Vasile Mircea Popa

Receptoare discrete m-fazate

Editura Universității "Lucian Blaga" din Sibiu
Sibiu, 2013

M-Phased Discreet Loads

Îngrijire editorială: autorul
Traducere prefață: autorul
Tehnoredactare: arh. Silviu Ioan Popa

PREFAȚĂ

Un receptor m-fazat legat în stea este dezechilibrat dacă impedanțele complexe din fiecare fază sunt diferite între ele. În această carte se consideră receptoare discrete, la care impedanța unei faze oarecare se obține prin inserierea unor impedanțe elementare. Se pune problema analizei structurii unor astfel de receptoare. De asemenea se doreşte obținerea listei de configurații posibile sau a numărului de configurații posibile.

Această carte este de fapt o colecție de articole, din care unele au fost publicate anterior în diverse reviste şi volume. Acest lucru constituie un avantaj pentru cititor, deoarece fiecare capitol al cărții are în acest fel un caracter independent şi poate fi citit direct. Pe de altă parte, din acest motiv apar inevitabil unele repetări. Totuşi, pentru un cititor interesat de conținutul cărții, cea mai bună variantă este citirea cărții în ordinea firească a articolelor, aşa cum sunt ele aşezate în carte.

Conținutul cărții este organizat pe două grupe de articole (conținând 12 şi respectiv 11 articole), anexă şi bibliografie.

La început se prezintă o serie de aspecte matematice utilizate în analiza receptoarelor discrete m-fazate. Astfel, se tratează grupările generalizate şi grupările barate generalizate precum şi cazuri speciale ale acestora. Aceste concepte generalizează o serie de noțiuni cunoscute din combinatorică iar denumirile lor sunt introduse de autor. Se prezintă problema grupării obiectelor şi problema distribuirii obiectelor în căsuțe precum şi o metodă de calcul pentru numărul de soluții ale acestor două probleme (în fond, echivalente), cu aplicații. Se indică şi două tabele de generalizare precum şi relațiile de generalizare respective. De asemenea, se arată în continuare o utilizare combinatorială a polinoamelor lui Newton. Următoarele doua articole tratează aspecte combinatoriale privind ecuația diofantică liniară cu coeficienți unitari si cu coeficienți naturali. Se prezintă aceste ecuații şi modul în care putem obține numărul soluțiilor sau eventual lista soluțiilor. Următoarele cinci articole prezintă alte aspecte combinatoriale utile pentru studierea receptoarelor discrete m-fazate.

Se prezintă apoi modelul matematic al receptorului dezechilibrat discret, caracterizarea algebrică a receptoarelor dezechilibrate discrete, metode pentru analiza claselor de dezechilibru ale receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate, precum şi metodele respective tratate pe rând. În încheierea acestei părți se prezintă analiza asistată de calculator a receptoarelor discrete m-fazate. Articolele care tratează acest subiect sunt scrise atât în limba română cât şi în limba engleză.

Ca anexă a cărții este prezentat un tabel care indică unde au mai fost publicate o parte dintre articole. La sfârşitul cărții este prezentată bibliografia.

Cartea poate interesa pe studenți, pe inginerii specializați în teoria circuitelor electrice, precum şi pe toți cei pasionați de electrotehnica teoretică şi aplicată în general, de teoria circuitelor electrice în special.

Conținutul lucrării poate fi fără îndoială îmbunătățit şi completat. Voi fi recunoscător pentru orice observație sau sugestie în acest sens, venită de la cititori.

Sibiu, 14 octombrie 2013

Autorul.

FOREWORD

A m-phased load in star connection is unbalanced if the complex impedances of each phase are different between them. In this book we consider discreet loads, to the impedance of a certain phase is obtained by to make a series connection of a elementar impedances. It aims to make structure analysis of these loads. Also it aims to get the list of possible configurations or the number of possible configurations.

This book is in fact a collection of articles, some of which were previously published in various scientific journals and other publications. As such, this is a benefit to the reader because each chapter in the book is fairly independent of the others and as such it can be read directly. On the other hand, this approach inevitably leads to some repetitions in the text. However, for a reader really interested in the book, the best option is to read its content in the natural order of the articles, as they appear in the book.

The contents of the book is organized into two groups of articles (containing 12 and 11 items), an annex and bibliography.

At first it presents a series of mathematical issues used in the analysis of the m-phased discreet loads. Next, the chapters treats generalized groupings and generalized barred groupings as well as special cases thereof. These concepts generalize a number of well known notions from the field of combinatorics, whose definitions and names are introduced by the author. Further down, the problem of grouping objects and the problem of distributing objects in boxes are presented, as well as the method for calculating the number of solutions of these two problems (which in fact are equivalent), followed by applications. The articles concludes by showing two generalization tables, as well as the associated generalization relations, followed by an example of combinatorial use of Newton polynomials. The following two articles deal with combinatorial aspects as applied to the linear diophantine equation with unit coefficients and with natural coefficients. Relevant equations are presented, and how one can get the number of solutions, or possibly the list of solutions. The following five articles shows other useful combinatorial aspects for studying m-phased discreet loads.

In the following it presents the mathematical model of the discreet unbalanced load, the algebraic characterization of discreet unbalanced loads, methods for the analysis of unbalanced classes of m-phased discreet unbalanced loads, as well as the respective methods which are treated individually. The end of this section presents the computer aided analysis of m-phased discreet loads. The articles treating this subject are written both in Romanian and English.

A table showing where some of articles have previously been published is included as an annex. The bibliography is attached at the end of the book.

This book will be of particular interest to students, to engineers specializing in the theory of electrical circuits, and generally to all other readers captivated by the theoretical and applied electrotechnics generaly, by the electrical circuits theory particulary.

Certainly, the contents of this book can be improved and enriched in the future. As such, I will be grateful for any comments or suggestions received from the readers.

Sibiu, 14 October 2013 The author.

CUPRINS

Prefață 3
Prefață (în limba engleză) 4
Cuprins 5
Cuprins (în limba engleză) 6

ASPECTE MATEMATICE 7

Grupări generalizate 9
Grupări barate generalizate 15
Cazuri speciale ale grupărilor generalizate 21
Cazuri speciale ale grupărilor barate generalizate 27
O utilizare combinatorială a polinoamelor lui Newton 33
Aspecte combinatoriale privind ecuația diofantică liniară cu coeficienți unitari 39
Aspecte combinatoriale privind ecuația diofantică liniară cu coeficienți naturali 45
Relații între combinări 53
Cazuri particulare la numărarea funcțiilor între două mulțimi multiple 57
Distribuirea obiectelor în căsuțe distincte sau indiscernabile 61
Program de calculator pentru numărarea funcțiilor între două mulțimi multiple 65
Program de calculator pentru numărarea surjecțiilor între două mulțimi multiple 67

RECEPTOARE DISCRETE 69

A Mathematical Model for Unbalanced Classes Analysis of Polyphasic Loads 71
The Algebraic Characterization of Discreet Unbalanced Loads 73
Methods for Calculating the Number of Discreet Unbalanced Loads 75
The Recurrence Method for Calculating the Unbalanced Classes Number of m-Phased Loads ... 77
The Order Reducing Method for Determining the Number of Discreet Unbalanced Loads 79
Model matematic al receptorului dezechilibrat discret 85
Aspecte algebrice privind receptoarele dezechilibrate discrete m-fazate 91
Metode pentru analiza claselor de dezechilibru ale receptoarelor m-fazate 95
Metodă recursivă pentru determinarea numărului receptoarelor dezechilibrate discrete 99
O metodă de reducere pentru calculul numărului receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate ... 103
Analiza asistată de calculator a receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate 107

