

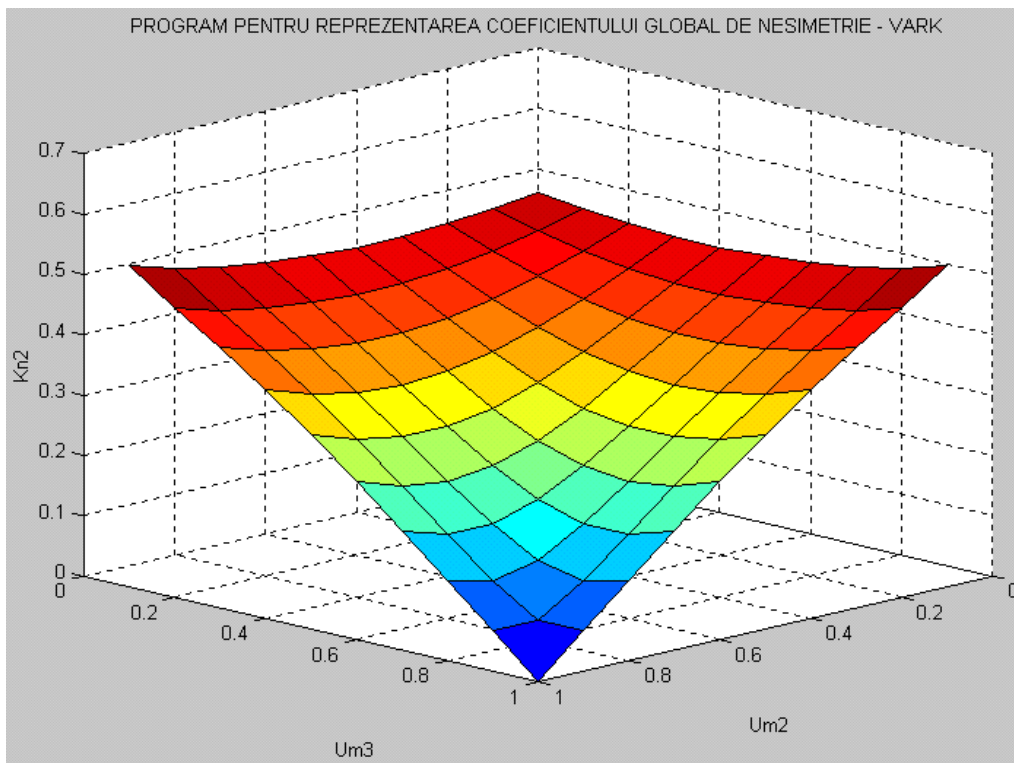


Fig.3.37. Reprezentarea coeficientului global de nesimetrie când variază  $U_{m2}$  și  $U_{m3}$  și sunt constanți  $x_2=120^0$  și  $x_3=240^0$   
(variantă surf executată în MATLAB cu Vark1)

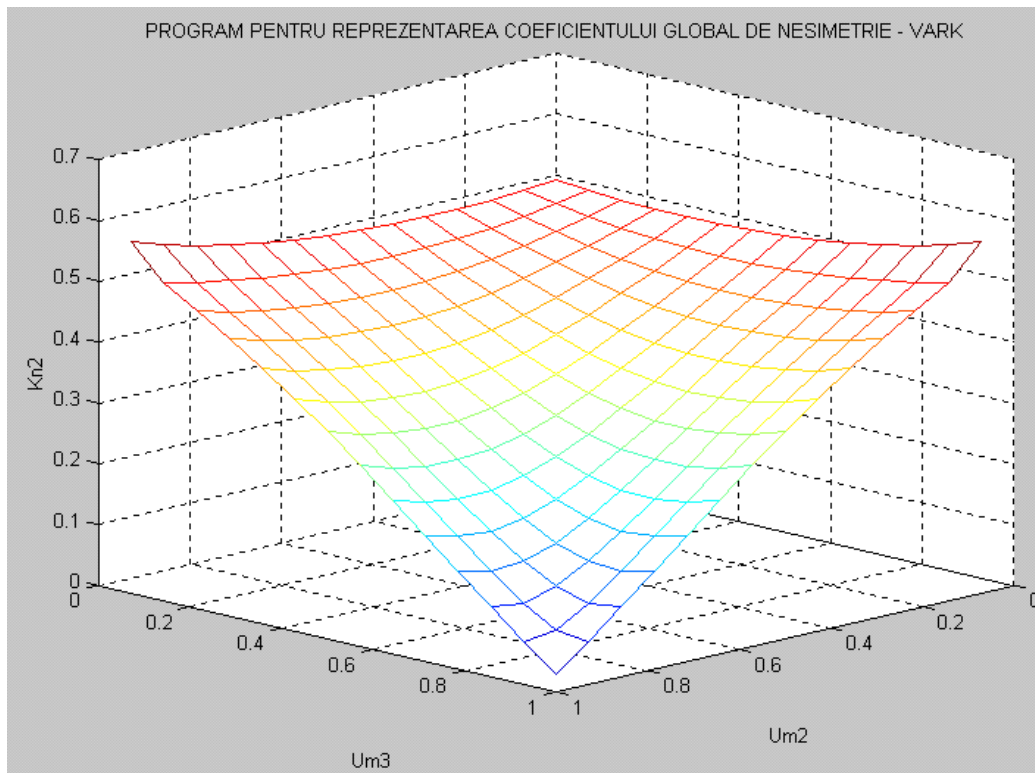


Fig.3.38. Reprezentarea coeficientului global de nesimetrie când variază  $U_{m2}$  și  $U_{m3}$  și sunt constanți  $x_2=120^0$  și  $x_3=240^0$  (variantă mesh executată în MATLAB cu Vark2)

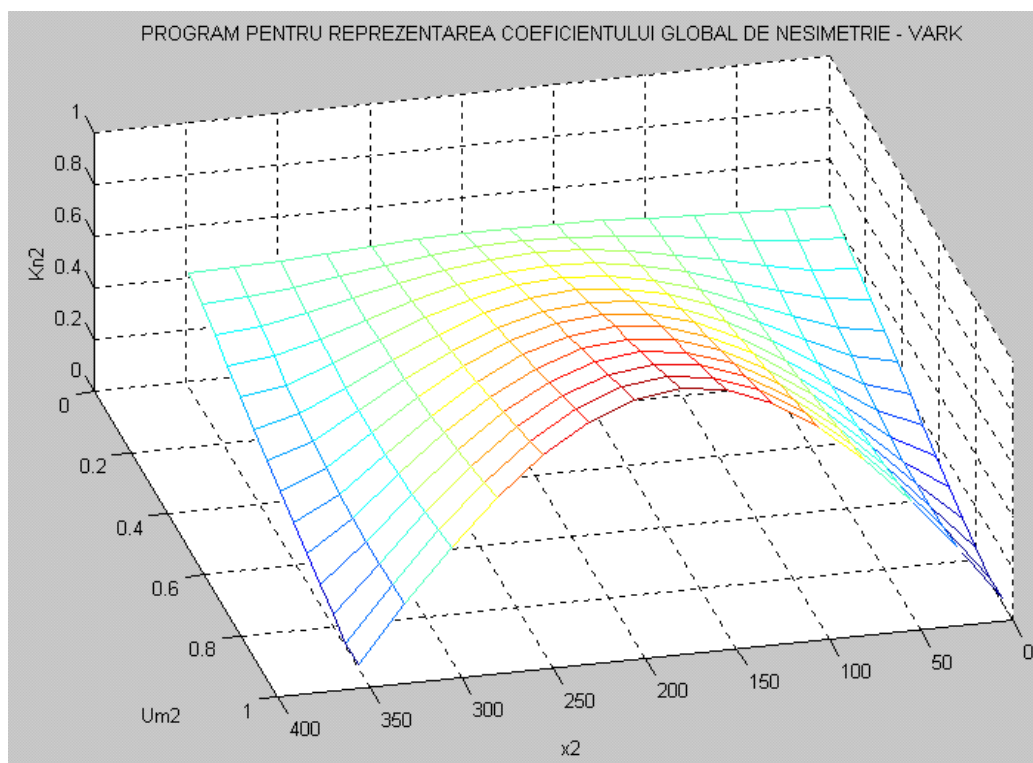


Fig.3.39. Reprezentarea coeficientului global de nesimetrie când variază  $U_{m2}$  și  $x_2$  și sunt constanți  $U_{m3}=1$  și  $x_3=356^0$  (variantă mesh executată în MATLAB cu Vark2)

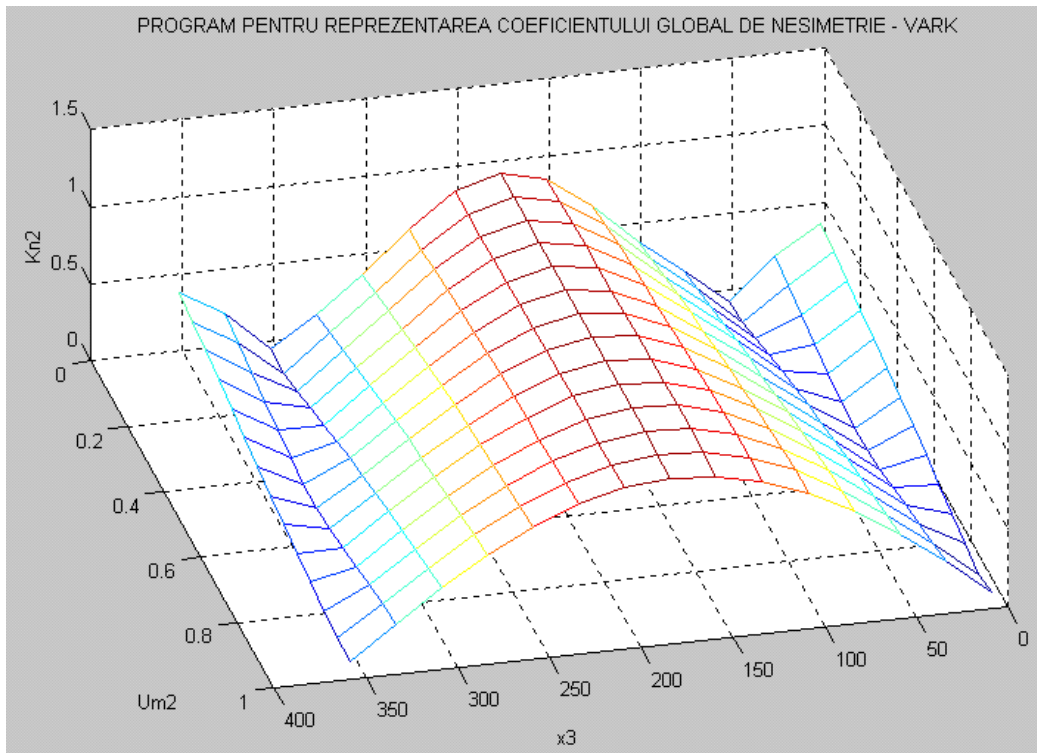


Fig.3.40. Reprezentarea coeficientului global de nesimetrie când variază  $U_{m2}$  și  $x_3$  și sunt constanți  $U_{m3}=1$  și  $x_2=3^0$  (variantă mesh executată în MATLAB cu Vark2)

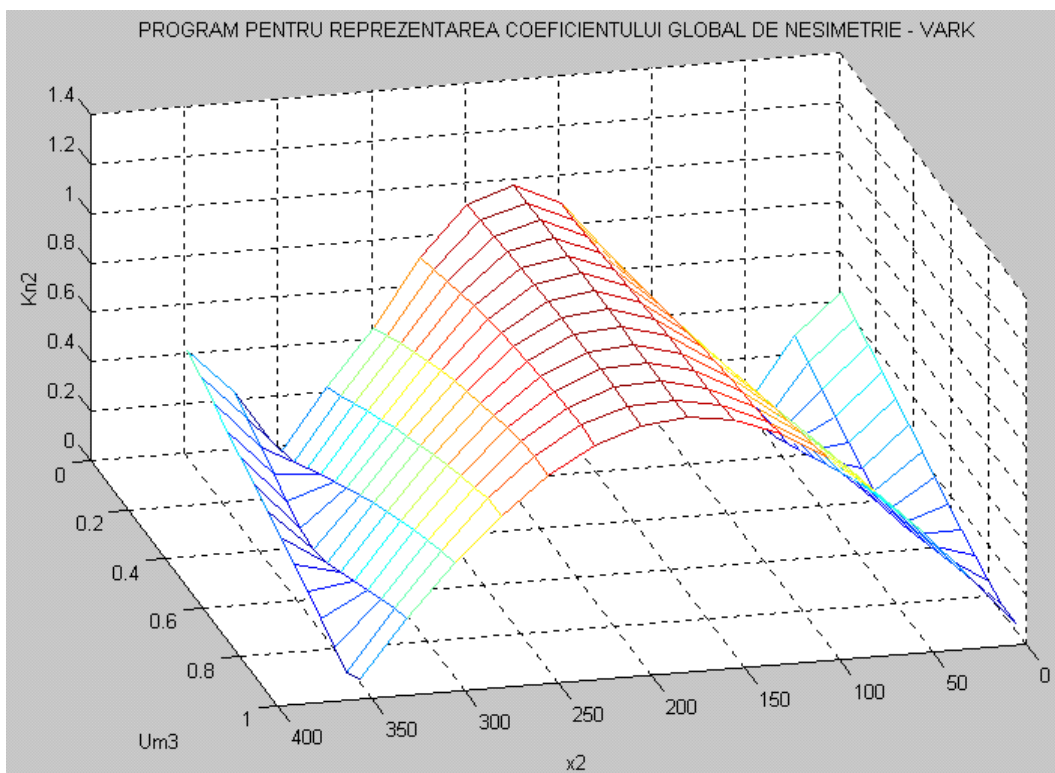


Fig.3.41. Reprezentarea coeficientului global de nesimetrie când variază  $U_{m3}$  și  $x_2$  și sunt constanți  $U_{m2}=1$  și  $x_3=356^0$  (variantă mesh executată în MATLAB cu Vark2)