ANEXĂ 111

Tabel care indică unde au mai fost publicate o parte dintre articole 113
Bibliografie 115

CONTENTS

Foreword (in Romanian)... 3
Foreword (in English)... 4
Contents (in Romanian).. 5
Contents (in English).. 6

MATHEMATICAL ASPECTS 7

Generalized Groupings 9
Generalized Barred Groupings.. 15
Special Cases of Generalized Groupings 21
Special Cases of Generalized Barred Groupings 27
A Combinatorial Use of Newton Polynomials 33
Combinatorial Aspects Regarding the Linear Diophantine Equation with Unit Coefficients...... 39
Combinatorial Aspects Regarding the Linear Diophantine Equation with Natural Coefficients....... 45
Relationships Between Combinations 53
Special Cases of Counting the Functions Between Two Multisets 57
Distribution of Objects in Distinguishable or Indistinguishable Boxes 61
Software Program for Counting the Functions Between Two Multisets 65
Softwarw Program for Counting the Surjections Between Two Multisets 67

DISCREET LOADS... 69

A Mathematical Model for Unbalanced Classes Analysis of Polyphasic Loads 71
The Algebraic Characterization of Discreet Unbalanced Loads.............................. 73
Methods for Calculating the Number of Discreet Unbalanced Loads 75
The Recurrence Method for Calculating the Unbalanced Classes Number of m-Phased Loads 77
The Order Reducing Method for Determining the Number of Discreet Unbalanced Loads 79
Mathematical Model for the Discreet Unbalanced Load.. 85
Algebraic Aspects Regarding the m-Phased Discreet Unbalanced Loads 91
Methods for the Unbalanced Classes Analysis of m-Phased Loads 95
Recursive Method for Determining the Number of Discreet Unbalanced Loads 99
A Reducing Method for Calculating the Number of m-Phased Discreet Unbalanced Loads ... 103
The Computer-Aided Analysis of m-Phased Discreet Unbalanced Loads............... 107

ANNEX 111

Table showing where articles have been previously published 113
Bibliography... 115

ASPECTE MATEMATICE

Grupări generalizate

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we introduce generalized groupings by considering two dual combinatorial problems: the problem of object grouping and the problem of distributing objects into cells. We also present a calculating algorithm, a recurrence formula and applications.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

După cum se ştie, două probleme fundamentale din combinatorică sunt problema grupării obiectelor şi problema distribuirii obiectelor în căsuțe [1].

Aranjamentele, combinările şi permutările (atât cele simple cât şi cele cu repetiție) se introduc de obicei considerând problema grupării obiectelor. Dar aceste concepte fundamentale au o interpretare la fel de simplă în cadrul problemei distribuirii obiectelor în căsuțe.

Tot pe baza acestor probleme vom introduce în continuare „grupările generalizate". Vom demonstra că cele două probleme sunt echivalente, apoi vom arăta modul de calcul al grupărilor generalizate.

Obiectele pot fi diferite sau identice (de aceeaşi clasă) iar căsuțele se consideră distincte şi neordonate (nu are importanță ordinea obiectelor dintr-o căsuță). Dacă o căsuță poate primi cel mult l_j obiecte, vom spune că această căsuță are capacitatea l_j. Prin „grupă" de k obiecte vom înțelege o mulțime mai specială, în sensul că poate fi eventual ordonată şi poate conține eventual şi obiecte identice. De asemenea, vom considera şi grupe împărțite în „zone", în interiorul unei zone ordinea obiectelor neavând importanță.

De exemplu, grupa: 112 13 23 are trei zone, conținând trei, două şi respectiv două obiecte. Ea este identică cu grupa: 121 13 32 dar diferă de grupele: 112 12 33 şi 112 13 24.

Deci, două grupe sunt identice dacă (şi numai dacă) zonele corespunzătoare au aceeaşi componență. Aceste grupe sunt de fapt mulțimi parțial multiple şi parțial ordonate (a se vedea [4]).

2 Problema grupării obiectelor

Să considerăm o mulțime finită Y parțial multiplă de tipul $n(l_1, l_2, ..., l_m)$ [4]. Mulțimea Y conține deci m clase de elemente. Se poate spune că mulțimea Y conține m elemente distincte, elementul j repetându-se de l_j ori ($j = 1, 2, ..., m$) cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$.

Vom forma (pe rând) submulțimi parțial ordonate de tipul $k(\lambda_1, \lambda_2, ..\lambda_\mu)$ ale mulțimii Y [4], $k \leq n$.

Problema grupării obiectelor este de fapt problema formării acestor submulțimi.Aceste submulțimi sunt mulțimi parțial multiple (conținând elemente din mulțimea Y) şi parțial ordonate de tipul $k(\lambda_1, \lambda_2, ..\lambda_\mu)$. Ele se mai numesc în combinatorică şi „grupe" (de elemente, de obiecte). Le vom nota simplu, prin scrierea alăturată a elementelor componente.

Procedând sistematic, putem obține lista exhaustivă a acestor submulțimi. Numărul elementelor din listă, deci numărul submulțimilor respective se notează prin simbolul următor: $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$. Aceste submulțimi (grupe) se mai numesc grupări generalizate.

În paranteză apar partiții ale numerelor naturale n şi k. Ordinea numerelor din cele două paranteze nu are importanță. Vom considera că avem:

$$l_1 \geq l_2 \geq ... \geq l_m ; \; \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_\mu .$$

3 Problema distribuirii obiectelor în căsuțe

Considerăm k obiecte (μ clase de obiecte, din clasa i având λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = k$) şi m căsuțe.

Se împart cele k obiecte în cele m căsuțe astfel încât căsuța j să primească cel mult l_j obiecte (deci nici un obiect, unul sau mai multe, maximum l_j). Numărul de distribuiri posibile este: $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$, $k \leq n$.

4 Demonstrația echivalenței dintre problema grupărilor şi cea a distribuirilor

Pe cazul cel mai general să considerăm în cazul problemei I (a grupărilor) următoarea grupare:

$$\underbrace{a_1 a_2}_{\lambda_1}\ldots\underbrace{a_i \ldots a_k}_{\lambda_\mu}$$

unde $a_i \in \{1,2,....,m\}$, i = 1,2,…,k.

În cazul problemei II (a distribuirilor) considerăm obiectele A_i (i = 1,2,…,k). Dacă $a_i = j$, $j \in \{1,2,...,m\}$, rezultă că obiectul A_i se plasează în căsuța j. Pe baza acestui principiu fiecărei grupări îi corespunde o distribuire şi invers. Deci între mulțimea grupărilor şi cea a distribuirilor se poate stabili o corespondență biunivocă, ceea ce înseamnă că ele au acelaşi număr de elemente.

Exemplu: $G_{4(2,1,1)}^{3(2,1)} = 7$.

Vom construi sistematic două tabele, corespunzând celor două probleme.

I	II		
Obiecte: 1123	Obiecte: AAB		
112	AA	B	
113	AA		B
121	AB	A	
131	AB		A
123	A	A	B
132	A	B	A
231	B	A	A

În tabelul din stânga avem în vedere (fără a evidenția în mod expres acest lucru) împărțirea grupelor în cele două zone de lungime 2, respectiv 1.