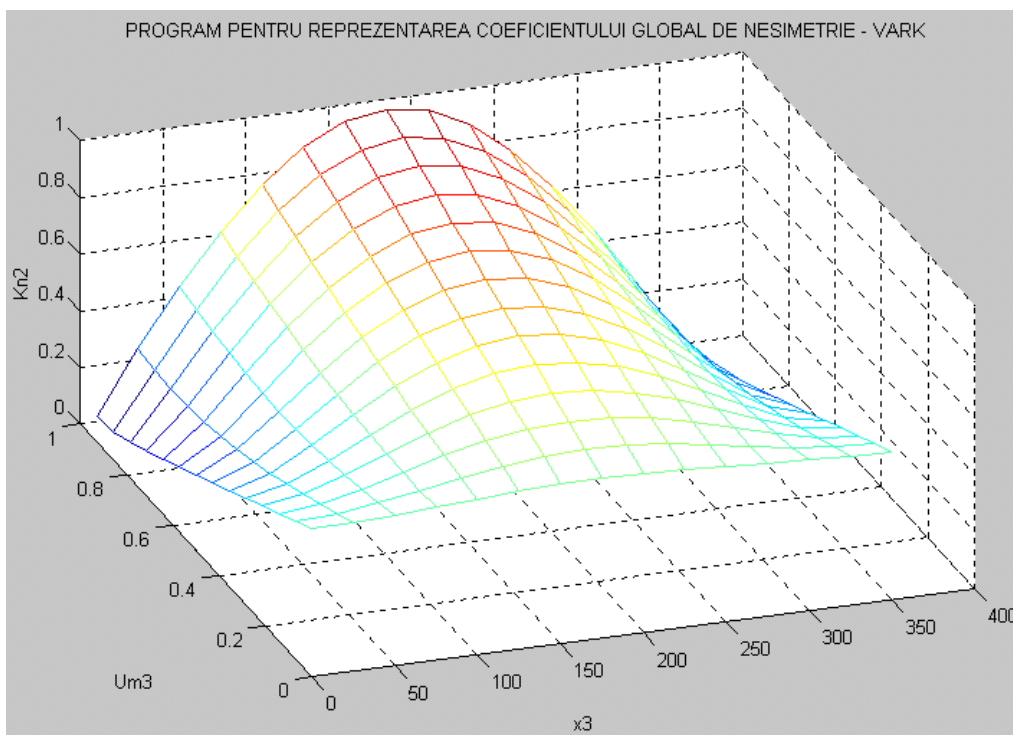


Fig.3.42. Reprezentarea coeficientului global de nesimetrie când variază  $U_{m3}$  și  $x_3$  și sunt constanți  $U_{m2}=1$  și  $x_2=3^0$  (variantă mesh executată în MATLAB cu Vark2)

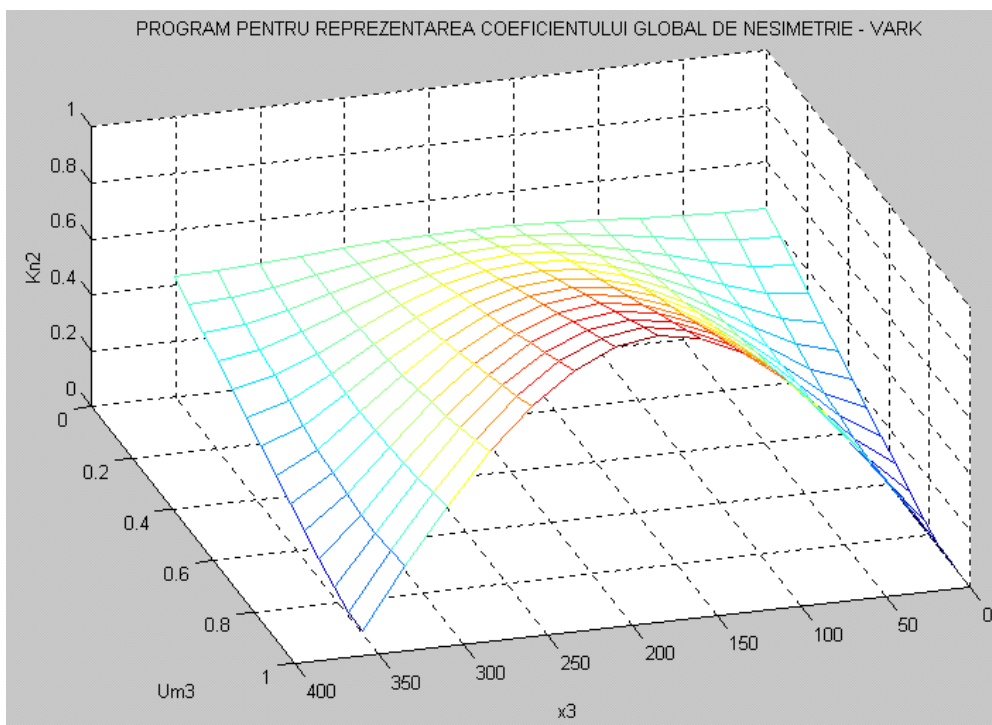


Fig.3.43. Reprezentarea coeficientului global de nesimetrie când variază  $U_{m3}$  și  $x_3$  și sunt constanți  $U_{m2}=1$  și  $x_2=3^0$  (variantă mesh executată în MATLAB cu Vark2, utilizând al unghi de vedere față de varianta anterioară)



Listingu programului **VARK** este dat în anexele acestei lucrări.

### 3.4. Concluzii și observații

În acest capitol s-au pus în evidență o serie de aspecte legate de funcționarea unei punți trifazate de diode alimentate cu un sistem nesimetric de tensiuni.

La început, s-a considerat cazul punții de diode ideale alimentând o rezistență pură. S-a prezentat o metodă analitică exactă de calcul, în cele patru cazuri care pot exista. De asemenea, s-au analizat o serie de cazuri particulare. Pe baza metodei analitice prezentate, s-a elaborat programul de calculator **PDIODE**. Rezultatele obținute prin metoda analitică (respectiv cu programul **PDIODE**) au fost comparate cu cele obținute prin simulare pe calculator, respectiv prin măsurători experimentale în laborator.

S-a considerat apoi cazul punții de diode alimentând o sarcină complexă formată dintr-o rezistență, o inductivitate și o tensiune contraelectromotoare. S-a adoptat o metodă analitică de calcul preluată din literatura de specialitate [S3], [S4], [S5], [S6], [S7], [S8]. Rezultatele obținute au fost comparate cu cele rezultate în urma simulării pe calculator.

În continuare se propune introducerea unui coeficient global de nesimetrie pentru sistemele trifazate nesimetrice. După cum se știe, în mod clasic se indică nesimetria unui sistem trifazat prin gradul de asimetrie și gradul de disimetrie. Pentru ca nesimetria unui sistem trifazat să fie relativ mică, ambele grade trebuie să fie mai mici decât niște valori admise convențional, de exemplu 5%. Coeficientul global de nesimetrie ( $k_n$ ) indică nesimetria sistemului printr-un singur număr cuprins între 0 și 1,02. S-au prezentat formulele analitice de calcul ale lui  $k_n$  pentru cele patru cazuri și valorile lui pentru unele cazuri particulare. De asemenea, s-au prezentat programele de calculator **SISNES**, **CGN**, **MAXIK** și **VARK** care permit calcularea lui  $k_n$ , determinarea maximului și reprezentarea grafică a variației coeficientului global de nesimetrie, împreună cu rezultatele obținute.

La elaborarea acestui capitol care este în mare măsură original, autorul a adus următoarele contribuții originale:

- Propun o metodă analitică exactă de calcul pentru puntea de diode ideale alimentată nesimetric.
- Evidențiez existența a patru cazuri, fiecare cu setul de formule corespunzător.
- Formulez și demonstrez “teorema pozițiilor” legată de existența celor patru cazuri.
- Elaborez programul de calculator **PDIODE** pentru analiza punții de diode alimentată nesimetric.
- Adaptez după literatura de specialitate o metodă analitică pentru puntea de diode alimentată nesimetric și având o sarcină complexă.
- Propun un nou indicator pentru nesimetria sistemelor trifazate, pe care l-am numit coeficient global de nesimetrie, indicând formulele de calcul pentru acesta.
- Elaborez programul de calculator **SISNES**, conținând subprogramele **CGN** și **MAXIK** pentru analiza sistemelor nesimetrice, calculul coeficientului global de nesimetrie și determinarea maximului acestui coeficient.
- Elaborez programul de calculator **VARK** pentru reprezentarea variației coeficientului global de nesimetrie (cu două variante de aplicare: Vark1 și Vark2).
- Realizez utilizarea programului **VARK** în mediul **MATLAB** pentru obținerea unor reprezentări 3D cu parametri îmbunătățiți.

CAPITOLUL 4  
APLICAȚIE – REALIZAREA UNUI  
DISPOZITIV DE PROTECȚIE ANTIBIFAZICĂ



## 4. APLICAȚIE-REALIZAREA UNUI DISPOZITIV DE PROTECȚIE ANTIBIFAZICĂ

În acest capitol se prezintă o aplicație a teoriei expuse anterior, legată de puntea de diode alimentată nesimetric. Nesimetria sistemului trifazat de tensiuni aplicat punții va fi sesizată prin intermediul coeficientului global de nesimetrie definit în subcapitolul 3.3. Acest sistem de tensiuni este proporțional cu sistemul curenților de linie absorbiți de un motor asincron trifazat și este furnizat de trei transductoare curent-tensiune.

### 4.1. Regimuri nesimetrice sau dezechilibrate la funcționarea unui motor asincron trifazat

După cum se știe, motoarele asincrone trifazate, care au ponderea cea mai însemnată în acționările industriale moderne, funcționează în mod normal în regim simetric și echilibrat [D8], [F5], [G5], [N4], [N5], [R8].

Ele pot însă ajunge să funcționeze în regimuri anormale, cum sunt cele de nesimetrie și/sau de dezechilibru. [A3], [B4], [F5], [P34], [S26], [W8], [W10].

Astfel, este posibil ca un motor asincron trifazat, care este un receptor echilibrat, să fie alimentat cu un sistem trifazat nesimetric de tensiuni. [B4], [N4], [S26], [W8], [W10]. În această situație, curenții din fazele statorului nu formează nici ei un sistem simetric. Ca urmare, câmpul magnetic din întrefierul mașinii are două componente care se rotesc în sensuri contrare: un câmp magnetic învârtitor direct și un câmp magnetic învârtitor invers. Amplitudinile acestor două câmpuri nu sunt egale între ele, cu excepția cazului particular al motorului asincron monofazat. Câmpul magnetic direct induce în rotor tensiuni și curenți de frecvență  $f_d=sf$ , iar câmpul magnetic invers induce în rotor tensiuni și curenți de frecvență  $f_i=(2-s)f$ . Prin urmare, putem considera că mașina reală se compune din două mașini fictive, una directă și alta inversă. Cuplurile dezvoltate de cele două mașini fictive sunt de sensuri contrare, iar cuplul rezultat este suma algebrică a celor două cupluri. Cuplul invers are rolul unui cuplu de frânare; din acest motiv, la același cuplu rezistent, curentul absorbit de motor de la rețea, precum și alunecarea sunt mai mari decât cele de la cazul funcționării normale, simetrice, a motorului respectiv. În general cele două cupluri nu au amplitudini egale iar când rotorul este în repaus, cuplul rezultat este diferit de zero și motorul pornește. În cazul limită al nesimetriei monofazate, cele două cupluri care apar au amplitudini egale, iar când rotorul este în repaus cuplul rezultat este nul, deci motorul nu poate porni singur. Situația funcționării unui motor asincron trifazat cu un sistem de tensiuni de alimentare nesimetric este o situație de avarie (a liniei de alimentare).

O altă situație posibilă de funcționare este atunci când sistemul de tensiuni de alimentare este simetric, dar motorul este un receptor dezechilibrat. Astfel, sunt posibile apariția unor scurtcircuite în înfășurările statorului [F5], [G5], [N4], [R8]. Scurtcircuitele pot fi bifazate sau monofazate, iar până la acționarea sistemului de protecție, motorul va funcționa într-un regim dezechilibrat (și nesimetric pentru curenții absorbiți). Există și posibilitatea funcționării motorului asincron trifazat cu înfășurarea rotorică dezechilibrată electric [D8], [F5], [G5], [R8]. Dezechilibrul electric al rotorului poate fi produs de întreruperea unei faze a rotorului (în cazul motoarelor cu rotor bobinat), respectiv de întreruperea unor bare ale coliviei rotorului (în cazul motoarelor cu rotorul în colivie). Rezultă dezechilibre în circuitul rotoric; la limită, circuitul rotoric poate ajunge să fie monofazat.

În sfârșit, o a treia situație care se poate întâlni este când sistemul de tensiuni de alimentare este nesimetric iar motorul este un receptor dezechilibrat [F5], [G5], [N4].

Dintre toate situațiile descrise mai sus, de o mare importanță sunt cazurile în care se întrerupe o fază, deci când motorul funcționează cu o fază întreruptă (respectiv, funcționează în două faze). Dacă protecția motorului nu acționează corespunzător, se poate ajunge la deteriorarea motorului respectiv ("arderea" motorului). Practica exploataării industriale ne demonstrează că acest fenomen este des întâlnit și deci se impune studierea lui și introducerea unor metode de protecție antibifazică mai eficiente.

## **4.2. Funcționarea motoarelor asincrone trifazate cu o fază întreruptă**

Motorul asincron trifazat poate ajunge să funcționeze cu o fază întreruptă fie ca urmare a întreruperii unui fir de alimentare al rețelei, fie ca urmare a întreruperii unei faze în interiorul mașinii. Motorul trece în regim monofazat de funcționare, cu unele consecințe care vor fi descrise în continuare.

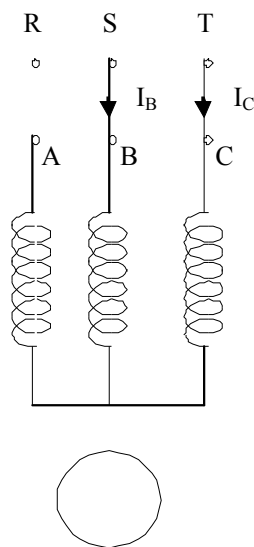
În primul rând, evidențiem faptul că efectul întreruperii unei faze este diferit, după cum întreruperea se produce când motorul este în repaus sau în mișcare. Dacă motorul este în repaus și are o fază statorică întreruptă, atunci la conectarea la rețea motorul nu pornește. Dacă întreruperea fazei se produce când motorul funcționează normal, atunci motorul continuă să funcționeze, deoarece dezvoltă cuplu, dar caracteristicile mașinii sunt modificate (de exemplu, factorul de putere scade).

Deși fenomenele principale sunt același, totuși există diferite particularități în funcție de tipul conexiunii înfășurării statorului.

În continuare, vom considera pe rând motoare cu statorul conectat în stea cu nulul izolat și respectiv motoare cu statorul conectat în triunghi.

#### 4.2.1. Întreruperea unei faze pentru un motor cu înfășurarea statorică conectată în stea cu nulul izolat.

Schema motorului pentru acest caz este reprezentată în figura 4.1.



**Fig.4.1.** Motor asincron cu conexiunea statorului în stea, un conductor de alimentare fiind întrerupt

Analiza acestui caz este făcută detaliat în tratatele de mașini electrice, utilizând teoria coordonatelor simetrice [F5], [G5], [N4], [R8]. Concluziile obținute sunt redate în continuare.

Presupunem că întreruperea fazei A s-a făcut în timpul funcționării normale a motorului. Observăm că în acest caz nu are importanță dacă întreruperea este în afara motorului sau în interiorul lui. Motorul continuă să funcționeze dar în condiții de avarie.

Concluziile care rezultă sunt:

a). Cuplul critic (maxim) și alunecarea critică sunt de două ori mai mici în cazul întreruperii unei faze a statorului față de cazul funcționării normale.

Este util să scoatem în evidență că dacă în regim normal, adică înainte de întreruperea unei faze a statorului, motorul a funcționat la sarcină nominală, iar cuplul maxim al motorului este puțin peste dublul cuplului nominal, atunci după întreruperea unei faze a statorului, motorul va funcționa

aproape de cuplul maxim și respectiv de alunecarea critică. Cu alte cuvinte, din punctul de vedere al acționării electrice a sarcinii mecanice utile, situația poate deveni o situație “la limită”.

b). Curentul absorbit din rețea prin fazele sănătoase (fazele B și C) va fi mai mare de circa 2 ori decât în cazul funcționării normale, în regim trifazat simetric. Aceasta conduce la încălzirea accentuată în timp, în cazul nefuncționării corecte a protecției motorului, a bobinajului statorului și la posibila deteriorare termică a lui.

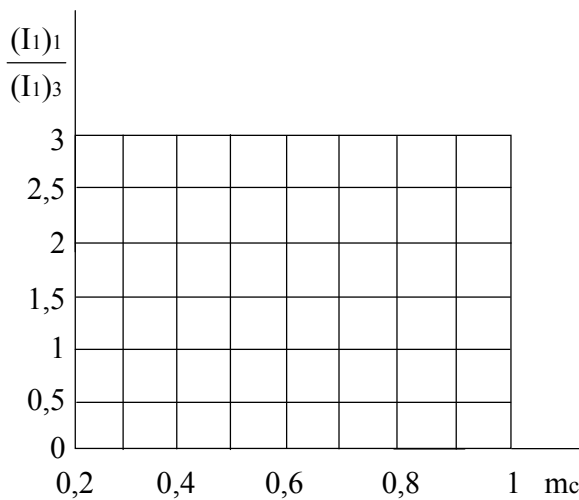
Creșterea curentului, menționată mai sus, depinde de doi parametri: raportul dintre cuplul dezvoltat de motor (impus de cuplul mecanic util) și cuplul nominal ( $m_c$ ) și de raportul dintre cuplul critic și cel nominal, la tensiune nominală și frecvență nominală ( $b_n$ ). [F5].

Mai exact, avem relațiile de definiție:

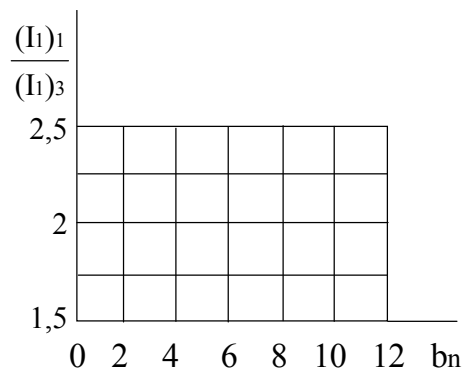
$$m_c = \frac{M}{M_n} \quad (4.1)$$

$$b_n = \frac{M_k}{M_n} \quad (\text{pentru } U=U_n, f=f_n) \quad (4.2)$$

Creșterea curenților în situația funcționării cu o fază întreruptă față de situația funcționării normale în regim trifazat este ilustrată sugestiv în nomogramele prezentate în figurile 4.2. și 4.3.



**Fig.4.2.** Variația raportului  $(I_1)_1/(I_1)_3$  funcție de  $m_c$ ,  
pentru  $b_n=2$ .



**Fig.4.3.** Variația raportului  $(I_1)_1/(I_1)_3$   
funcție de  $b_n$ , pentru  $m_c=1$ .

Am utilizat următoarele notații:

$(I_1)_1$ = curentul absorbit din rețea la funcționarea cu o fază întreruptă (regim monofazat).

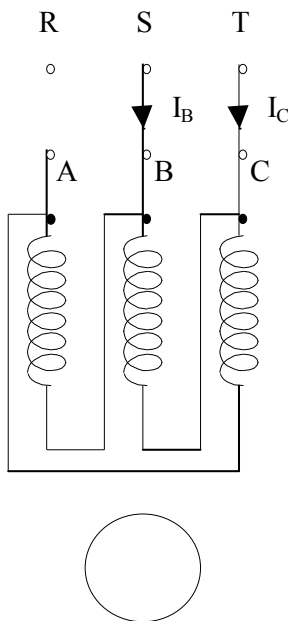
$(I_1)_3$ = curentul absorbit din rețea la funcționarea normală în regim trifazat simetric.

Din figura 4.2. rezultă că la cupluri mai mari decât  $0,47 M_n$ , curentul absorbit din rețea este totdeauna mai mare în cazul motorului funcționând cu o fază întreruptă.

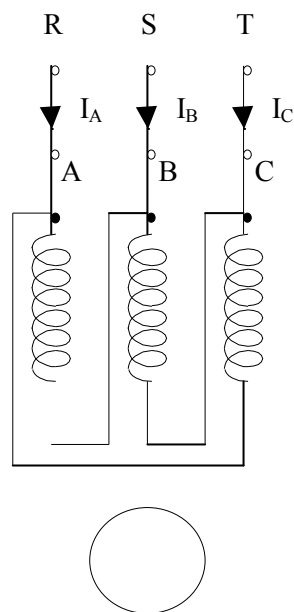
c). Curenții de linie, absorbiți de motor din rețea formează un sistem trifazat nesimetric. Mai exact, în cazul de față, avem un sistem accentuat nesimetric, corespunzând funcționării monofazate (a se vedea terminologia introdusă în capitolul 3.).

#### 4.2.2. Întreruperea unei faze pentru un motor cu înfășurarea statorică conectată în triunghi.

În acest caz, putem avea două situații, după cum întreruperea se face în exteriorul motorului sau în interiorul motorului (figura 4.4., respectiv figura 4.5.).



**Fig.4.4.** Motor asincron cu conexiunea statorului în triunghi, un conductor de alimentare fiind întrerupt.



**Fig.4.5.** Motor asincron cu conexiunea statorului în triunghi, o fază fiind întreruptă în interiorul motorului.

O analiză asemănătoare făcută acestui caz (respectiv a celor două subcazuri care pot exista) conduce la concluzii asemănătoare, din punctul de vedere al curenților de linie, absorbiți de statorul motorului [F5], [G5], [R8].

În subcazul arătat în figura 4.4., curentul absorbit  $I_B = I_C$  crește de circa 2 ori iar sistemul trifazat al curenților de linie este accentuat nesimetric, corespunzător funcționării monofazate. Avem deci o situație asemănătoare cu cea anterioară, de la legarea în stea.

În subcazul arătat în figura 4.5., curenții  $I_A$  și  $I_B$  se modifică relativ puțin dar curentul  $I_C$  crește de aproximativ 1,73 ori în situația de avarie. Din nou, apare o nesimetrie a curenților de linie.



### 4.3. Realizarea protecției antibifazice.

Protecția antibifazică este realizată în mod normal de relele termice, care există în orice schemă de acționare cu un motor asincron trifazat. La o alegere și o reglare corespunzătoare a acestor rele termice, se poate asigura teoretic protecția antibifazică a motorului respectiv.

Practica demonstrează că în multe cazuri, din diverse motive, acest rol de protecție al releelor termice nu se realizează corespunzător și în consecință se ajunge la deteriorarea (arderea) bobinajului motoarelor.

Din acest motiv, s-au conceput și realizat în timp diverse metode de protecție antibifazică. [F3], [M1], [P4], [P14], [P26], [R12], [R14], [R15], [R16], [R19].

Ele funcționează pe baza următoarelor principii:

1. Sesizarea deplasării neutrului.
2. Sesizarea apariției unui sistem nesimetric, utilizând filtre de componente homopolare și/sau componente inverse, sau într-un mod echivalent
3. Sesizarea încălzirii suplimentare a motorului cu ajutorul unor termistoare introduse în interiorul motorului.

În țara noastră s-au elaborat, în timp, diverse dispozitive pentru protecția antibifazică a motoarelor asincrone trifazate. La Oficiul de Stat pentru Invenții și Mărci pot fi consultate descrierile unor invenții în acest sens. Ele sunt bazate pe primele două principii arătate mai înainte și fiecare din ele au din punct de vedere practic o serie de avantaje, dar și unele dejavantaje specifice. Fără a intra în amănunte, menționăm aceste realizări:

- Dispozitiv de protecție pentru electromotoare (titular Grupul de întreprinderi de utilaje și construcții București, 1971).
- Releu de protecție pentru motoare electrice trifazate (titular Institutul de cercetări și proiectări electrotehnice București, 1971).
- Releu de protecție antibifazică (titular Institutul de cercetări și proiectări electrotehnice București, 1978).
- Dispozitiv de deconectare a electromotoarelor trifazate la mersul în două faze (titular Întreprinderea de spirt și drojdie București, 1987).

Mai recent, după 1990, au fost proiectate și realizate în țară următoarele dispozitive de protecție antibifazică:

- Dispozitiv de sesizare a tensiunii trifazate (**DSTT**). Acest dispozitiv e realizat la **RENEL-GSCI** (Grupul de Studii, Cercetări și Inginerie) București. Dispozitivul sesizează

tensiunea de dezechilibru care apare între nula rețelei și un nul artificial în cazul dispariției unei faze. El este aplicat la centrala electrică de la Clopotiva (județul Hunedoara).

- Releu electronic pentru protecția motoarelor electrice trifazate **RE –02-MS**. Acest releu este realizat de firma EE Tim (din Timișoara) și pe lângă protecția antibifazică mai realizează și protecția la suprasarcini îndelungate (deci realizează și funcția unui releu termic).

Dintre realizările recente, pe plan mondial, menționăm pe cele ale firmelor ABB și Telemecanique (Groupe Schneider).

Releul de protecție SPAM 150 C al firmei ABB realizează protecția motoarelor electrice trifazate pentru toate situațiile de avarie care pot interveni în timpul funcționării. Cu alte cuvinte, releul realizează protecția multiplă a motoarelor electrice, indicând de asemenea o serie de date privind funcționarea, cu afișare numerică. El este realizat cu microprocesor și are o construcție versatilă, pentru selectarea ușoară a diverselor aplicații.

Releul de protecție multifuncțional LT8 al firmei Telemecanique asigură protecția motoarelor în cazul supraîncălzirii termice, în cazul nesimetriei la alimentare sau a absenței unei faze, în cazul defectelor de izolație și în cazul pornirii grele sau a rotorului blocat. Releul realizează funcția de autocontrol în permanență, garatând astfel un înalt grad de securitate al motorului protejat. Adăugarea unui modul de vizualizare la distanță permite transmiterea tuturor parametrilor de exploatare la un post de supraveghere.

Ultimele cercetări în domeniu preconizează combinarea funcției de protecție cu cea de monitorizare a motorului respectiv [R2], [S12]. Se urmărește chiar obținerea de informații euristice despre defectele incipiente. În acest scop se utilizează rețele neuronale [G8], [G9], [K4]. Este evident că aplicarea unor astfel de metode complexe se justifică în practică în cazul motoarelor de mare putere, utilizate în acționări speciale, care necesită un înalt grad de fiabilitate în exploatare.

#### **4.4. Concepția, proiectarea și realizarea unui dispozitiv de protecție antibifazică funcționând pe baza unui principiu nou.**

Dispozitivul de protecție antibifazică (**DPAB**) are la bază constatarea făcută în capitolul 3 că tensiunea de ieșire dintr-o punte trifazată de diode nu are o armonică de 100Hz atunci când puntea

este alimentată simetric și conține o armonică importantă de 100Hz deîndată ce puntea trece în regim monofazat.

Schema bloc a dispozitivului de protecție antibifazică [P26], [R16], [R19] este prezentată în figura 4.6.

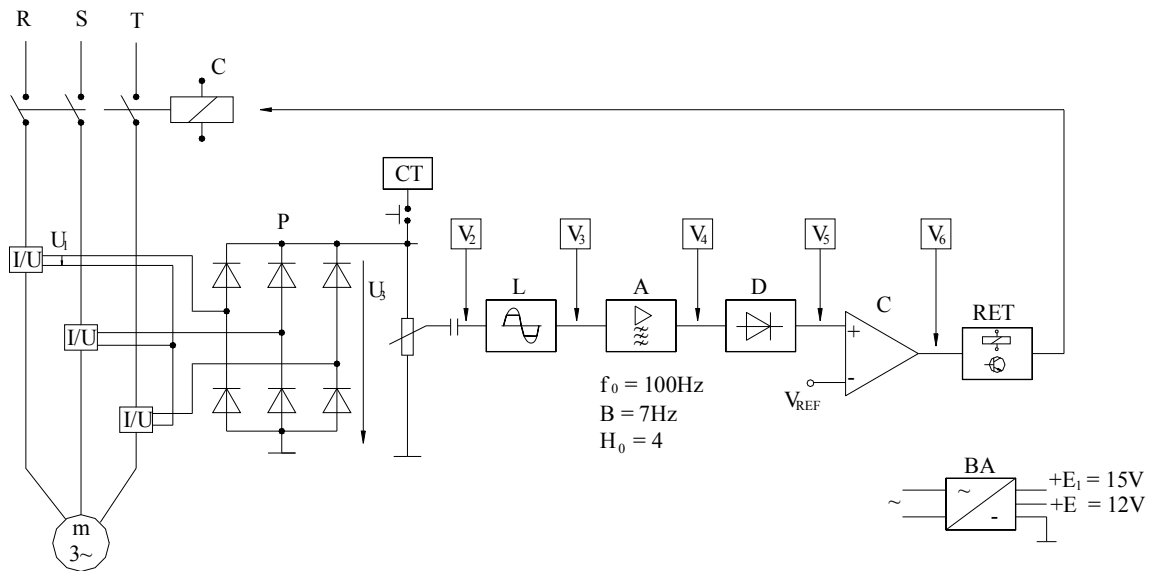


Fig.4.6. Schema bloc a dispozitivului de protecție antibifazică.

Elementele din schema bloc au următoarele semnificații:

I / U	– traductoare curent / tensiune	p	– punte trifazată.
L	– bloc de limitare	A	– amplificator selectiv
D	– bloc de detecție	C	– comparator cu histererezis
RET	– relee electronic cu temporizare	CT	– circuit de testare
BA	– bloc de alimentare	C	– contactor

La funcționarea normală a motorului asincron trifazat, tensiunea de ieșire a punții p conține armonica fundamentală cu frecvența  $6f_R = 300\text{Hz}$  (unde  $f_R$  este frecvența rețelei de alimentare,  $f_R=50\text{Hz}$ ). La întreruperea unei faze, tensiunea de ieșire a punții are armonica fundamentală cu frecvența  $2f_R = 100\text{Hz}$ . Această armonică este amplificată de amplificatorul selectiv, detectată și aplicată comparatorului, care prin intermediul unui relee electronic provoacă declanșarea contactorului C, determinând decuplarea motorului.

Traductoarele I / U sunt de concepție originală, cu reacție și s-au dimensionat astfel încât să asigure o caracteristică de transfer aproximativ liniară (miezurile lor magnetice să nu se satureze nici

în regimul de pornire al motorului asincron). S-a adoptat inițial tensiunea de ieșire a convertoarelor I / U în regimul de defect  $U_{2D}=3\dots6V$ .

Amplificatorul selectiv este de tipul trece banda, cu amplificarea la frecvența centrală  $H_0=4$ .