Deci, cele două probleme sunt echivalente (duale).

5 Calculul numărului $G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$

Înainte de a prezenta algoritmul de calcul, vom face observația că numărul de mai sus reprezintă şi numărul injecțiilor între două mulțimi multiple [3].

Deoarece deducerea algoritmului este făcută în lucrările [2] şi [3], redăm mai jos modul general de calcul şi apoi tratăm un exemplu concret.

a) Se calculează polinomul:

$$P = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot P_{\lambda_\mu} \cdot P_{n-k},$$

unde $P_{\lambda_i} = P_{\lambda_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda_i})$ este polinomul de tip Newton, de grad λ_i, în λ_i nedeterminate şi la fel, $P_{n-k} = P_{n-k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k})$.

Deci, $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda)$ va avea gradul n şi λ nedeterminate, unde $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu, n-k)$.

b) Se înlocuieşte în P:

$$x_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + \ldots + y_m^\lambda.$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1} y_2^{l_2} \ldots y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Polinomul general de tip Newton are forma [2]:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n \\ k_1, k_2, \ldots, k_n \geq 0}} \frac{1}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! \ldots n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

Aplicând formula generală de mai sus se obţin uşor primele patru polinoame de tip Newton:

$$P_1 = x_1$$
$$P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right)$$
$$P_3 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1 x_2 + 2x_3\right)$$
$$P_4 = \frac{1}{24}\left(x_1^4 + 6x_1^2 x_2 + 8x_1 x_3 + 3x_2^2 + 6x_4\right)$$

Menţionăm, fără a insista aici asupra acestui aspect, că aplicând metoda de numărare Pólya– de Bruijn [1] în cazul problemei noastre, se obţine în fond metoda de calcul expusă mai sus. Polinoamele de tip Newton apar ca polinoame indicatoare de cicluri pentru grupurile simetrice de permutări.

6 Formulă de recurenţă

Există următoarea formulă de recurenţă, care rezultă imediat din definiţie:

$$G_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)} = \sum_R G_{k(x_1, x_2, \ldots, x_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}$$

unde R este mulţimea soluţiilor (x_1, x_2, ..., x_m) în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = k$$

cu condiţiile: $0 \leq x_i \leq l_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Suma se face pe mulţimea R a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are |R| termeni (cardinalul mulţimii R).

Avem:

$$|R| = C^{k}_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}.$$

În formula de mai sus pentru |R| apar combinările generalizate, care sunt un caz particular al grupărilor generalizate, pentru $\mu = 1$.

Formula de recurență furnizează și ea o metodă pentru calculul numărului grupărilor generalizate, respectiv al injecțiilor între două mulțimi multiple.

7 Aplicații

În continuare, vom calcula numărul $N = G^{4(2,1,1)}_{5(2,2,1)}$ utilizând algoritmul expus și respectiv formula de recurență.

Vom utiliza la început algoritmul prezentat mai sus în acest articol (metoda polinoamelor de tip Newton).

Avem:

$$P = P_2 \cdot P_1^3 = \frac{1}{2}\left(x_1^5 + x_1^3 x_2\right)$$

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

$$P = \frac{1}{2}\left[(y_1 + y_2 + y_3)^5 + (y_1 + y_2 + y_3)^3 \left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)\right]$$

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{5!}{2!\,2!\,1!} + \frac{3!}{0!\,2!\,1!} + \frac{3!}{2!\,0!\,1!}\right) = 18.$$

Vom calcula același număr utilizând a doua metodă de calcul, respectiv formula de recurență. Putem scrie:

$$G^{4(2,1,1)}_{5(2,2,1)} = \sum_{R} G^{4(2,1,1)}_{4(x_1, x_2, x_3)},$$

unde R este mulțimea soluțiilor în numere naturale ale ecuației:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$

cu condițiile: $0 \le x_1 \le 2$, $0 \le x_2 \le 2$, $0 \le x_3 \le 1$.

Avem: $|R| = C^{4}_{5(2,2,1)} = 3$.

Mulțimea R este: $R = \{(1,2,1), (2,1,1), (2,2,0)\}$.

Deci, putem scrie:

$$N = G^{4(2,1,1)}_{4(1,2,1)} + G^{4(2,1,1)}_{4(2,1,1)} + G^{4(2,1,1)}_{4(2,2,0)} = 2 \cdot G^{4(2,1,1)}_{4(2,1,1)} + G^{4(2,1,1)}_{4(2,2)}.$$

Dar, putem obține ușor, folosind metoda polinoamelor de tip Newton:

$$G^{4(2,1,1)}_{4(2,1,1)} = 7;\ G^{4(2,1,1)}_{4(2,2)} = 4.$$

Deci, $N = 2 \cdot 7 + 4 = 18$.

S-a obținut același rezultat ca și cel dedus prin utlilizarea primei metode (metoda polinoamelor de tip Newton).

Tabelele cu grupări, respectiv cu distribuiri, sunt redate în continuare.

I	II		
Obiecte:11223	Obiecte: AABC		
1122	AA	BC	
1123	AA	B	C
1132	AA	C	B
1212	AB	AC	
1213	AB	A	C
1221	AC	AB	
1223	A	AB	C
1231	AC	A	B
1232	A	AC	B
1312	AB	C	A
1321	AC	B	A
1322	A	BC	A
2211	BC	AA	
2213	B	AA	C
2231	C	AA	B
2311	BC	A	A
2312	B	AC	A
2321	C	AB	A

Ca observație finală vom spune că simbolul studiat în prezentul articol generalizează conceptele clasice de aranjamente, combinări, permutări, simple şi cu repetiție.

Bibliografie

[1] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[2] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecțiilor între două mulțimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecționare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81.

[3] V. M. Popa, *Numărarea injecțiilor între două mulțimi multiple,* Educația Matematică, vol. IV, nr. 2, Sibiu, 2008 (în curs de apariție) şi în volumul Matematică aplicată, Sibiu, 2005

[4] V. M. Popa, *Mulțimi multiple şi mulțimi ordonate*, Educația Matematică,vol.V,nr. 2, Sibiu, 2009 (în curs de apariție)

Universitatea „Lucian Blaga" Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth"
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Grupări barate generalizate

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we introduce generalized barred groupings by considering two dual combinatorial problems: the problem of object grouping and the problem of distributing objects into cells, both with two supplementary conditions. We also present a recurrence formula and applications.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

După cum se ştie, două probleme fundamentale din combinatorică sunt problema grupării obiectelor şi problema distribuirii obiectelor în căsuțe [1],[4].

În lucrarea [4] s-au prezentat aceste două probleme şi s-au introdus grupările generalizate notate prin $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$.

Tot pe baza acestor probleme vom introduce în continuare „grupările barate generalizate". Vom demonstra că cele două probleme de grupare a obiectelor, respectiv de distribuire a obiectelor în căsuțe (în cazul de față cu o condiție suplimentară față de problemele prezentate în [4]) sunt echivalente, apoi vom arăta modul de calcul al grupărilor barate generalizate.