S-a adoptat o schemă de filtru activ de ordinul II, cu reacții multiple, de tipul Rauch. Pentru realizarea amplificatorului selectiv s-a ales circuitul integrat  $\beta M 3900$  (4 x Norton). Pentru filtru se folosesc 2 amplificatoare Norton, celelalte două fiind folosite la realizarea etajului comparator de tensiune. Filtrul realizează o foarte bună atenuare în banda de tăiere (peste 40 dB / decadă).

Etajul comparator de tensiune realizează un interval de siguranță suplimentar la zgomot.

Releul electronic acționează cu o mică temporizare ( $T < 1s$ ) pentru a preveni acționarea falsă a protecției, la regimurile tranzitorii ale motorului (pornire, șocuri de sarcină, etc.). În acest scop s-a realizat un circuit de temporizare pentru releul electric.

Circuitul de testare are două funcții: de a permite acordarea în modul cel mai simplu a filtrului activ pe frecvența centrală egală cu dublul frecvenței de rețea și de a permite testarea periodică a bunei funcționări a dispozitivului de protecție antibifazică, la utilizator.

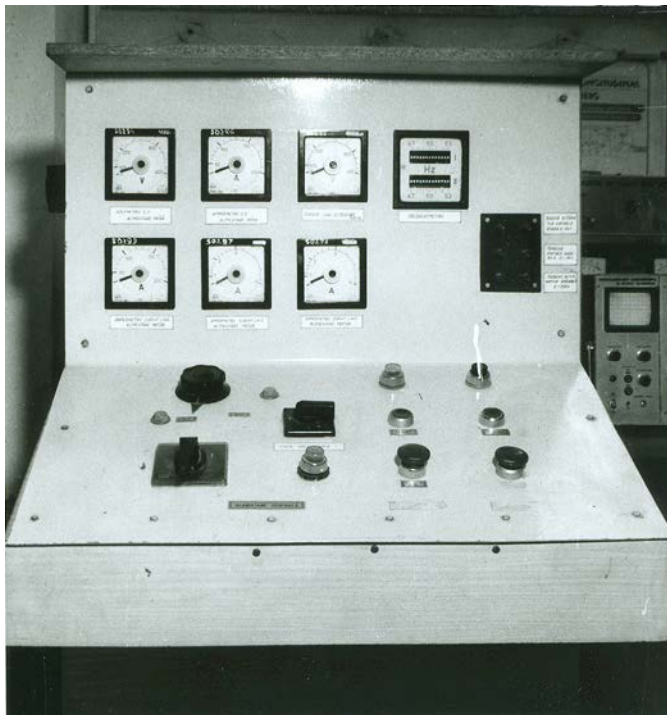
Dispozitivul de protecție antibifazică se realizează în trei variante constructive: A, B și C. Varianta A are 8 subvariante constructive iar varianta B are 3 subvariante constructive. Dispozitivul de protecție antibifazică se alege funcție de puterea motorului protejat în varianta și subvarianta corespunzătoare. Toate variantele constructive (A, B, C) ale dispozitivului de protecție au o parte electronică identică și ele diferă numai prin elementele de conectare la circuitele de forță și de comandă ale motorului (traductoare de curent și releu de ieșire). Variantele A și B au traductoarele de curent conectate direct în circuitul de forță al motorului protejat. Aceste traductoare sunt constructiv diferite prin dimensiunile miezului magnetic. Subvariantele diferă între ele numai prin numărul de spire al înfășurării de curent. Varianta C folosește un traductor de curent având înfășurarea de curent dimensionată la 5A și se conectează la circuitul de forță prin intermediul unor transformatoare de curent având  $I_{1n} \approx I_n$  motor și  $I_{2n} = 5A$ .

Dispozitivul de protecție antibifazică (**DPAB**) a fost brevetat, brevetul de invenție având numărul 87118 [R16].

S-a realizat un model experimental care a fost testat pe standul pentru încercarea motoarelor electrice, stand care a fost construit prin autodotare în laboratorul de electrotehnică [R18]. Standul este prevăzut cu o frână cu curenți turbionari, proiectată și construită de asemenea în laboratorul de electrotehnică [R17]. Prin încărcarea motorului cu diverse cupluri de sarcină s-a putut testa

dispozitivul de protecție antibifazică în diverse regimuri de funcționare ale motorului protejat. Funcționarea dispozitivului de protecție a fost corespunzătoare.

În figura 4.7. se prezintă standul de laborator utilizat pentru testarea dispozitivului de protecție antibifazică.



**Fig.4.7.** Stand de laborator utilizat pentru testarea dispozitivului de protecție antibifazică la diverse regimuri de funcționare ale motorului protejat.

Proiectarea dispozitivului de protecție antibifazică s-a făcut în cadrul unui contract de cercetare- proiectare încheiat cu întreprinderea S.C. "RELEE" S.A. Mediaș [R19]. Dispozitivul de protecție antibifazică a fost omologat la S.C."RELEE" S.A. Mediaș și asimilat în producția de serie, existând posibilitatea producerii lui, funcție de cerințele beneficiarilor. După o perioadă de stagnare datorată condițiilor grele cauzate de restructurare și tranziția la economia de piață, există în momentul de față o preocupare susținută la nivelul conducerii întreprinderii pentru promovarea acestui dispozitiv de protecție antibifazică. (**DPAB**). Astfel, în cursul anului 1998 s-a realizat reproiectarea și modernizarea acestui produs, însoțită de îmbunătățirea tehnologiei de construcție.

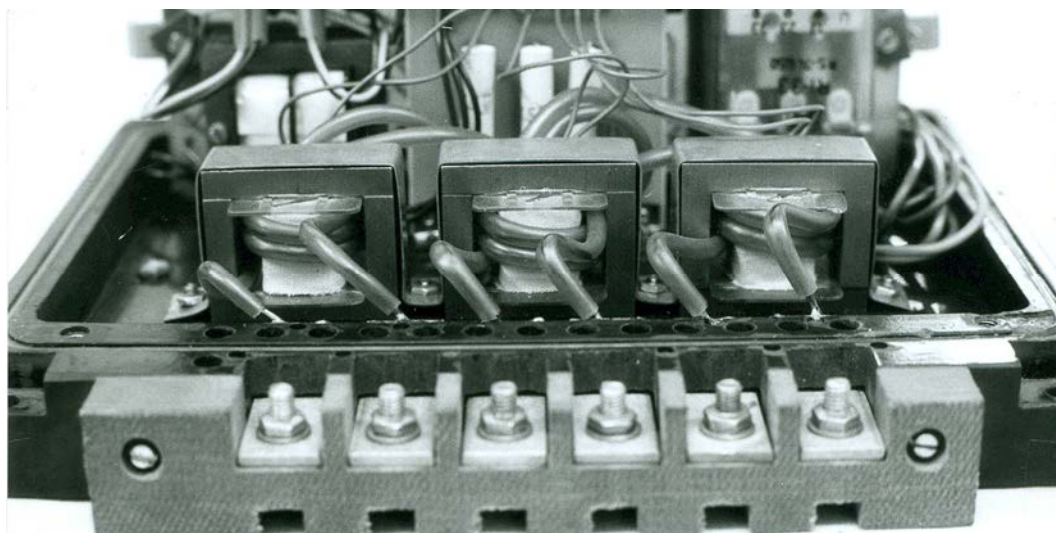
În figura 4.8. se prezintă dispozitivul de protecție antibifazică (**DPAB**) construit la firma S.C. "RELEE" S.A. Mediaș.



**Fig.4.8.** Dispozitiv de protecție antibifazică.

Legat de protecția motoarelor asincrone trifazate s-a conceput și s-a brevetat un cuplaj-frână electromagnetic. Brevetul de invenție are numărul 108.833 [R20]. Cuplajul-frână electromagnetic realizează o serie de funcții în acționarea electrică, între care și cea de protecție a motorului.

Traductoarele de curent sunt în prezent în curs de brevetare. În figura 4.9. sunt prezentate traductoarele de curent folosite la realizarea dispozitivului de protecție antibifazică.



**Fig.4.9.** Traductoare de curent utilizate în construcția dispozitivului de protecție antibifazică.

## 4.5. Concluzii și observații

În cadrul capitolului 4 s-a făcut la început o prezentare sintetică a regimurilor nesimetrice și / sau dezechilibrate de funcționare ale motoarelor asincrone trifazate. S-a insistat asupra funcționării cu o fază întreruptă, cauza des întâlnită a “arderii” multor motoare în acționările industriale. S-a arătat că indiferent de conexiunea din stator, curenții de linie cresc în general de circa 2 ori și formează un sistem trifazat nesimetric.

În continuare s-au prezentat unele realizări la nivelul țării noastre și pe plan mondial pe linia protecției antibifazice.

Apoi s-a descris concepția, proiectarea și realizarea unui dispozitiv original de protecție antibifazică a motoarelor asincrone trifazate. Acest dispozitiv a fost asimilat în fabricație la S.C. “RELEE” S.A. Mediaș și introdus ca protecție suplimentară în schemele clasice de acționări poate conduce la realizarea de importante economii bănești, prin evitarea arderii motoarelor electrice și deci a cheltuielilor cu rebobinarea lor.

Comparativ cu soluțiile existente, dispozitivul realizat se caracterizează prin simplitate constructivă, fiabilitate ridicată în exploatare și preț de cost redus. Se poate utiliza pentru protecția oricărui motor asincron trifazat (indiferent de conexiunea statorului, în stea sau triunghi) și deoarece analizează curenții absorbiți, el sesizează defectele atât în amonte cât și în aval față de punctul de conectare în circuit.

În cadrul prezentului capitol, autorul a adus o serie de contribuții originale, care vor fi enumerate în continuare:

- Propun un dispozitiv original de protecție antibifazică a motoarelor asincrone trifazate (brevetat, brevet de invenție cu numărul 87118). Acesta funcționează pe baza sesizării nesimetriei sistemului de curenți de linie absorbiți din rețea de motorul protejat. Mai exact, nesimetria este sesizată prin intermediul coeficientului global de nesimetrie de ordinul 1 (a se vedea teoria expusă în capitolul 1).
- Realizez un model experimental, pe care îl testez pe standul construit în laboratorul de electrotehnică prin autototare.
- Realizez proiectarea dispozitivului de protecție antibifazică în cadrul unui contract de cercetare-proiectare cu S.C. “RELEE” S.A. Mediaș. Pe baza acestui proiect, produsul este omologat și asimilat în fabricație la această întreprindere.
- Propun un cuplaj-frână electromagnetic pentru acționările cu motoare electrice asincrone, care are între altele și rolul de protecție a motorului respectiv (brevetat, brevet de invenție cu numărul 108833).
- Propun brevetarea traductoarelor de curent utilizate în construcția dispozitivelor de protecție antibifazică. Aceste traductoare sunt în curs de brevetare.

### Situația actuală în domeniul protecției motoarelor asincrone.

În continuare se va prezenta pe scurt situația actuală (la nivelul anului 2011) în domeniul protecției motoarelor asincrone. Protecția include și protecția împotriva funcționării cu o fază întreruptă. Există realizări remarcabile, aparținând unor firme de renume care asigură protecția motoarelor asincrone la performanțe superioare. Se vor prezenta pe scurt realizările respective. Cititorul interesat de amănunte este îndrumat spre o cercetare detaliată folosind internetul și literatura tehnică de specialitate.

1. Sistemul de rele electronice ZEV pentru protecția motoarelor electrice. Producătorul este firma Moeller Electric. Sistemul cu rele electronice ZEV realizează protecția motoarelor atât prin măsurarea indirectă a temperaturii prin intermediul curentului, cât și prin măsurarea directă a temperaturii în motor cu ajutorul termistoarelor. Indirect se realizează supravegherea motorului la suprasarcină, căderea fazelor și curent asimetric. Suplimentar, releul protejează motorul împotriva defectelor de punere la pământ.

2. Releul diferențial GFI 025 produs de firma Ganz în colaborare cu o firmă de renume vest europeană. Este un dispozitiv de protecție la curenți de defect. Dispozitivele GFI pot fi cu 2 sau cu 4 poli. Aceste dispozitive funcționează pe principiu magnetic, nu electric. Dispozitivele GFI (cu 2 sau 4 poli) nu conțin dispozitive de protecție incluse. Pentru asigurarea protecției la suprasarcină sau scurtcircuit se va interveni obligatoriu, prin amplasarea în amonte, a unui miniîntrerupător automat de curent (siguranță automată) de curenți nominali adecvați.

3. Releul electronic de suprasarcină Siemens 3RB10/20. Acest releu oferă și protecție la întreruperea unei faze. Releele electronice de suprasarcină Siemens 3RB10/20 prezintă resetare manuală sau automată, setări de curent ajustabile și compensare ambientală. Releul electronic de suprasarcină Siemens 3RB12/22 oferă unele facilități suplimentare. Releul de suprasarcină SIRIUS 3RB2016-1RBO detectează direct temperatura bobinajului motorului printr-un senzor cu termistor.

4. Releul electronic supracurent LR97D este fabricat de către firma Schneider Electric. El este conceput pentru a proteja pe deplin motoarele electrice și pentru a completa o serie de rele de protecție existente. Motoarele protejate de acest releu acționează de obicei următoarele sarcini mecanice: transportoare, ventilatoare, pompe, centrifuge, prese, ascensoare, mașini-unelte.

5. Releul de protecție a motoarelor SEL-710 este realizat la Cluj de către firma EnergoBit.

6. Releul electronic RE09AF este fabricat la Timișoara de către firma EE TEST. Releul electronic RE09AF este destinat supravegherii bunei funcționări și protecției motoarelor electrice trifazate. Acesta protejează motoarele pentru o gamă largă de evenimente nedorite, permite detectarea și localizarea defecțiunilor în vederea înlăturării rapide a acestora. La cerere releul RE09AF poate supraveghea și motoare cu doar două transformatoare de curent. Maximum 31 de



relee RE09AF pot fi legate într-o rețea multipunct RS-485 pentru a fi monitorizate de la un calculator central (cu repetoare de magistrală, numărul releelor poate fi crescut).

Releul este prezentat în figura următoare (fig.4.10).



Figura 4.10. Releu electronic RE09AF

Releul RE09AF protejează motorul la:

1. Suprasarcină, calculând integrala din  $(I_{max} = 1,1I_r)^2 dt$  și având memorie termică;
2. Subsarcină (mers în gol): putem fixa un prag de subcurent cuprins în intervalul  $(20 - 90)\% \times I_r$ ;
3. Blocaj rotor (limitare de cuplu), cu un prag reglabil  $= (2-3) \times I_r$ ;
4. Asimetrie de curenți, cu un prag reglabil  $(30-75)\%$ ;
5. Lipsă fază;
6. Micșorarea rezistenței de izolație sub  $500 \text{ K}\Omega$  (motorul nu poate fi pornit);
7. Demaraj prea lung (depășirea timpului de pornire). Releul poate proteja și motoare cu timpi lungi de pornire prin reglajul  $t_d = [2-10]s$ .

După cum spuneam la începutul paginii anterioare, considerațiile de mai sus se vor a fi o prezentare foarte succintă (și evident neexhaustivă) a situației actuale pe plan mondial și în țara noastră a protecției motoarelor electrice asincrone, în particular a protecției motoarelor la întreruperea unei faze. Dar, o primă imagine se poate forma și se poate deduce că progresele tehnice în acest domeniu sunt foarte mari în comparație cu situația din urmă cu 10-15 ani.

## BIBLIOGRAFIE

- [A1] Abuelma'atti, M.T. - *Simple method for calculating Fourier coefficients of experimentally obtained waveforms*; IEE Proc. - Sci.Meas.Technol., Vol.141, No.3, May 1994, pp.177-178
- [A2] Akherraz, M. - *Pspice - Assisted Dynamic Modeling and Simulation of Induction Motor Drives*; 1997 IEEE International Electric Machines and Drives Conference Record, May 18-21, 1997, pp. MB1, 8.1-8.3
- [A3] Akpinar, K., Pillay, P., Richards, G.G. - *Induction motor drive behavior during unbalanced faults*; Electric Power Systems Research, Vol.36, No.2, February 1996, pp. 131-137
- [A4] Albu, T., Ion, I.D. - *Itinerar în algebra superioară*, Editura All, București, 1997
- [A5] Amin, B. - *Contribution to iron-loss evaluation in electrical machines*; *European Transactions on Electrical Power Engineering*, Vol.5, No.5, Sep.-Oct. 1995, pp.325-332
- [A6] Amin, B. - *Slot - Based Equations and General Equivalent Circuit in Induction Motor-Analysis and Control*; ETEP, Vol.5, No.6, November/December 1995, pp.375-382
- [A7] Arkhangelskii, N.L., Kurnyshev, B.S., Zakharov, P.A. - *A tensor approach to the electromagnetic analysis of an induction motor*; *Electrical Technology*, Selected Translations from Elektrichestvo, No.1, 1995, pp.75-83
- [B1] Benamrouche, N., Haddad, S., Bousbaine, A., Low, W.F.- *Determination of iron and stray load losses in induction motors using a thermometric method*; *Electric Machines and Power Systems*, Vol.26, No.1, January 1998, pp.3-12
- [B2] Benes, J. - *Sisteme cibernetice cu organizare automată*, Editura Tehnică, București, 1970
- [B3] Bercovici, M., Arie, A., Tudose, M. - *Aspecte privind aplicarea teoriei componentelor simetrice în analiza regimurilor nesimetrice ale rețelelor electrice*; *Buletinul Institutului Politehnic București*, tomul XXIX, numărul 4, iulie-august 1967, pag.101-131
- [B4] Berndt, M.M., Schmitz, N.L. - *Derating of Polyphase Induction Motors Operated with Unbalanced Line Voltages*; *IEEE Trans. Power App. Syst.*, February 1963, pp.680-686

- [B5] Blasko, V., Kaura, V. - *A new mathematical model and control of a three-phase AC-DC voltage source converter*; *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol.12, No.1, jan.1997, pp.116-123
- [B6] Bogoevici, N., Toader, D. - *Utilizarea fazorilor de nesimetrie în analiza rețelelor electrice trifazate nesimetrice și dezechilibrate*; *Energetica*, Vol.41., nr.4-B, 1993, pag.29-34
- [B7] Bonacina, G., Salvetti, M., Zola, M. - *Structural testing of electromechanical equipment - Mathematical modeling and experimentation*; *A.E.I. Automazione Energia Informazione*, Vol.85, No.3, march 1998
- [B8] Bose, B.K., Patel, N.R. - *Quasi-fuzzy estimation of stator resistance of induction motor*, *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol.13, no.3, May 1998, pp.401-409
- [B9] Boys, J.T. - *Theoretical Spectra for Narrow-Band Random PWM Waveforms*; *IEE Proceedings - B, Electric Power Applications*, Vol.140, No.6, November 1993
- [B10] Brice, C.W., Dougal, R.A., Hudgins, J.K. - *Review of technologies for current-limiting low-voltage circuit breakers*; *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol.32, no.5, September-October 1996, pp.1005-1010
- [B11] Brittain, J.E.- *Charles L.G. Fortescue and the method of symmetrical components*, *Proceeding of the IEEE*, Vol.86, no.5, May 1998, pp.1020-1025
- [B12] Bromilow, M. - *Computer algebra and applied mathematics*; *IEE Review*, Vol.43, No.5, sept.1997, pp.259-267
- [B13] Busch, R. - *About the concept of consumed life of electrical machine windings and its application*, *European Transaction on Electrical Power*, Vol.8, no.2, March-April 1998, pp.105-110
- [C1] Caramia, P., Carpinelli, G., Gagliari, F., Verde, P. - *Analysis and Design of a Combined System of Shunt Passive and Active Filters*; *European Transactions on Electrical Power Engineering*, Vol.4, No.2, Mar.-Apr. 1994
- [C2] Castello, R., Montecchi, F., Rezzi, F., Baschiroto, A. - *Low - voltage analog filters*; *IEEE Transactions on Circuits and Systems I, Fundamental Theory and Applications*, Vol.42, No.11, November 1995, pp.827-840
- [C3] Cavallini, A., Loggini, M., Montanari, G.C. - *Comparison of Approximate Methods for Estimate Harmonic Currents Injected by AC/DC Converters*; *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol.41, No.2, april 1994, pp.256-262

- [C4] Cerovsky, Z., Seinsch, H.O. - *Time Dependence and Symmetrical Properties of Rotor - Currents of Induction Machines Fed from U-Converters with Block - Waveform*; Archiv fur Elektrotechnik, Vol.77, No.2, January 1994
- [C5] Cherry, J.A., Snelgrove, W.M. - *On the characterization and reduction of distortion in bandpass filters*, IEEE Transactions on Circuits and System I, Vol.45, no.5, May 1998, pp.523-537
- [C6] Ciupa, R.V., Croicu, A.M. - *The Optimization of an Electromagnet by the Gradient Method*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 36, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1995, pag. 75-77
- [C7] Ciupa, R.V. - *Regimuri tranzitorii în sisteme electrice*, Editura Universității Tehnice Cluj-Napoca, 1996
- [C8] Ciupa, R.V., Croicu, A.M. - *Optimization in Electrotechnics through the Descending Methods. Examples; Proceedings of the 1<sup>st</sup> International Workshop CAD in Electromagnetism and Electrical Circuits*, CADEMEC 97, 5-7 August 1997, Cluj-Napoca, Romania, Volume, pag. 102-107.
- [C9] Ciupa, R.V. , Topa, V. - *The Theory of Electric Circuits*, Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 1998
- [C10] Ciupa, R.V. - *Regimuri tranzitorii în sisteme electrice*, ediția a-II-a, Editura Universității Tehnice Cluj-Napoca, 1998
- [C11] Clarke, E. - *Analiza circuitelor sistemelor electroenergetice* (traducere selectivă din limba engleză -S.U.A.), Editura Tehnică, București, 1973
- [C12] Coloși, T., Feștilă, R., Nascu, I., Raica, P. - *Modelling and numerical simulation alternative of induction motors in d-q axes*; Proceedings, First International Symposium on Advanced Electromechanical Motion Control Systems ELECTROMOTION'95, Cluj-Napoca, 25-26 May 1995, Volume, pp.116-119
- [C13] Cristaldi, L., Ferrero, A. - *Mathematical foundations of the instantaneous power concepts: An algebraic approach*; European Transaction on Electrical Power, Vol.6, No.5, sep.-oct. 1996, pp.305-309
- [C14] Czarnecki, L.S., Tan, O.T. - *Evaluation and Reduction of Harmonic Distortion Caused by Solid State Voltage Controllers of Induction Motors*; IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol.9, No.3, September 1994, pp.528-534

- [C15] Czarnecki, L.S. - *Power theory of electrical circuits with quasi-periodic waveforms of voltages and currents*; European Transaction on Electrical Power, Vol.6, No.5, sep.-oct. 1996, pp.321-328
- [C16] Czarnecki, L.S. - *Budeanu and Fryze: Two frameworks for interpreting power properties of circuits with nonsinusoidal voltages and currents*; Electrical Engineering, Vol.80, No.6, december 1997, pp.359-368
- [D1] De Jong, H.C.J. - *Skew Leakage in Induction Machines*; European Transactions on Electrical Power Engineering, Vol.4, No.1, January-February 1994
- [D2] De Jong, H.C.J. - *Scale aspects of electrical machine inductances*; *International Journal of Electrical Engineering Education*, Vol.32, No.2, April 1995, pp.179-185
- [D3] Dems, M., Komez, K., Wiak, S. - *Computation of rotor winding power losses in squirrel-cage induction motor*; COMPEL, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol.14, No.4, December 1995, pp.89-93
- [D4] Dessouky, Y.G., Williams, B.W., Fletcher, J.E. - *Cooling enhancement of electric motors*, IEE Proceedings Electric Power Applications, Vol.145, No.1, January 1998, pp.57-60
- [D5] De Weerd, R., Hameyer, K., Belmans, R. - *End winding leakage calculation of a squirrel-cage induction motor for different load conditions*; COMPEL, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol.14, No.4, December 1995, pp.85-89
- [D6] Ding, K.Q., Zhou, Z.G., Liu, C.T. - *Latin hypercube sampling used in the calculation of the fracture probability*, Reliability Engineering & System Safety, Vol.59, no.2, February 1998, pp.239-242
- [D7] Dogaru, O., Tevy, I., Udriste, C. - *Extrema constrained by a family of curves and local extrema*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.97, no.3, June 1998, pp.605-622
- [D8] Dordea, T. - *Mașini electrice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1970
- [D9] Dragomir, A., Laziun, V. - *Teorie combinatorie. Elemente de combinatorică clasică și generalizată*, Editura Universității din Timișoara, 1974
- [D10] Dragomir, A., Dragomir, P. - *Structuri algebrice*, Editura Facla, Timișoara, 1981

- [D11] Drăgănescu, O.G. - *Încercările mașinilor electrice rotative*, Editura Tehnică, București, 1987
- [D12] Dupre, L.R., Vankeer, R., Melkebeek, J.A.A. - *A computational model for the iron losses in rotating electrical machines*; International Journal of Engineering Science, Vol.36, no.7-8, May-June 1998, pp. 699-710
- [D13] Duric, M., Radojevic, Z., Skokljec, I., Terzija, V. - *A simple algorithm for the symmetrical components relaying and monitoring*; Electrical Engineering, Vol.79, 1996
- [E1] Eldhemy, S.A., Mohamed, A.A., Shokralla, S.S. - *Calculation of additional losses caused by feeding an induction motor from a nonsinusoidal supply*; International Journal of Electrical Engineering Education, Vol.32, No.1, January 1995, pp.51-63
- [E2] El Din, A.S.Z., Lashine, A.E., Shokralla, S.S. - *Improvement of starting characteristic and speed control of three-phase induction motor using microprocesor*; Electric Machines and Power Systems, Vol.26, No.3, April 1998, pp.265-276
- [E3] Emanuel, A.E. - *The oscillatory nature of the power in single - and polyphase circuits*, European Transactions on Electrical Power, Vol.6, No.5, Sep.-Oct. 1996, 315-320
- [E4] Enns, M.K. - *Neutral impedances in fault analysis*; IEEE Transactions on Power Systems, Vol.13, no.2, May 1998, pp.274-279
- [F1] Fabre, A., Saaid, O., Wiest, F., Boucheron, C.- *Current controlled bandpass filter based on translinear conveyors*; Electronics Letters, Vol.31, No.20, September 1995, pp.1727-1728
- [F2] Faiz, J., Sharifian, M.B.B. - *Transient behaviour of optimum - designed three-phased squirrel-cage induction motors*; European Transactions on Electrical Power, Vol.7, No.6, Nov.-Dec. 1997, pp. 415-420
- [F3] Farag, S.F., Bartheld, R.G., May, W.E. - *Electronically Enhanced Low Voltage Motor Protection and Control*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.30, No.3, May/June 1994, pp.776-784
- [F4] Fiser, R., Ferkolj, S. - *Magnetic field analysis of induction motor with rotor faults*; COMPEL The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol.17, no.1-2, 1998, pp.206-211
- [F5] Fransua, A., Nicolaide, A., Trifu, G. - *Mașini electrice uzuale. Exploatare și regimuri de funcționare*, Editura Tehnică, București, 1973

- [F6] Fransua, A., Măgureanu, R. - *Mașini și acționări electrice. Elemente de execuție*, Editura Tehnică, București, 1986
- [G1] Gafford, B.N., Duesterhoeft, W.C., Mosher, C.C. - *Heating of Induction Motors on Unbalanced Voltages*, AIEE Transactions Power Applications Systems, June 1959, pp. 282-288
- [G2] Galan, N. - *Considerații privind teoria moderna a mașinii asincrone trifazate*; Electrotehnica, Electronica, Automatica, Electronica, Vol.38, Nr.8, noiembrie 1990, pag.295-299
- [G3] Galan, N. - *Ecuțiile generale ale motorului asincron trifazat aplicate în regimuri nesimetrice*; Electrotehnica, Electronica, Automatica, Electrotehnica, Vol.38, Nr.8, noiembrie 1990, pag.300-305
- [G4] Ghani, S.N. - *Digital Computer Simulation of Three-Phase Induction Machine Dynamics - A Generalized Approach*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.24, No.1, January/February 1988, pp.106-114
- [G5] Gheorghiu, I.S., Fransua, A.S. - *Tratat de mașini electrice, Vol.III, Mașini asincrone*, Editura Academiei R.S.R., București, 1971
- [G6] Glazenko, A.V., Danilevich, Y.B., Karymov, A.A. - *Digital modelling of thermal and mechanical processes in electrical machines*; Electrical Technology, Selected Translations from Elektrichestvo, No.4, 1995, pp.123-134
- [G7] Gluskin, E. - *On the Calculation of Ripple Factor*; ETEP, Vol.5, No.6, November/December 1995, pp.413-414
- [G8] Goode, P.V., Chow, M. - *Using a Neuronal Fuzzy System to Extract Heuristic Knowledge of Incipient Faults in Induction Motors: Part I - Methodology*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.42, No.2, April 1995, pp.131-138
- [G9] Goode, P.V., Chow, M. - *Using a Neuronal / Fuzzy System to Extract Heuristic Knowledge of Incipient Faults in Induction Motors: Part II - Application*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.42, No.2, April 1995, pp.139-146
- [G10] Green, T.C., Taha, M.H., Rahim, A.B.D., Williams, B.W. - *Three-phase step-down reversible AC-DC power converter*; IEEE Transactions on Power Electronics, Vol.12, No.2, March 1997, pp.319-324
- [G11] Grimes, C.A., Grimes, D.M. - *Complex power in circuits with multiple reactive elements*, Electric Machines and Power Systems, Vol.25, No.9, Nov. 1997, pp.955-966