Obiectele pot fi diferite sau identice (de aceeaşi clasă) iar căsuțele se consideră distincte şi neordonate (nu are importanță ordinea obiectelor dintr-o căsuță). Dacă o căsuță poate primi cel mult l_j obiecte, vom spune că această căsuță are capacitatea l_j. Ca şi în lucrarea [4], prin „grupă" de k obiecte vom înțelege o mulțime mai specială, în sensul că poate fi eventual ordonată şi poate conține eventual şi obiecte identice. De asemenea, vom considera şi grupe împărțite în „zone", în interiorul unei zone ordinea obiectelor neavând importanță. Reamintim că avem o condiție suplimentară şi anume ca fiecare grupă (submulțime) de tipul $k(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_\mu)$ să conțină cel puțin câte un element din fiecare clasă din mulțimea parțial multiplă Y de tipul $n(l_1, l_2, ..., l_m)$, $k \leq n, k \geq m$.

De exemplu, grupa:

112 13 23

are trei zone, conținând trei, două şi respectiv două obiecte. Ea este identică cu grupa:

121 13 32

dar diferă de grupa:

112 12 33.

Deci, două grupe sunt identice dacă (şi numai dacă) zonele corespunzătoare au aceeaşi componență. Aceste grupe sunt de fapt mulțimi parțial multiple şi parțial ordonate (a se vedea [3]).

2 Problema grupării obiectelor

Să considerăm o mulțime finită Y parțial multiplă de tipul $n(l_1, l_2, ..., l_m)$ [3]. Mulțimea Y conține deci m clase de elemente. Se poate spune că mulțimea Y conține m elemente distincte, elementul j repetându-se de l_j ori ($j = 1, 2, ..., m$) cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$.

Vom forma (pe rând) submulțimi parțial ordonate de tipul $k(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_\mu)$ ale mulțimii Y [3], cu condiția suplimentară că fiecare submulțime să conțină cel puțin câte un element din fiecare clasă din mulțimea Y, $k \leq n$, $k \geq m$.

Problema grupării obiectelor este de fapt problema formării acestor submulțimi, cu condiția suplimentară amintită mai sus. Aceste submulțimi sunt mulțimi parțial multiple (conținând elemente din mulțimea Y) şi parțial ordonate de tipul $k(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_\mu)$. Ele se mai numesc în combinatorică şi „grupe” (de elemente,de obiecte). Le vom nota simplu, prin scrierea alăturată a elementelor componente.

Procedând sistematic, putem obține lista exhaustivă a acestor submulțimi, cu condiția suplimentară de mai sus. Numărul elementelor din listă, deci numărul submulțimilor respective se notează prin simbolul următor: $\overline{G}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$. Aceste submulțimi (grupe) se numesc grupări barate generalizate.

În paranteză apar partiții ale numerelor naturale n şi k.Ordinea numerelor din cele două paranteze nu are importanță.Vom considera că avem:

$$l_1 \geq l_2 \geq ... \geq l_m;\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_\mu.$$

3 Problema distribuirii obiectelor în căsuțe

Considerăm k obiecte (μ clase de obiecte, din clasa i având λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = k$) şi m căsuțe.

Se împart cele k obiecte în cele m căsuțe astfel încât căsuța j să primească cel puțin un obiect şi cel mult l_j obiecte (deci un obiect sau mai multe, maximum l_j). Numărul de distribuiri posibile este: $\overline{G}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$, $k \leq n$, $k \geq m$.

4 Demonstrația echivalenței dintre problema grupărilor şi cea a distribuirilor

Pe cazul cel mai general să considerăm în cazul problemei I (a grupărilor) următoarea grupare:

$$\underbrace{a_1 a_2}_{\lambda_1}\ldots\underbrace{a_i\ldots a_k}_{\lambda_\mu}$$

unde $a_i \in \{1,2,\ldots,m\}$, i = 1,2,…,k şi fiecare valoare 1,2,…,m este luată cel puțin o dată.

În cazul problemei II (a distribuirilor) considerăm obiectele A_i (i = 1,2,…,k). Dacă $a_i = j$, $j \in \{1,2,\ldots,m\}$, rezultă că obiectul A_i se plasează în căsuța j. Pe baza acestui principiu fiecărei grupări îi corespunde o distribuire şi invers. Deci între mulțimea grupărilor şi cea a distribuirilor se poate stabili o corespondență biunivocă, ceea ce înseamnă că ele au acelaşi număr de elemente. În tabelul din dreapta nu vor exista căsuțe goale.

Exemplu:

$$\overline{G}^{4(3,1)}_{6(2,2,2)} = 9.$$

Vom construi sistematic două tabele, corespunzând celor două probleme.

I	II		
Obiecte: 112233	Obiecte: AAAB		
1132	AA	B	A
1332	A	B	AA
1123	AA	A	B
1231	AB	A	A
1233	A	A	AB
1232	A	AB	A
2331	B	A	AA
1223	A	AA	B
2231	B	AA	A

În tabelul din stânga avem în vedere (fără a evidenția în mod expres acest lucru) împărțirea grupelor în cele două zone de lungime 2, respectiv 1. Fiecare grupă conține toate obiectele 1,2,3. În tabelul din dreapta fiecare casuță conține cel puțin un obiect (nu există casuțe goale).

Deci, cele două probleme sunt echivalente (duale)

5 Formulă de recurență

Există următoarea formulă de recurență, care rezultă imediat din definiție:

$$\overline{G}^{k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)} = \sum_{\overline{R}} G^{k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)}_{k(x_1,x_2,\ldots,x_m)}$$

unde $\overline{R}$ este mulţimea soluţiilor (x_1, x_2, ..., x_m) în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condiţiile: $1 \leq x_i \leq l_i$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulţimea $\overline{R}$ a soluţiilor ecuaţiei de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are $|\overline{R}|$ termeni (cardinalul mulţimii R).

Avem:

$$|\overline{R}| = \overline{C}^{k}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}.$$

În formula de mai sus apar combinările barate generalizate, care sunt un caz particular al grupărilor barate generalizate, pentru $\mu = 1$.

Formula de recurenţă furnizează o metodă pentru calculul numărului grupărilor barate generalizate.

6 Calculul numărului $G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$

Vom indica modul de calcul al numerelor de forma $G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}$ (notaţii adaptate) care intervin în relaţia de recurenţă. Înainte de a prezenta algoritmul de calcul, vom face observaţia că numărul de mai sus reprezintă şi numărul bijecţiilor între două mulţimi multiple [2].

Deoarece deducerea algoritmului este facută în lucrarea [2], redăm mai jos modul general de calcul al acestui număr.

a) Se calculează polinomul $P = P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} ... P_{\lambda_\mu}$

unde $P_{\lambda_i} = P_{\lambda_i}(x_1, x_2, ..., x_{\lambda_i})$ este polinomul de tip Newton, de grad λ_i, în λ_i nedeterminate.

Deci, $P = P(x_1, x_2, ..., x_\lambda)$ va avea gradul $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$ şi λ nedeterminate, unde $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$.

b) Se înlocuieşte în P:

$$x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$$
$$.............................$$
$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Polinomul simetric de m nederminate $y_1, y_2, ..., y_m$ şi omogen de gradul n:

$$P_n = \sum_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_n \leq m} y_{i_1} y_{i_2} ... y_{i_n}$$

se poate exprima în funcţie de $x_1, x_2, ..., x_n$, unde:

$$x_i = \sum_{1 \leq j \leq m} y_j^i \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

având următoarea formă [2]:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+...+nk_n=n \\ k_1,k_2,...,k_n\geq 0}} \frac{1}{1^{k_1}k_1!2^{k_2}k_2!...n^{k_n}k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$$

Numărul de termeni din sumă este $P(n)$, adică numărul de moduri diferite de a scrie pe n ca o sumă de numere naturale, în care ordinea termenilor nu are importanță.