- [G12] Grotzbach, M., Xu, J. - *Line-Side Behaviour of 3-Phase Diode Rectifiers with Reactance Smoothing*; European Transactions on Electrical Power Engineering, Vol.4, No.1, Jan-Feb. 1994
- [H1] Holtz, J. - *The representation of AC machine dynamics by complex signal flow graphs*; IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 42, No. 3, June 1995, pp. 263 - 272
- [H2] Ho, S.L., Fu, W.N. - *Review and future application of finite element methods in induction motors*; Electric Machines and Power Systems, Vol. 26, No. 2, February - March 1998, pp.111 - 126
- [I1] Ionescu, T.G., Coculescu, S., Neagoe, M., Pavel, E. - *Regimul nesimetric generator de consumuri proprii tehnologice suplimentare în rețelele electrice*; Energetica, Vol.XXXVI, Nr.9, septembrie 1988, pag.404 - 411
- [I2] Ionescu, T.G., Golovanov, C., Manolescu, P., Oprea, R. - *Metode de determinare a coeficientului de nesimetrie inversă de tensiune*; Energetica, Vol. XXXVIII, Nr. 8 - 9, august - septembrie 1990, pag. 371 - 376
- [I3] Ion, I.D., Niță, C., Năstăsescu, C. - *Complemente de algebră*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1984
- [J1] Joaquim, M. B. - *A bandpass active filter for Fourier analysis laboratory*; International Journal of Electrical Engineering Education, Vol. 32, No.4, October 1995, pp. 350 - 354
- [K1] Karacal, S.C. - *A novel approach to simulation modeling*, Computers & Industrial Engineering, Vol.34, no.3, July 1998, pp.573-588
- [K2] Kaufmann, A., Précigout, M. - *Elemente de teoria mulțimilor și algebră modernă*, Vol I, Editura Tehnică, București, 1972
- [K3] Kaufmann, A., Précigout, M. - *Elemente de teoria mulțimilor și algebră modernă*, Vol II, Editura Tehnică, București, 1973
- [K4] Keerthipala, W. W. L., Wai, C. T., Huisheng, W. - *Neuronal network based classifier for power system protection*; Electric Power Systems, Vol. 42, No. 2, august 1997, pp. 109 - 114
- [K5] Kellerer, H., Kotov, V., Speranza, M.C., Tuza, Z. - *Semi on-line algorithms for the partition problem*, Operations Research Letters, Vol.21, no.5, December 1997, pp.235-242



- [K6] Kluszczyński, K., Miksiewicz, R. - *Synchronous parasitic torques in asymmetrically fed three - phase squirrel cage motor*; Electric Machines and Power Systems, Vol. 24, No. 1, January - February 1996, pp. 9- 20
- [K7] Knopp, M., Kohle, S. - *Time - varying loads in electric power systems; Power input, equivalent circuit elements, and disturbances*, European Transactions on Electrical Power, Vol. 7, No.1, January - February 1997, pp. 5 - 12
- [K8] Knuth, D.E. - *Tratat de programarea calculatoarelor, vol I - Algoritmi fundamentali*, Editura Tehnică, București, 1974
- [K9] Knuth, D.E. - *Tratat de programarea calculatoarelor, vol II - Sortare și căutare*, Editura Tehnică, București, 1976
- [K10] Knuth, D.E. - *Tratat de programarea calculatoarelor, vol III - Algoritmi seminumerici*, Editura Tehnică, București, 1983
- [L1] Labuntsov, V. A., Daizhun, C. - *Three - phase rectifier with a capacitance filter and an improved waveform for the current drawn from the network*; Electrichestvo, No. 2, 1993
- [L2] Lawrance, W. B. , Mielczarski, W. - *Harmonic Current Reduction in a Three - Phase Diode Bridge Rectifier*; IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 39, No. 6, December 1992, pp. 571 - 576
- [L3] Lawrance, W. , Mielczarski, W., Michalik, G. - *Application of a new scheme for harmonic current reduction in three - phase bridge rectifier systems*; Electric Power Research, Vol. 36, No. 2, February 1996, pp. 123 – 130
- [L4] Lee, C.Y. – *Temperature-based optimal test sequence for determining the equivalent circuit parameters of a three-phase induction motor*, Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol.21, no.4, July 1998, pp.459-466
- [L5] Levi, E., Krzeminski, Z. - *Main Flux - Saturation Modelling in d-q Axis Models of Induction Machines Using Mixed Current - Flux State - Space Models*; ETEP, Vol. 6, No. 3, May - June 1996, pp.207 – 215
- [L6] Lian, J.A. – *Orthogonality criteria for multiscaling functions*, Applied and Computational Harmonic Analysis, Vol.5, no.3, July 1998, pp.277-311
- [L7] Lim, T.J. – *A stochastic regime switching model for the failure process of a repairable system*, Reliability Engineering & System Safety, Vol.59, no.2, February 1998, pp.225-238

- [L8] Lin, B.R., Hoft, R.G. - *Analysis of power converter control using neural network and rule-based methods*; Electric Machines and Power Systems, Vol. 24, No. 7, October - November 1996, pp. 695 – 720
- [L9] Lin, K.P., Lin, M.H., Lin, T.P. – *An advanced computer code for single-tuned harmonic filter design*, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.34, no.4, July-August 1998, pp.640-648
- [L10] Loggini, M., Montanari, G. C., Cavallini, A. - *Generation of Uncharacteristic Harmonics in Electrical Plants with AC/DC Converters*; European Transactions on Electrical Power Engineering, Vol.4, No. 3, May - June 1994
- [M1] Maier, R. - *Protection of Squirrel-Cage Induction Motor Utilizing Instantaneous Power and Phase Information*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.28, No.2, March/April 1992, pp.376-380
- [M2] Man, E., Rizzo, R., Micu, D., Munteanu, D. - *A Simultaneous Treatment of Symmetrization and Power Factor Improvement in Three-Phased Networks*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 36, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1995, pag. 50- 52.
- [M3] Man, E., Pop, E. - *Impedance Adaptation and Negative Resistance Synthesis, using Controlled Sources*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 37, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1996, pag. 21 - 24
- [M4] Man, E. - *Circuite electrice cu surse comandate*, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, 1996
- [M5] Man, E. - *A Generalization of the Maximum Power Transfer Theorem In DC Circuits*; Proceedings of the 1<sup>st</sup> International Workshop CAD in Electromagnetism and Electrical Circuits CADEMEC 97, CLuj-Napoca, 5-7 August 1997, Volume, pp.91-93
- [M6] Man, E., Hintea, S. - *Analiza circuitelor electrice prin modelare cu surse comandate*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 1997
- [M7] Mattavelli, P., Tenti, P. - *Load and line identification in multi-phase systems: A compensation-oriented approach*; European Transaction on Electrical Power, Vol.6, No.6, November-December 1996, pp.373-379
- [M8] Mbamalu, G.A.N., El Hawary, M.E., El Hawary, F. - *Pseudo inverse based probabilistic power flow approach*; Electric Machines and Power Systems, Vol.23, No.2, March-April 1995, pp.107-119

- [M9] Micu, D., Oniga, A. - *Componente simetrice pentru sisteme polifazate*; Conferința Națională de Matematică Aplicată și Mecanică, Cluj-Napoca, 20-23 octombrie 1988
- [M10] Micu, D. - *Basis of Electrotechnics. The theory of electric circuits*, Technical University of Cluj-Napoca, 1993.
- [M11] Micu, D., Rizzo, R., Man, E. - *A Study on Polyphase Machine Fed by Non Symmetrical Voltage System*, Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 36, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1995, pag. 53 - 57
- [M12] Micu, D., Rizzo, R., Man, E. - *Polyphase Machine Fed by Non Symmetrical System. Fault Detection in Case of Bar Breakage in Three-Phase Motors*, Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 36, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1995, pag. 58 - 61
- [M13] Micu, D., Micu, A., Vlad, S. - *A Dissipative Singlephase-Threephase Convertor*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 37, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1996, pag. 57 - 60
- [M14] Mielczarski, W., Lawrance, W.B., Nowaki, R., Holmes, D.G. - *Harmonic Current Reduction in Three-Phase Bridge-Rectifier Circuits Using Controlled Current Injection*; IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.44, No.5, October 1997, pp.604-611
- [M15] Mihalache, M. – *Determinarea parametrilor interni ai motorului asincron utilizând datele de catalog: Electrotehnica, Electronica, Automatica, Electrotehnica*, vol. 34, nr. 6, august 1986, pag. 261-264.
- [M16] Milenko, D. B. - *Determining symmetric components by a method of four samples (power system analysis)*, Elektrichestvo, No. 9, September 1992, pp. 50-51
- [M17] Mocanu, C.I. - *Teoria circuitelor electrice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979
- [M18] Modran, L., **Popa, V.M.**, Crăciunaș, G., Spătar, O. – *Electrotehnică și electronică*, Editura Meteor, Sibiu, 1998
- [M19] Moshchinskii, Y. A., Osin, I. L. - *Determination of three-phase induction motor parameters from an asymmetric supply test*, Elektrichestvo, Nr. 1, 1993
- [N1] Nakagawa, S., Niki, N., Hashiguchi, H. – *Computer algebra application to the distribution of sample correlation coefficient*, Mathematics and Computers in Simulation, Vol.45, no.1-2, January 1998, pp.23-32
- [N2] Năstăsescu, C., Niță, C., Vraciu, C. - *Bazele algebrei*, Vol.I, Editura Academiei, București, 1986

- [N3] Neamțu, V. - *Circuite electrice în regim permanent sinusoidal și nesinusoidal - culegere de probleme*, Editura Universității Tehnice Cluj-Napoca, 1996
- [N4] Nedelcu, V.N. - *Regimurile de funcționare ale mașinilor de curent alternativ*, Editura Tehnică, București, 1968
- [N5] Nedelcu, V.N. - *Teoria conversiei electromecanice*, Editura Tehnică, București, 1978
- [N6] Nilsson, W.J. - *Electric Circuits*, Fourth Edition, Addison Wesley Co., Iowa State University, 1993
- [O1] Oberretl, K. - *Tooth breakage and tooth forces in asynchronous motors*; Electrical Engineering, Vol.80, No.5, October 1997, pp.309-324
- [O2] Ostovic, V. - *Computer-aided Analysis of Electric Machines*, Prentice Hall, New York, 1994
- [P1] Palco, S. - *Structural optimisation of an induction motor using a genetic algorithm and a finite element*; Acta Polytechnica Scandinavica, Electrical Engineering Series, No.84, 1996, pp.2-99
- [P2] Pană, T. - *MATLAB în sisteme de acționare electrică*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 1996
- [P3] Pană, T. - *MATLAB Application Toolbox, Electrical Drives - Induction Motor*, Mediamira Science Publisher, Cluj-Napoca, 1997
- [P4] Pandurangavittal, K., Fakmddin, D.B., Rao, I. R. , Parthasarathy, K. - *Microcontroller based three-phase induction motor protection relay with operator selectable thermal I-T curve feature*; Electric Machines and Power Systems, Vol.26, No.1, January 1998, pp.13-26
- [P5] Pavel, E., Ionescu, T.G. - *Efectele consumatorilor nesimetrice asupra rețelelor electrice*; Energetica, Vol.XXXIV, Nr.10, octombrie 1986, pag.457-459
- [P6] Pavel, E. - *Receptoare trifazate dezechilibrate. Caracteristic și particularități de funcționare în regimuri stabilizate*; Energetica, Vol.XXXVI, Nr.6, iunie 1988, pag.241-249
- [P7] Pavel, E. - *Considerații privind receptoarele electrice trifazate dezechilibrate*, ENERG, Vol.VII, Editura Tehnică, București, 1989, pag.194-220
- [P8] Pavel, E. - *Noi aspecte ale teoriei receptoarelor trifazate statice dezechilibrate*; Energetica, Vol.37, Nr.11, noiembrie 1989, pag.481-492
- [P9] Perahia, J., Nayar, C.V. - *Analysis of a series - delta connected tandem induction motor*; Electric Machines and Power Systems, Vol.23, No.2, March-April 1995, pp.221-230

- [P10] Pillay, P., Sabur, S.M.A., Haq, M.M. - *A model for induction motor aggregation for power system studies*; Electric Power Systems, Vol.42, No.3, September 1997, pp.225-228
- [P11] Pillay, P., Nolan, R., Haque, T. - *Application of genetic algorithms to motor parameter determination for transient torque calculations*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.33, No.5, September-October 1997, pp.1273-1282
- [P12] Pinto, J.A.D., Coimbra, A.P., Antunes, C.L., Fernandez, X.M.L., Donsion, M.P. - *Influence of the neutral in the thermal performance of a three-phase induction motor under unbalanced power supply using the finite element approach*, COMPEL, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol.17, no.1-2, 1998, pp.378-382
- [P13] **Popa, V.M.** - *Unele generalizări în combinatorică*; Buletinul Științific al Institutului de Învățământ Superior Sibiu, Vol.III, Sibiu, 1980, pag.33-39
- [P14] **Popa, V.M.**, Diaconescu, C. - *Noi cercetări privind protecția motoarelor asincrone*; Buletinul Științific al Institutului de Învățământ Superior Sibiu, Vol.IV, 1981, pag.244-247
- [P15] **Popa, V.M.**, *Asupra numărării bijecțiilor între două mulțimi multiple*; Gazeta Matematică - Perfecționare metodică și metodologică în matematică și informatică, Vol.VII, Nr.2, București, 1986, pag.78-81
- [P16] **Popa, V.M.** - *Asupra unei probleme de algebră*; Astra Matematică, Vol.1, Nr.1, Sibiu, 1990, pag.29-31
- [P17] **Popa, V.M.** - *On a question of linear programming*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.X (1), Sibiu, 1993, pag.65-67
- [P18] **Popa, V.M.** - *Unele aspecte privind caracterizarea circuitelor trifazate dezechilibrate*; Referat de doctorat nr.1, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, octombrie 1993
- [P19] **Popa, V.M.** - *Aplicații și încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifazate în regimuri nesimetrice*; Referat de doctorat nr.2, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, octombrie 1994
- [P20] **Popa, V.M.** - *On a classification of the three-phase loads*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XIV (2), Sibiu, 1995, pag.87-90
- [P21] **Popa, V.M.** - *A new approach to be characterized the unbalanced three-phase loads*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XIV (2), Sibiu, 1995, pag.91-93

- [P22] **Popa, V.M.**, Buduriși, C., Garcia Moreno, E. - *Some Aspects about the Analysis of a Three-Phase Non-Symmetrical Alimentated Bridge with Thyristors*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol.36, Nr.1, Cluj-Napoca, 1995, pag.42-44
- [P23] **Popa, V.M.** - *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol.36, Nr.1, Cluj-Napoca, 1995, pag.91-92
- [P24] **Popa, V.M.** - *On an Analysis for the Unbalanced Loads*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol.36, Nr.1, Cluj-Napoca, 1995, pag.93-94
- [P25] **Popa, V.M.** - *Considerații privind comportarea circuitelor electrice în regimuri nesimetrice de funcționare*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XX, Sibiu, 1995, pag.129-134
- [P26] **Popa, V.M.** - *Considerations Upon a Relay of Protecting Asynchronous Three-Phase Motors*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol.37, No.1, Cluj-Napoca, 1996, pag.61-62
- [P27] **Popa, V.M.**, Roșca, P. - *Electrotehnică*, Editura Universității “Lucian Blaga”, Sibiu, 1996
- [P28] **Popa, V.M.** - *Electrotehnică - îndrumar de laborator*, Editura Universității “Lucian Blaga”, Sibiu, 1996
- [P29] **Popa, V.M.** - *Aspecte energetice privind alimentarea receptorilor dezechilibrați*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XXVIII, Sibiu, 1998
- [P30] **Popa, V.M.** - *Caracterizarea algebrică a receptoarelor dezechilibrate discrete*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XXVIII, Sibiu, 1998
- [P31] **Popa, V.M.** - *Metode pentru calculul numărului receptoarelor dezechilibrate discrete*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XXVIII, Sibiu, 1998
- [P32] **Popa, V.M.** - *Metoda de recurență pentru calculul numărului claselor de dezechilibru ale receptoarelor m-fazate*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XXVIII, Sibiu, 1998
- [P33] Popescu, D., Vraciu, C. - *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986
- [P34] Prisăcaru, A., Cojocar-Filipiuc, C. - *On the nonsinusoidal and unsymmetrical behaviour of three-phase asynchronous motor*; Proceedings, First International Symposium on Advanced Electromechanical Motion Control Systems ELECTROMOTION'95, Cluj-Napoca, 25-26 May 1995, Volume, pp.116-119
- [P34-a] Pyati, V.P. - *Comment on “On the geometry of parallel impedances”*, IEEE Transactions on Education, Vol.41, no.2, May 1998, pp.171-176

- [R1] Ramras, M. – *Congestion-free routings of linear complement permutations*, Siam Journal of Discrete Mathematics, Vol.11, no.3, 1998, pp.487-500
- [R2] Rankin, D.R. - *The industrial application of phase current analysis to detect rotor winding faults in squirrel cage induction motors*; Power Engineering Journal, Vol.9, No.2, April 1995, pp.77-89
- [R3] Rashid, M.H., Maswood, A.I. - *Analysis of Three-Phase AC-DC Converters Under Unbalanced Supply Conditions*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.24, No.3, May/June 1988, pp.449-455
- [R4] Rashid, M.H., Maswood, A.I. - *A Novel Method of Harmonic Assessment Generated by Three-Phase AC-DC Converters Under Unbalanced Supply Conditions*, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.24, No.4, July/August 1988, pp.590-597
- [R5] Rastogi, M., Mohan, N., Henze, C.P. - *Three-phase sinusoidal current rectifier with zero-current switching*; IEEE Transactions on Power Electronics, Vol.10, No.6, November 1995, pp.753-760
- [R6] Ravezzi, L., Stoppa, D., DallaBetta, G.F. – *Current-mode A/D converter*, Electronics Letters, Vol.34, no.7, April 1998, pp.615-616
- [R7] Reljin, B., Ristic, S., Sreckovic, M. - *Analysis of some physical phenomena and processes by equivalent electrical circuits*, International Journal of Electrical Engineering Education, Vol.33, No.4, October 1996, pp.353-360
- [R8] Richter, R. - *Maşini electrice, Vol.IV, Maşini asincrone*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1960
- [R9] Riordan, J. - *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967
- [R10] Riordan, J. - *Combinatorial Identities*, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1968
- [R11] Roger Folch, J., Joares, V.J.Z. - *Contribution to the transient analysis of induction motors solving the electrodynamic equations by using the finite elements method*; COMPEL, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol.14, No.4, December 1995, pp.93-97
- [R12] Roşca, P., Diaconescu, C., Modran, L., **Popa, V.M.** - *An Improved Protection Method at the Electric Drive Systems with Asynchronous Motors*; A treia Conferinţă Naţională de Acţionări Electrice, Braşov, 28-30 mai 1982, volum, pag.A135-A138

- [R13] Roșca, P., Diaconescu, C., **Popa, V.M.**, Modran, L. - *Calculul armonicii de 100Hz din tensiunea obținută prin redresarea unui sistem trifazat asimetric cu ajutorul unei punți trifazate*; Buletinul Științific al Institutului de Învățământ Superior Sibiu, Vol.VI, 1982, pag.130-134
- [R14] Roșca, P., **Popa, V.M.**, Diaconescu, C., Modran, L. - *Relevu cu fiabilitate ridicată pentru protecția complexă a motoarelor asincrone trifazate*; Conferința Națională de Energetică, București, 23-25 noiembrie 1983, volum secția 34, pag.34.091-34.096
- [R15] Roșca, P., **Popa, V.M.**, Diaconescu, C., Modran, L. - *The Influence of Non-Symmetric States on the Functioning of the Electronic Relay RPMA-1 of Protecting Asynchronous Three-Phase Motors at the Interruption of one Phase*; A patra Conferință Națională de Acționări Electrice, Craiova, 20-21 septembrie 1984, volum, pag.C127-C130
- [R16] Roșca, P., Diaconescu, C., **Popa, V.M.**, Modran, L. - *Relevu pentru protecția motoarelor asincrone trifazate la întreruperea unei faze de alimentare*; Brevet de Invenție 87118 din 19.03.1985
- [R17] Roșca, P., **Popa, V.M.**, Diaconescu, C., Modran, L. - *Frână cu curenți turbionari*; Buletinul Științific al Institutului de Subingineri Sibiu, Vol.VII, 1985, pag.68-71
- [R18] Roșca, P., **Popa, V.M.**, Diaconescu, C., Modran, L. - *Instalație pentru ridicarea caracteristicii mecanice a motoarelor electrice*; Buletinul Științific al Institutului de Subingineri Sibiu, Vol.IX, 1986, pag.370-373
- [R19] Roșca, P., Diaconescu, C., **Popa, V.M.** - *Proiectarea produsului "Dispozitiv de protecție antibifazică" în vederea asimilării în fabricație*, Contract de cercetare științifică între Institutul de Subingineri Sibiu și Intreprinderea de Relee Mediaș, 1989
- [R20] Roșca, P., Modran, L., **Popa, V.M.**, Diaconescu, C. - *Cuplaj - frână electromagnetică*, Brevet de invenție 108833 din 30.08.1996
- [R21] Rosolowski, E., Izykowski, J., Kasztenny, B., Saha, M.M. - *A new distance relaying algorithm based on complex differential equation for symmetrical components*; Electric Power Systems Research, Vol.40, No.3, March 1997, pp.175-180
- [R22] Rukgauer, A., Schiehlen, W. - *Simulation of modular dynamic systems*, Mathematics and Computers in Simulation, Vol.46, no.5-6, June 1998, pp.535-542
- [S1] Saari, J. - *Thermal modelling of high-speed induction machines*; Acta Polytechnica Scandinavica, Electrical Engineering Series, No.82, 1995, pp.1-82



- [S2] Șafarevici, I.R. - *Noțiunile fundamentale ale algebrei*, Editura Academiei, București, 1989
- [S3] Sakui, M., Fujita, H, Shioya, M. - *A Method for Calculating Harmonic Currents of a Three-Phase Bridge Uncontrolled Rectifier with DC Filter*; IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.36, No.3, August 1989, pp.434-440
- [S4] Sakui, M., Fujita, H. - *Calculation of Uncharacteristic Harmonics of a Three-Phase Bridge Rectifier with DC Current Ripple*; Electrical Engineering in Japan, Vol.111, No.5, 1991, pp.127-129
- [S5] Sakui, M., Fujita, H. - *Harmonic Analysis of a Capacitor-Filtered Three-Phase Diode-Bridge Rectifier with Complex Source Impedance*; IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol.39, No.1, February 1992, pp.80-81
- [S6] Sakui, M., Fujita, H. - *Calculation of harmonic currents in a three-phase convertor with unbalanced power supply conditions*; IEE Proceedings-B, Vol.139, No.5, September 1992, pp.478-484
- [S7] Sakui, M., Fujita, H. - *An Analytical Method for Calculating Harmonic Currents of a Three-Phase Diode-Bridge Rectifier with DC Filter*; IEEE Transactions on Power Electronics, Vol.9, No.6, November 1994, pp.631-637
- [S8] Sakui, M, Minamijima, M., Amei, K., Fujita, H. - *Analytical Method for Calculating Harmonic Currents of an AC/DC Converter with AC Filters*; ETEP, Vol.6, No.2, March/April 1996, pp.97-101
- [S9] Salmon, J.C. - *Operating a three-phase diode rectifier with a low-input current distortion using a series-connected dual boost converter*; IEEE Transactions on Power Electronic, Vol.11, No.4, July 1996, pp.592-604
- [S10] Sarkar, D. – *Approximate analysis of temperature rise in a induction motor during dynamic braking*, Electric Machines and Power Systems, Vol.26, no.6, July 1998, pp.585-600
- [S11] Sasdelli, R., Menchetti, A. - *Some remarks on power theories*; European Transactions on Electrical Power Engineering, Vol.4, No.6, November-December 1994, pp.457-463
- [S12] Schoen, R.R., Habetler, T.G. - *A new method of current-based condition monitoring in induction machines operating under arbitrary load conditions*; Electric Machines and Power Systems, Vol.25, No.2, February-March 1997, pp.141-152

- [S13] Shi, K.L., Chan, T.F., Wong, Y.K. - *Modelling of the three-phase induction motor using SIMULINK*; 1997 IEEE International Electric Machines and Drives Conference Record, May 18-21, 1997, pp.WB3, 6.1-6.3
- [S14] Shi, S.W. - *Study of fault analysis using two vector system symmetrical components*; Electric Machines and Power Systems, Vol.26, No.2, February-March 1998, pp.155-170
- [S15] Simion, E., Mîndru, G., Gligor, T., Nicula, O. – *Bazele electrotehnicii*, Institutul Politehnic, Cluj, 1972
- [S16] Simion, E. – *Electrotehnica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978
- [S17] Simion, E., Maghiar, T. - *Electrotehnica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
- [S18] Simion, E., Man, E., Munteanu, C. – *The Symmetrization of the Line Current's Three-Phased System Using the Symmetric Components Method*; Annual Scientific Workshop, Oradea, 29-30 May, 1992
- [S19] Simion, E., Ursu, M.F., Man, E. - *The Systematization of the Three-Phase Electric Circuit in Sinusoidal Steady State - The Tripole*, Proceedings of 4<sup>th</sup> International Conference on Optimization of Electric and Electronic Equipments OPTIM'94, Brașov, 12-14 May 1994, pp.79-83
- [S20] Simion, E., Țopa, M. - *On Symbolic Analysis for Analog Filter Design*, Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Optimization of Electric and Electronic Equipments OPTIM'94, Brașov, 12-14 May 1994, pp.181-185
- [S21] Simion, E., Man, E., Munteanu, C. - *Contributions to the symmetrization of line current three-phase system*, Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Optimization of Electric and Electronic Equipments, OPTIM'94, Brașov, 12-14 May 1994, pp.287-291
- [S22] Simion, E., Man, E., Ciupa, R.V., Roșca, P., Neamțu, V., **Popa, V.M.** - *Teoria circuitelor electrice*, Editura Universității Tehnice Cluj-Napoca, 1996
- [S23] Simion, E., Munteanu, C., Topa, V. – *The Numerical Analysis of the Electromagnetic Interference Phenomena in Printed Circuit Boards Using the Transmission Line Model*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol.37, Nr.1, Cluj-Napoca, 1996, pag.35-38
- [S24] Slemon, G.R. - *Modelling of Induction Machines for Electric Drives*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.25, No.6, November/December 1989, pp.1126-1131

- [S25] Smith, O.D. – *Generation of ground structures for 2D and 3D design domains*, Engineering Computations, Vol.15, no.4, 1998, pp.462-500
- [S26] Smolleck, H.A. - *A new look at the effects of unbalanced voltages upon synchronous and induction machines*; Electric Power Systems Research, Vol.25, 1992, pp.199-206
- [S27] Soliman, S.A, Al Kandari, A.M., El Hawary, M.E. - *Time domain estimation techniques for harmonic load models*; *Electric Machines and Power Systems*, Vol.25, No.8, October 1997, pp.885-896
- [S28] Sonea, P., Fransua, A., Nicolaide, A., Saal, C. - *Electrotehnică, mașini și instalații electrice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1966
- [S29] Șora, C. - *Bazele electrotehnicii*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982
- [S30] Sowaied, A., Taleb, M. - *Assessment of power converter harmonics*; *Electric Machines and Power Systems*, Vol.24, No.2, March 1996, pp.147-158
- [S31] Speranza, F. - *Relații și structuri*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1975
- [S32] Stănășilă, O. - *Noțiuni și tehnici de matematică discretă*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985
- [S33] Stringer, N.T., Waser, D. - *An innovative method of providing total breaker failure protection*; *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol.32, No.5, September-October 1996, pp.1011-1017
- [S34] Șurianu, F.D. - *Experiment și simulare numerică a comportării motoarelor asincrone la golurile de tensiune simetrice*; *Energetica*, Vol.42, Nr.5-B, 1994, pag.223-226
- [T1] Terzija, V., Djuric, M. - *A numerical algorithm for direct real-time estimation of voltage phasor, frequency and its rate of change*; *Electric Machines and Power Systems*, Vol.24, No.4, June 1996, pp.417-428
- [T2] Timotin, A., Hortopan, V., Ifrim, A., Preda, M. - *Lecții de bazele electrotehnicii*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1970
- [T3] Țogui, L., Covrig, M., Manoliu, V. - *Determinarea cuplului electromagnetic al masinii asincrone trifazate cu înfășurări nesimetrice*; *Electrotehnica, Electronica, Automatica, Electrotehnica*, Vol.44, Nr.5-6, mai-iunie 1996, pag.19-21

- [T4] Țogui, L., Covrig, M., David, F. - *Modelul matematic al masinii asincrone trifazate cu înfășurare nesimetrică pe stator*; *Electrotehnica, Electronica, Automatica, Electrotehnica*, Vol.43, Nr.7-8, iulie-august 1995, pag.21-25
- [T5] Tomescu, I. - *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, București, 1972
- [T6] Tomescu, I. - *Introduction to Combinatorics*, Collet's (Publishers) Limited, London and Wellingborough, 1975
- [T7] Tomescu, I. - *Combinatorică și teoria grafurilor*, Editura Universității din București, 1978
- [T8] Tomescu, I. - *Probleme de combinatorică și teoria grafurilor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
- [T9] Tou, M., Al Haddad, K., Olivier, G., Rajagopalan, V. - *Analysis and design of single-controlled switch three-phase rectifier with unity power factor and sinusoidal input current*; *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol.12, No.4, July 1997, pp.608-614
- [T10] Țugulea, A. - *Considerații privind efectele energetice în regimuri armonice nesimetrice ale sistemelor trifazate*; *Energetica*, Vol.XXXIV, Nr.3, martie 1986, pag.121-129
- [T11] Țugulea, A. - *Considerații referitoare la definirea factorului de putere pentru sistemele trifazate dezechilibrate*; *Energetica*, Vol.XXXIV, Nr.4, aprilie 1986, pag.164-167
- [T12] Țugulea, A., Golovanov, C. - *Efectele energetice ale regimurilor nesimetrice și deformante ale sistemelor electroenergetice. Posibilități de măsurare*; *ENERG*, Vol.III, Editura Tehnică, București, 1987, pag.130-162
- [V1] Vaananen, J. - *Combination of two-dimensional finite element analysis of electrical machines with circuit simulation techniques*; *Acta Polytechnica Scandinavica, Electrical Engineering Series*, No.80, 1995, pp.1-104
- [V2] Văzdăuțeanu, O. - *Cu privire la compensarea nesimetriei într-un sistem trifazat de tensiuni*; *Buletinul Științific și Tehnic al Universității Tehnice din Timișoara*, tomul 37 (51), fascicola 1-2, ianuarie-decembrie 1992, pag.73-76
- [W1] Waikar, D.L., Elangovan, S., Liew, A.C. - *Further enhancements in the symmetrical components based improved fault impedance estimation method. 1. Mathematical modelling*; *Electric Power Systems Research*, Vol.40, No.3, March 1997, pp.189-194