Aplicând fomula generală de mai sus, se obțin uşor primele patru polinoame de tip Newton:

$$P_1 = x_1$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$$

$$P_3 = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$$

$$P_4 = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4)$$

Menționăm, fără a insista aici asupra acestui aspect, că aplicând metoda de numărare Pólya – de Bruijn [1] în cazul probemei noastre, se obține în fond metoda de calcul expusă mai sus. Polinoamele P_{λ_i} apar ca polinoame indicatoare de cicluri pentru grupurile simetrice de permutări.

7 Aplicație

În continuare, vom calcula numărul $N = \overline{G}_{8(3,3,2)}^{7(5,2)}$ utilizând formula de recurență şi algoritmul expus.

Putem scrie:

$$\overline{G}_{8(3,3,2)}^{7(5,2)} = \sum_{\overline{R}} G_{7(x_1,x_2,x_3)}^{7(5,2)},$$

unde $\overline{R}$ este mulțimea soluțiilor în numere naturale ale ecuației:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,$$

cu condițiile: $1 \leq x_1 \leq 3$, $1 \leq x_2 \leq 3$, $1 \leq x_3 \leq 2$.

Avem: $\left|\overline{R}\right| = \overline{C}_{8(3,3,2)}^{7} = 3$.

Mulțimea R este: $R = \{(3,3,1), (3,2,2), (2,3,2)\}$.

Deci, putem scrie:

$$N = G_{7(3,3,1)}^{7(5,2)} + G_{7(3,2,2)}^{7(5,2)} + G_{7(2,3,2)}^{7(5,2)} = 2 \cdot G_{7(3,2,2)}^{7(5,2)} + G_{7(3,3,1)}^{7(5,2)}.$$

Dar, putem obține uşor, folosind metoda polinoamelor de tip Newton:

$$G_{7(3,2,2)}^{7(5,2)} = 6; \; G_{7(3,3,1)}^{7(5,2)} = 5.$$

Deci, $N = 2 \cdot 6 + 5 = 17$.

Tabelele cu grupări, respectiv cu distribuiri, sunt redate în continuare.

I	II		
Obiecte:11122233	Obiecte: AAAAABB		
1113322	AAA	BB	AA
1112323	AAA	AB	AB
1112322	AAA	ABB	A
1123312	AAB	AB	AA
1123322	AA	ABB	AA
1112233	AAA	AA	BB
1112223	AAA	AAB	B
1122313	AAB	AA	AB
1122312	AAB	AAB	A
1122323	AA	AAB	AB
1223311	ABB	AA	AA
1223312	AB	AAB	AA
1122213	AAB	AAA	B
1122233	AA	AAA	BB
1222311	ABB	AAA	A
1222313	AB	AAA	AB
2223311	BB	AAA	AA

Ca observație finală vom spune că simbolul studiat în prezentul articol generalizează conceptele urmatoare: aranjamente barate generalizate, combinări barate generalizate, grupări barate cu repetiție generalizate.

Bibliografie

[1] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[2] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecțiilor între două mulțimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecționare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81.

[3] V. M. Popa, *Mulțimi multiple şi mulțimi ordonate*, Educația Matematică,vol.V,nr. 2, Sibiu, 2009 (în curs de apariție) şi în prezentul volum

[4] V. M. Popa, *Grupări generalizate*, Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Cazuri speciale ale grupărilor generalizate

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we consider several special cases of generalized groupings. We also present two special cases of recurrence formula and applications.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

În unele lucrări anterioare ([1],[2],[3],[4]) s-au introdus aranjamentele generalizate, combinările generalizate, permutările generalizate şi grupările generalizate. Acestea au fost introduse pe baza a două probleme fundamentale din combinatorică: problema grupării obiectelor şi problema distribuirii obiectelor în căsuțe. S-au arătat relațiile de generalizare între aceste concepte precum şi modul în care acestea generalizează noțiunile fundamentale de aranjamente, combinări şi permutări, simple şi cu repetiție.

În prezenta lucrare vom introduce două noțiuni noi: grupările simple generalizate şi grupările cu repetiție generalizate şi vom arăta relațiile care există între aceste noi noțiuni şi conceptele amintite mai sus. Vom prezenta un tabel de generalizare şi vom pune în evidență toate relațiile de generalizare/particularizare care sunt valabile între mărimile din tabel, sub forma generală. Vom prezenta două forme speciale (particulare) ale relației de recurență pentru aranjamentele cu repetiție şi permutările cu repetiție. Vom deduce astfel o egalitate interesantă, cu substrat combinatorial. La capitolul aplicații vom arăta cazuri concrete (particulare) de aducere la forma generală (a grupărilor generalizate) pentru toate conceptele speciale din tabelul de generalizare.

2 Cazuri speciale

Grupările simple generalizate (membrul stâng) se introduc pe baza relației:

$$G_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)} = G_{n(1,1,\dots,1)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)}, \ m = n, \ k \le n.$$

După cum se observă, grupările simple generalizate sunt un caz particular al grupărilor generalizate. Ele generalizează noțiunile de aranjamete, combinări şi permutări simple.

Grupările cu repetiție generalizate (membrul stâng) se introduc pe baza relației:

$$g_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)} = G_{n(k,k,\dots,k)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)}, \ mk = n.$$

De asemenea, după cum se observă şi grupările cu repetiție generalizate sunt un caz particular al grupărilor generalizate. Ele generalizează noțiunile de aranjamente, combinări şi permutări cu repetiție

Există formulele de calcul [1] :

$$G_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)} = \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\dots\lambda_\mu!(n-k)!}, \ k \le n$$

$$g_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)} = c_m^{\lambda_1} c_m^{\lambda_2} \dots c_m^{\lambda_\mu}.$$

Evident, atât pentru grupările simple generalizate cât şi pentru grupările cu repetiție generalizate se pot formula problemele corespunzătoate de grupare a obiectelor, respectiv de distribuire a obiectelor în căsuțe.

Toate grupările definite anterior pot fi sistematizate într-un tabel recapitulativ din care rezultă şi cum unele le generalizează pe altele.

$G_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)}$	$g_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)}$	$G_{n(l_1,l_2,\dots,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)}$
A_n^k	a_m^k	$A_{n(l_1,l_2,\dots,l_m)}^k$
C_n^k	c_m^k	$C_{n(l_1,l_2,\dots,l_m)}^k$
P_n	p_m	$P_{n(l_1,l_2,\dots,l_m)}$

Din definiție, rezultă următoarele relații de generalizare:

1. $G_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)} = G_{n(1,1,\dots,1)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)}$ $(m = n)$
2. $A_n^k = G_n^{k(1,1,\dots,1)}$ $(\mu = k)$
3. $C_n^k = G_n^{k(\lambda_1)}$ $(\mu = 1, \ k = \lambda_1)$

4-5. $P_n = A_n^n$

6. $g_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = G_{n(k,k,...,k)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ $(mk = n)$

7. $a_m^k = g_m^{k(1,1,...,1)}$ $(\mu = k)$

8. $c_m^k = g_m^{k(\lambda_1)}$ $(\mu = 1,\ k = \lambda_1)$

9-10. $p_m = a_m^m$

11. $A_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^k = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(1,1,...,1)}$ $(\mu = k)$

12. $C_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^k = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1)}$ $(\mu = 1,\ k = \lambda_1)$

13. $P_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = A_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^n$

14. $A_n^k = A_{n(1,1,...,1)}^k$ $(m = n)$

15. $a_m^k = A_{n(k,k,...,k)}^k$ $(mk = n)$

16. $C_n^k = C_{n(1,1,...,1)}^k$ $(m = n)$

17. $c_m^k = C_{n(k,k,...,k)}^k$ $(mk = n)$

18. $P_n = P_{n(1,1,...,1)}$ $(m = n)$

19. $p_m = \sum_R P_{m(x_1,x_2,...,x_m)}$, unde R este mulțimea soluțiilor în numere naturale ale ecuației $x_1 + x_2 + ... + x_m = m$, unde $0 \le x_i \le m$, i = 1, 2, ..., m; numărul soluțiilor ecuației este $|R| = c_m^m$).

În relațiile de generalizare de mai sus apar două relații numerotate dublu: 4-5 și 9-10. Am făcut această numerotare dublă, pentru a exista o corespondență cu tabelul de la capitolul Aplicații, care urmează în lucrare (capitolul 4).

După cum se observă, simbolul cel mai general este cel din colțul din dreapta sus al tabelului, adică:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}.$$

El generalizează toate celelalte 11 simboluri din tabel și reprezintă evident grupările generalizate. După cum se știe, el reprezintă în același timp și numărul injecțiilor între două mulțimi multiple [4]. Prin formula de complementaritate poate fi adus la forma standard $k = n$ care reprezintă numărul bijecțiilor între două mulțimi multiple [1]

3 Relație de recurență, cazuri speciale

Pentru grupările generalizate există relația de recurență [4]:

$$G_{n(l_1,\, l_2,\, ...,\, l_m)}^{k(\lambda_1,\, \lambda_2,\, ...,\, \lambda_\mu)} = \sum_R G_{k(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_m)}^{k(\lambda_1,\, \lambda_2,\, ...,\, \lambda_\mu)}$$

unde R este mulțimea soluțiilor (x_1, x_2, ..., x_m) în numere naturale ale ecuației:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condițiile: $0 \le x_i \le l_i$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulțimea R a soluțiilor ecuației de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are |R| termeni (cardinalul mulțimii R).

Avem:

$$|R| = C^{k}_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}.$$

În formula de mai sus pentru |R| apar combinările generalizate, care sunt un caz particular al grupărilor generalizate, pentru $\mu = 1$.

Formula de recurență furnizează o metodă pentru calculul numărului grupărilor generalizate (şi pentru numărul injecțiilor între două mulțimi multiple).

a). Vom particulariza relația de mai sus.Avem:

$$G^{k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)}_{n(k,k,\dots,k)} = g^{k(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)}_{m}, \text{ unde } mk = n.$$

În particular:

$$G^{k(1,1,\dots,1)}_{n(k,k,\dots,k)} = g^{k(1,1,\dots,1)}_{m}, \text{ unde } mk = n.$$

Aplicăm relația generală:

$$G^{k(1,1,\dots,1)}_{n(k,k,\dots,k)} = \sum_R G^{k(1,1,\dots,1)}_{k(x_1,x_2,\dots,x_m)}$$

unde R este mulțimea soluțiilor $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ în numere naturale ale ecuației:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = k$$

cu condițiile: $0 \le x_i \le k$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Suma se face pe mulțimea R a soluțiilor ecuației de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are |R| termeni (cardinalul mulțimii R).

Avem:

$$|R| = C^{k}_{n(k,k,\dots,k)} = c^{k}_{m}.$$

Dar:

$$g^{k(1,1,\dots,1)}_{m} = a^{k}_{m} = m^k = \sum_R G^{k(1,1,\dots,1)}_{k(x_1,x_2,\dots,x_m)} = \sum_R \frac{k!}{x_1!x_2!\dots x_m!}.$$

Deci, obținem:

$$\sum_R \frac{k!}{x_1!x_2!\dots x_m!} = m^k$$

unde R este mulțimea soluțiilor ecuației $x_1 + x_2 + \dots + x_m = k$; $0 \le x_i \le k$; $i = 1,2,\dots,m$; $|R| = c^{k}_{m}$.

S-a obținut în acest fel o egalitate interesantă cu substrat combinatorial.

b). Putem particulariza în continuare, făcând $k = m$. Obținem:

$$p_m = a^{m}_{m} = m^m = \sum_R \frac{m!}{x_1!x_2!\dots x_m!}$$

unde R este mulțimea soluțiilor ecuației $x_1 + x_2 + \dots + x_m = m$; $0 \le x_i \le m$; $i = 1,2,\dots,m$; $|R| = c^{m}_{m}$.

Se poate deci scrie:

$$p_m = \sum_R P_m(x_1, x_2, ..., x_m)$$

unde R este mulțimea soluțiilor ecuației $x_1 + x_2 + ... + x_m = m$; $0 \le x_i \le m$; $i = 1,2,...,m$; $|R| = c_m^m$.

În acest fel am exprimat permutările cu repetiție cu ajutorul permutărilor generalizate (ca o sumă de permutări generalizate).

4 Aplicații

Vom arăta câteva exemple concrete de reducere la cazul grupărilor generalizate şi apoi la cazul standard.

1. $G_5^{3(2,1)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{3(2,1)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{5(2,1,2)} = 30$
2. $A_5^3 = G_5^{3(1,1,1)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{3(1,1,1)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{5(1,1,1,2)} = 60$
3. $C_5^3 = G_5^{3(3)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{3(3)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{5(3,2)} = 10$
4. $P_5 = A_5^5 = G_5^{5(1,1,1,1,1)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{5(1,1,1,1,1)} = 120$
5. $P_5 = A_5^5 = A_{5(1,1,1,1,1)}^5 = G_{5(1,1,1,1,1)}^{5(1,1,1,1,1)} = 120$
6. $g_5^{3(2,1)} = G_{15(3,3,3,3,3)}^{3(2,1)} = G_{15(3,3,3,3,3)}^{15(2,1,12)} = 75$
7. $a_5^3 = g_5^{3(1,1,1)} = G_{15(3,3,3,3,3)}^{3(1,1,1)} = G_{15(3,3,3,3,3)}^{15(1,1,1,12)} = 125$
8. $c_5^3 = g_5^{3(3)} = G_{15(3,3,3,3,3)}^{3(3)} = G_{15(3,3,3,3,3)}^{15(3,12)} = 35$
9. $p_5 = a_5^5 = g_5^{5(1,1,1,1,1)} = G_{25(5,5,5,5,5)}^{5(1,1,1,1,1)} = G_{25(5,5,5,5,5)}^{25(1,1,1,1,1,20)} = 3125$
10. $p_5 = a_5^5 = A_{25(5,5,5,5,5)}^5 = G_{25(5,5,5,5,5)}^{5(1,1,1,1,1)} = G_{25(5,5,5,5,5)}^{25(1,1,1,1,1,20)} = 3125$
11. $A_{5(2,2,1)}^3 = G_{5(2,2,1)}^{3(1,1,1)} = G_{5(2,2,1)}^{5(1,1,1,2)} = 18$
12. $C_{5(2,2,1)}^3 = G_{5(2,2,1)}^{3(3)} = G_{5(2,2,1)}^{5(3,2)} = 5$
13. $P_{5(2,2,1)} = A_{5(2,2,1)}^5 = G_{5(2,2,1)}^{5(1,1,1,1,1)} = 30$
14. $A_5^3 = A_{5(1,1,1,1,1)}^3 = G_{5(1,1,1,1,1)}^{3(1,1,1)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{5(1,1,1,2)} = 60$
15. $a_5^3 = A_{15(3,3,3,3,3)}^3 = G_{15(3,3,3,3,3)}^{3(1,1,1)} = G_{15(3,3,3,3,3)}^{15(1,1,1,12)} = 125$
16. $C_5^3 = C_{5(1,1,1,1,1)}^3 = G_{5(1,1,1,1,1)}^{3(3)} = G_{5(1,1,1,1,1)}^{5(3,2)} = 10$
17. $c_5^3 = C_{15(3,3,3,3,3)}^3 = G_{15(3,3,3,3,3)}^{3(3)} = G_{15(3,3,3,3,3)}^{15(3,12)} = 35$