- [W2] Waikar, D.L., Liew, A.C., Elangovan, S. - *Further enhancements in the symmetrical components based improved fault impedance estimation method. 2. Performance evaluation*; Electric Power Systems Research, Vol.40, No.3, March 1997, pp.195-202
- [W3] Wang, Y.J., Pierrat, L., Feuillet, R. - *An Analytical Method for Predicting Current Harmonics Produced by an AC/DC Converter under Unbalanced Supply Voltage*; ETEP, Vol.2, No.4, July/August 1992, pp.237-244
- [W4] Wang, Y.J., Pierrat, L. - *Probabilistic modelling of current harmonics produced by an AC/DC converter under voltage unbalance*; IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.8, No.4, October 1993, pp.2060-2066
- [W5] White, D.J. - *Epsilon dominance and constraint partitioning in multiple objective problems*, Journal of Global Optimization, Vol.12, no.4, June 1998, pp.435-445
- [W6] Willems, J.L. - *The compensation of non-active currents for three-phase power systems in sinusoidal steady state*; Electrical Machines and Power Systems, Vol.21, No.6, November-December 1993
- [W7] Willems, J.L. - *Mathematical foundations of the instantaneous power concepts: A geometrical approach*; European Transactions on Electrical Power, Vol.6, No.5, September-October 1996, pp.299-304
- [W8] Williams, J.E. - *Operation of 3-Phase Induction Motors on Unbalanced Voltages*; AIEE Transactions Power Applications Systems, Vol.PAS-73, April 1954, pp.125-133
- [W9] Witherspoon, S.A., Choma, J. - *The analysis of balanced, linear differential circuits*; IEEE Transactions on Education, Vol.38, No.1, February 1995, pp.40-51
- [W10] Woll, R.F. - *Effect of Unbalanced Voltage on the Operation of Polyphase Induction Motors*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.IA-11, No.1, January/February 1975, pp.38-42
- [W11] Wroblewski, Z. - *Digital simulation of reliability of contacts used in AC electromagnetic contactors*, European Transactions on Electric Power, Vol.8, no.3, May-June 1998, pp.201-206
- [X1] Xia, R.W., Chen, S.J. - *A quasi-analytic method for structural optimization*, Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol.14, no.6, June 1998, pp.569-580

- [X2] Xypteras, J., Maras, K., Spyrelis, D. - *Calculation of the temperature distribution in an asynchronous machine*; European Transaction on Electrical Power Engineering, Vol.5, No.3, May-June 1995, pp.181-187
- [Y1] Yacamini, R. - *Power system harmonics. 4. Inter-harmonics*; Power Engineering Journal, Vol.10, No.4, August 1996, pp.185-196
- [Y2] Yu, D.C., Chen, D., Ramasamy, S., Flinn, D.G. - *A Windows based graphical package for symmetrical components analysis*; IEEE Transactions on Power Systems, Vol.10, No.4, November 1995, pp.1742-1749
- [Z1] Zaninelli, D., Zanotti, P. - *Simplified frequency dependent model for induction machines*; Electric Machines and Power Systems, Vol.22, No.6, November-December 1994, pp.727-742
- [Z2] Zuckerberger, A., Alexandrovitz, A. - *Modelling and Simulation of Unsymmetrical Supplied Three-Phase Induction Motor*; ETEP, Vol.6, No.3, May/June 1996, pp.189-194

## BIBLIOGRAFIE SUPLIMENTARĂ

- [B14] Boldea, I. – *Transformatoare și mașini electrice*, Editura Politehnică, 2001
- [B15] Buta, A., Milea, L., Pană, A. – *Impedanța armonică a rețelelor electrice*, Editura Tehnică, București, 2000
- [B16] Buta, A., Pană, A., Milea, L. – *Calitatea energiei electrice*, Editura AGIR, București, 2001
- [D14] Delapeta, M., Deaconu S., Iagăr, A. – *Echipeamente electrice*, vol. I și vol. II, Centrul de Multiplicare al U.P.T., 2000
- [F7] Felea, I., Coroi, N. – *Fiabilitatea și mentenanța echipamentelor electrice*, Editura Tehnică, București, 2001
- [F8] Felea, I., Dale, E. – *Efecte ale regimului deformant și nesimetric*, Editura Universității din Oradea, 2002
- [F9] Felea, I., Rancov, N., Haș, V. – *Testing procedure in distortional operation condition of asynchronous machine*, Conferința de Inginerie Energetică CIE 2008, Oradea
- [H3] Hortopan, G. – *Aparate electrice de comutație*, Editura Tehnică, București, 1993
- [I4] Iordănescu, I., Golovanov, N., Postolache, P., Toader, C., Porumb, R., Lipan, L., Popescu, S. – *Instalații electrice și elemente de audit electroenergetic*, Editura TIPOGAL 2008

- [M20] Milici, Mariana – Circuite electrice – *Regimuri sinusoidale și particulare de funcționare*, Editura MatrixRom, București, 2005
- [P35] Popa, V.M. – *Contribuții la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicații*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj-Napoca, 1999
- [P36] Popa, V.M. - *A Synthesis Regarding the Study of a Real Unbalanced Load*, Sesiunea de Comunicări Științifice cu participare internațională, Hunedoara, 19-20 octombrie 2000; Universitatea „Politehnica” din Timișoara, Analele Facultății de Inginerie din Hunedoara, Tomul II, Fascicola 2, ISSN 1454-6531, pag.9-12
- [P37] Popa, V.M. - *The Study of the Real Unbalanced Load for Extreme Functioning Situations*, Sesiunea de Comunicări Științifice cu participare internațională, Hunedoara, 19-20 octombrie 2000; Universitatea „Politehnica” din Timișoara, Analele Facultății de Inginerie din Hunedoara, Tomul II, Fascicola 2, ISSN 1454-6531, pag. 13-16
- [P38] Popa, V.M. - *Considerații privind alimentarea receptorilor dezechilibrați*, Sesiunea de comunicări științifice a Universității “Petru Maior”, Târgu Mureș, 27-28 octombrie 2000, Volumul 7, Electroenergetică, ISBN 973-8084-19-9, pag. 191-196
- [P39] Popa, V.M., Popescu, Lizeta - *Măsurători experimentale privind puntea de diode alimentată nesimetric*, A treia Conferință Internațională de Sisteme Electromecanice și Energetice SIELMEN - 2001, Republica Moldova, Chișinău, 4-6 octombrie 2001, volumul III, ISBN 9975-9638-8-9, pag. 165-166
- [P40] Popa, V.M., Popescu, Lizeta - *Studiul punții de diode alimentată cu sisteme particulare nesimetrice de tensiuni*, A treia Conferință Internațională de Sisteme Electromecanice și Energetice SIELMEN - 2001, Republica Moldova, Chișinău, 4-6 octombrie 2001, volumul III, ISBN 9975-9638-8-9, pag. 173-176
- [P41] Popa, V.M. - *The Complex Analysis of the Real Unbalanced Load*, www.roger-univ.ro, Publicații; Analele Universității Româno-Germane din Sibiu; Secțiunea Tehnică, Sibiu, 2002
- [P42] Popa, V.M. - *Studiul energetic al receptorului dezechilibrat real*, Lucrările celei de A Doua Conferințe Naționale „Profesorul Dorin Pavel-fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 31 mai; 1-2 iunie 2002, Volumul Știință și Inginerie (Vol. I), ISBN 973-8130-82-4; ISBN 973-8130-83-2, pag. 69-74
- [P43] Popa, V.M. - *Analiza cazurilor limită ale receptorului dezechilibrat real*, Sesiunea Jubiliară de Comunicări Științifice cu Participare Internațională prilejuită de împlinirea a 30 de ani de învățământ superior de stat în Arad, Arad, 28-29 noiembrie 2002, Analele Universității „Aurel Vlaicu” din Arad, Volum, Seria Electrică, ISSN 1582-3377, pag. 126-131

- [P44] Popa, V.M. - *Studiul punții de diode alimentată nesimetric*, Lucrările celei de A Treia Conferințe Naționale – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 30-31 mai; 1 iunie 2003, Volumul „Știință și Inginerie” (vol. III), ISBN 973-8130-82-4; ISBN 973-8466-03-2, pag. 105-108
- [P45] Popa, V.M. - *Studiul receptorului trifazat cu coeficienți de dezechilibru reali*, A treia sesiune anuală de comunicări științifice a cadrelor didactice, Universitatea Româno-Germană Sibiu, 30 aprilie 2004, Volum 2; ISBN 973-7998-11-1, pag. 101-111
- [P46] Popa, V.M. - *Analiza receptorului dezechilibrat real cu coeficienți de dezechilibru reali*, Lucrările celei de A Patra Conferințe Naționale – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 21-23 mai 2004; Volumul „Știință și Inginerie” (vol. V), ISBN 973-8130-82-4; ISBN 973-8466-67-9, pag. 151-156
- [P47] Popa, V.M. - *Factor global de nesimetrie pentru sisteme trifazate*, Seminarul Științific Național “Electrotehнологii și Mediul ambiant”, Sibiu, 5-6 noiembrie 2004, Revista „Energetica”, nr. 12/2004, ISSN 1453-2360, pag. 544-549
- [P48] Popa, V.M. - *Studiul analitic al punții trifazate de diode alimentate nesimetric*, A VI-a Sesiune de comunicări științifice, Universitatea Româno-Germană Sibiu, 4 noiembrie 2005, Extras, ISBN 973-7998-23-5, pag. 199-204
- [P49] Popa, V.M. - *Asupra nesimetriei unui sistem trifazat*, Lucrările celei de A V-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 3-4 iunie 2005; Volumul „Știință și Inginerie” (vol. 7), ISBN 973-720-015-2; ISBN 973-8130-84-0, pag. 241-246
- [P50] Popa, V.M. - *The Energetical Study of the Unbalanced Three-Phased Load*, Conferința Națională cu participare internațională „Electrotehnică aplicată în eco-reconstrucția industrială”, Sibiu, 23-24 septembrie 2005; Volum, ISBN 973-739-138-1, pag. 144-151
- [P51] Popa, V.M. - *Analiza punții de diode alimentată cu sisteme de tensiuni nesimetrice*, Lucrările celei de A VI-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 2-3 iunie 2006; Volumul „Știință și Inginerie” (vol. 9), ISBN 10 973-8130-82-4, pag. 309-314
- [P52] Popa, V.M. - *Aspecte experimentale și sintetice privind puntea trifazată de diode alimentată nesimetric*, A VII-a Sesiune de comunicări științifice, Universitatea Româno-Germană Sibiu, 19 aprilie 2007, Extras, ISBN 978-973-7998-32-3 și CD al sesiunii, pag. 263-269
- [P53] Popa, V.M. - *Rezultate experimentale și comparative privind puntea de diode în regim de alimentare nesimetric*, Lucrările celei de A VII-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii



- românești”, Sebeș, 1-2 iunie 2007; Volumul „Știință și Inginerie” (vol. 11), ISBN 973-8130-82-4, pag. 191-196
- [P54] Popa, V.M. - *Studiul energetic al receptorului extrem dezechilibrat generalizat*, Lucrările celei de A IX-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 5-6 iunie 2009; Volumul „Știință și Inginerie” (vol. 15), ISBN 973-8130-82-4, pag. 363-368
- [P55] Popa, V.M. – *Aspecte de combinatorică cu aplicații în electrotehnică*, Editura Universității „Lucian Blaga” din Sibiu, Sibiu, 2009
- [P56] Popa, V.M. - *Studiul energetic al receptorului echilibrat real*, Lucrările celei de A X-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 4-5 iunie 2010; Volumul „Știință și Inginerie” (vol. 17), ISSN 2067-7138, pag.357-362
- [P57] Popa, V.M. – *Receptoare generalizate în electrotehnică*, Editura Universității “Lucian Blaga” din Sibiu, Sibiu, 2010
- [P58] Popa, V.M. - *On Generalized Loads in Electrotechnics*, A X-a Sesiune de comunicări științifice cu participare internațională, Universitatea Româno-Germană Sibiu, 19-29 noiembrie 2010, Extras, ISBN 978-973-7998-61-3 și CD al sesiunii, pag. 12-15
- [P59] Popa, V.M. - *Generalized Impedances and Unbalanced Loads*, Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.LXI, Technical series, ISSN 1583-7149, pag. 47-50, Sibiu, 2010
- [P60] Popa, V.M. – *Aspecte privind receptoarele generalizate în electrotehnică*, Lucrările celei de A XI-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 3-4 iunie 2011; Volumul „Știință și Inginerie” (vol. 19), ISSN 2067-7138, pag.345-352
- [P61] Popa, V.M. – *Sisteme nesimetrice în electrotehnică*, Editura Universității “Lucian Blaga” din Sibiu, Sibiu, 2011
- [P62] Popa, V.M. – *Metodă analitică pentru studiul punții de diode având o sarcină complexă*, Lucrările celei de A XII-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii românești”, Sebeș, 1-2 iunie 2012; Volumul „Știință și Inginerie” (vol. 21), ISSN 2067-7138, pag.289-298
- [P63] Postolache, P., Toader, C. – *Calitatea și eficiența energiei electrice*, Editura AGIR, București, 2007
- [P64] Popescu, Lizeta – *Echipamente electrice*, Editura Alma Mater, Sibiu, 2008

- [P65] Popa, I., Popa, G. N. – *Dispozitive electronice cu structură cablată și programată de protecție a motoarelor asincrone trifazate de joasă tensiune*, Editura Mirton, Timișoara, 2000
- [R23] Rancov, N. – *Aspects regarding experimental determination of thermal inertia at asynchronous motors operating in harmonics regime*, CIE 2009, Oradea
- [V3] Vasilevici, A. – *Aparate și echipamente electrice*, vol. I, vol. II, Editura MS, Sibiu, 1995, 1996
- [W12] [www.moeller.net](http://www.moeller.net)
- [W13] [www.siemens.com](http://www.siemens.com)
- [W14] [www.omron.com](http://www.omron.com)
- [W15] [www.littelfuse.com](http://www.littelfuse.com)
- [W16] [www.fairchildsemi.com](http://www.fairchildsemi.com)
- [W17] [www.futureelectronics.com](http://www.futureelectronics.com)
- [W18] [www.datasheetcatalog.com](http://www.datasheetcatalog.com)
- [W19] [www.schneider-electric.ro](http://www.schneider-electric.ro)
- [W20] [www.ganzkk.ro](http://www.ganzkk.ro)