18. $P_5 = P_{5(1,1,1,1,1)} = A^5_{5(1,1,1,1,1)} = G^{5(1,1,1,1,1)}_{5(1,1,1,1,1)} = 120$

19. $p_5 = \sum_R P_{5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)} = \sum_R A^5_{5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)} = \sum_R G^{5(1,1,1,1,1)}_{5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)} =$

$= G^{5(1,1,1,1,1)}_{25(5,5,5,5,5)} = G^{25(1,1,1,1,1,20)}_{25(5,5,5,5,5)} = 3125$

unde R este mulțimea soluțiilor ecuației: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$, cu condițiile: $0 \le x_i \le 5$, $i = 1,2,...,m$, $|R| = c_5^5$.

Pentru înțelegerea profundă a conținutului acestei lucrări propunem cititorului rezolvarea următoarelor teme.

1.Să se formuleze problema grupării obiectelor pentru fiecare din cele 11 cazuri speciale din tabelul de generalizare.

2.Să se formuleze problema distribuirii obiectelor în căsuțe pentru fiecare din cele 11 cazuri speciale din tabelul de generalizare.

3.Să se particularizeze formula de recurență valabilă pentru grupările generalizate pentru fiecare din cele 11 cazuri speciale din tabelul de generalizare. De fapt, pentru cazul aranjamentelor cu repetiție şi pentru cazul permutărilor cu repetiție, particularizările respective sunt deja făcute (la capitolul 3 din lucrare).

În final mai facem observația că în conformitate cu cele arătate anterior, numărul de distribuiri a k obiecte diferite în m căsuțe este egal cu $a_m^k = m^k$. Acest număr este determinat printr-o altă metodă în articolul „Posibilitățile de distribuire a n obiecte la k persoane" de Tudor Zamfirescu, din Gazeta Matematică nr. 11/1965. Metoda respectivă este în orice caz mai laborioasă decât aplicarea formulei de mai sus.

Bibliografie

[1] V. M. Popa, *Matematică aplicată,* Sibiu, 2005

[2] V. M. Popa, *Aranjamente generalizate,* Educația Matematică, vol. I, nr. 2, Sibiu, 2005

[3] V. M. Popa, *Combinări generalizate,* Educația Matematică, vol.II, nr. 1-2, Sibiu, 2006

[4] V. M. Popa, *Grupări generalizate*, Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

Universitatea „Lucian Blaga" Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth"
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Cazuri speciale ale grupărilor barate generalizate

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we consider several special cases of generalized barred groupings. We also present three special cases of recurrence formula and applications.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

Într-o lucrare anterioară [4] s-au introdus grupările barate generalizate. Acestea au fost introduse pe baza a două probleme fundamentale duale din combinatorică: problema grupării obiectelor şi problema distribuirii obiectelor în căsuţe (în cazul de faţă cu o condiţie suplimentară faţă de cazul grupărilor generalizate). Vom introduce în lucrarea de faţă noţiunile de grupări barate cu repetiţie generalizate, aranjamente barate generalizate şi combinări barate generalizate. Vom arăta relaţiile de generalizare între grupările barate generalizate şi aceste concepte precum şi modul în care acestea generalizează noţiunile fundamentale de aranjamente şi combinări barate cu repetiţie.

Vom prezenta un tabel de generalizare şi vom pune în evidenţă toate relaţiile de generalizare/particularizare care sunt valabile între mărimile din tabel, sub forma generală. Vom prezenta forma generală şi o formă specială (particulară) a relaţiei de recurenţă valabilă pentru aranjamentele barate cu repetiţie, pentru aranjamentele barate generalizate şi pentru combinările barate generalizate. Vom deduce astfel o egalitate interesantă, cu substrat combinatorial şi respectiv vom pune în evidenţă două formule de calcul. La capitolul aplicaţii vom arăta cazuri concrete (particulare) de aducere la forma generală (a grupărilor barate generalizate) pentru toate conceptele speciale din tabelul de generalizare.

2 Cazuri speciale

Grupările barate cu repetiție generalizate (membrul stâng) se introduc pe baza relației:

$$\overline{g}_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \overline{G}_{n(k-m+1,k-m+1,...,k-m+1)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}, \; m(k-m+1)=n.$$

Grupările barate cu repetiție generalizate sunt un caz particular al grupărilor generalizate. Ele generalizează noțiunile de aranjamente şi combinări barate cu repetiție.

Aranjamentele barate generalizate (membrul stâng) se introduc pe baza relației:

$$\overline{A}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k} = \overline{G}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(1,1,...,1)}.$$

Ele sunt deci un caz particular al grupărilor barate generalizate şi generalizează aranjamentele barate cu repetiție.

Combinările barate generalizate (membrul stâng) se introduc pe baza relației:

$$\overline{C}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k} = \overline{G}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1)}.$$

Ele sunt deci un caz particular al grupărilor barate generalizate şi generalizează combinările barate cu repetiție.

În ce priveşte aranjamentele barate cu repetiție şi combinarile barate cu repetiție (numite astfel în lucrarea de față), ele reprezintă de fapt numărul surjecțiilor între două mulțimi, respectiv numărul surjecțiilor crescătoare între două mulțimi şi sunt noțiuni clasice şi bine cunoscute în combinatorică [1].

Există formulele de calcul [1]:

$$\overline{g}_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}C_m^i c_i^{\lambda_1} c_i^{\lambda_2} ... c_i^{\lambda_\mu} \; ; \; k \ge m$$

$$\overline{a}_m^k = m^k - C_m^1(m-1)^k + C_m^2(m-2)^k - ... + (-1)^{m-1}C_m^{m-1}; \; k \ge m$$

$$\overline{c}_m^k = C_{k-1}^{m-1}; \; k \ge m.$$

Evident, pentru toate noțiunile introduse mai sus se pot formula problemele corespunzătoate de grupare a obiectelor, respectiv de distribuire a obiectelor în căsuțe.

Toate grupările definite anterior pot fi sistematizate într-un tabel recapitulativ din care rezultă şi cum unele le generalizează pe altele.

$\overline{g}_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$	$\overline{G}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$
$\overline{a}_m^k$	$\overline{A}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k}$
$\overline{c}_m^k$	$\overline{C}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k}$

Din definiție, rezultă următoarele relații de generalizare:

1. $\overline{g}_m^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \overline{G}_{n(k-m+1,k-m+1,...,k-m+1)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$ $\quad (m(k-m+1)=n)$
2. $\overline{a}_m^k = \overline{g}_m^{k(1,1,...,1)}$ $\quad (\mu = k)$

3. $\overline{c}_m^k = \overline{g}_m^{k(\lambda_1)}$ $(\mu = 1,\ k = \lambda_1)$

4. $\overline{A}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^k = \overline{G}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^{k(1,1,\ldots,1)}$ $(\mu = k)$

5. $\overline{C}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^k = \overline{G}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^{k(\lambda_1)}$ $(\mu = 1,\ k = \lambda_1)$

6. $\overline{a}_m^k = \overline{A}_{n(k-m+1,k-m+1,\ldots,k-m+1)}^k$ $(m(k - m + 1) = n)$

7. $\overline{c}_m^k = \overline{C}_{n(k-m+1,k-m+1,\ldots,k-m+1)}^k$ $(m(k - m + 1) = n)$

După cum se observă, simbolul cel mai general este cel din colţul din dreapta – sus al tabelului, adică: $\overline{G}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)}$.

El generalizează toate celelalte 5 simboluri din tabel şi reprezintă evident grupările barate generalizate. Se poate deduce uşor că în situaţia în care $k = n$ valoarea lui este egală cu cea a simbolului general standard de la grupările generalizate, care reprezintă numărul bijecţiilor între două mulţimi multiple [4].

În ce priveşte celelalte 6 simboluri care apăreau în tabelul grupărilor generalizate dar nu apar în tabelul de mai sus al grupărilor barate generalizate, ele se pot defini dar aceste cazuri sunt banale.

$$\overline{G}_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)} = \overline{G}_n^{n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)} = \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_\mu!} \quad (k = n)$$

$$\overline{A}_n^k = A_n^n = n! \quad (k = n)$$

$$\overline{C}_n^k = C_n^n = 1 \quad (k = n)$$

$$\overline{P}_n = P_n = n!$$

$\overline{p}_m = \overline{a}_m^m = m!$, care se mai poate scrie:

$m^m - C_m^1(m-1)^m + C_m^2(m-2)^m - \ldots + (-1)^{m-1}C_m^{m-1} = m!$, ceea ce reprezintă o egalitate interesantă.

$$\overline{P}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_\mu)} = \overline{A}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_\mu)}^n = A_{n(l_1,l_2,\ldots,l_\mu)}^n = \frac{n!}{l_1!l_2!\ldots l_m!}.$$

3 Relaţie de recurenţă, cazuri speciale

Există următoarea formulă de recurenţă, care rezultă imediat din definiţie:

$$\overline{G}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)} = \sum_{\overline{R}} G_{k(x_1,x_2,\ldots,x_m)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)}$$

unde $\overline{R}$ este mulţimea soluţiilor $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ în numere naturale ale ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = k$$

cu condiţiile: $1 \le x_i \le l_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Suma se face pe mulțimea $\overline{R}$ a soluțiilor ecuației de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are $|\overline{R}|$ termeni (cardinalul mulțimii R). Avem:

$$|\overline{R}| = \overline{C}^{k}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}.$$

În formula de mai sus apar combinările barate generalizate, care sunt un caz particular al grupărilor barate generalizate, pentru $\mu = 1$.

Formula de recurență furnizează o metodă pentru calculul numărului grupărilor barate generalizate. Numerele care apar în membrul drept se calculează utilizând algoritmul prezentat în lucrarea [2].

a). Vom particulariza relația de recurență, pentru cazul aranjamentelor barate cu repetiție. Avem:

$$\overline{G}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}_{n(k-m+1,k-m+1,...,k-m+1)} = \overline{g}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}_{m}; \ m(k-m+1) = n.$$

În particular:

$$\overline{G}^{k(1,1,...,1)}_{n(k-m+1,k-m+1,...,k-m+1)} = \overline{g}^{k(1,1,...,1)}_{m}.$$

Aplicăm relația generală:

$$\overline{G}^{k(1,1,...,1)}_{n(k-m+1,\ k-m+1,\ ...,\ k-m+1)} = \sum_{\overline{R}} G^{k(1,1,...,1)}_{k(x_1, x_2, ..., x_m)}$$

unde $\overline{R}$ este mulțimea soluțiilor ($x_1, x_2, ..., x_m$) în numere naturale ale ecuației:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condițiile: $1 \le x_i \le k-m+1$, $i = 1, 2, ..., m$.

Suma se face pe mulțimea $\overline{R}$ a soluțiilor ecuației de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are $|\overline{R}|$ termeni (cardinalul mulțimii $\overline{R}$).

Avem:

$$|\overline{R}| = \overline{C}^{k}_{n(k-m+1,k-m+1,...,k-m+1)} = \overline{c}^{k}_{m}.$$

Dar: $\overline{g}^{k(1,1,...,1)}_{m} = \overline{a}^{k}_{m} = m^k - C^1_m(m-1)^k + C^2_m(m-2)^k - ... + (-1)^{m-1}C^{m-1}_m, \ k \ge m$.

Deci, obținem:

$$\sum_{\overline{R}} \frac{k!}{x_1!x_2!...x_m!} = m^k - C^1_m(m-1)^k + C^2_m(m-2)^k - ... + (-1)^{m-1}C^{m-1}_m, \ k \ge m,$$

unde $\overline{R}$ are semnificația de mai sus.

S-a obținut în acest fel o egalitate interesantă cu substrat combinatorial.

b). Vom particulariza relația de recurență pentru cazul aranjamentelor barate generalizate.

Avem: $\overline{A}^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \overline{G}^{k(1,1,...,1)}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$, $k \le n$, $k \ge m$.

Deci: $\overline{A}^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = \sum_{\overline{R}} G^{k(1,1,...,1)}_{k(x_1,x_2,...,x_m)} = \sum_{\overline{R}} \frac{k!}{x_1!x_2!...x_m!}$

unde $\overline{R}$ este mulțimea soluțiilor ($x_1, x_2, ..., x_m$) în numere naturale ale ecuației:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condițiile: $1 \le x_i \le l_i$, $i = 1, 2, ..., m$.

Suma se face pe mulțimea $\overline{R}$ a soluțiilor ecuației de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are $|\overline{R}|$ termeni (cardinalul mulțimii R).

Avem:

$$|\overline{R}| = \overline{C}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k}.$$

În formula de mai sus apar combinările barate generalizate, care sunt un caz particular al grupărilor barate generalizate, pentru $\mu = 1$.

Formula de recurență furnizează o metodă pentru calculul numărului aranjamentelor barate generalizate.

c). Vom particulariza relația de recurență pentru cazul combinărilor barate generalizate.

Avem: $\overline{C}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k} = \overline{G}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(k)}$, $k \le n$, $k \ge m$.

Deci: $\overline{C}_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k} = \sum_{\overline{R}} G_{k(x_1,x_2,...,x_m)}^{k(k)} = \sum_{\overline{R}} 1 = |\overline{R}|$

unde $\overline{R}$ este mulțimea soluțiilor (x_1, x_2, ..., x_m) în numere naturale ale ecuației:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

cu condițiile: $1 \le x_i \le l_i$, i = 1, 2, ..., m.

Suma se face pe mulțimea $\overline{R}$ a soluțiilor ecuației de mai sus, prin urmare suma din membrul drept are $|\overline{R}|$ termeni (cardinalul mulțimii R).

Avem:

$$|\overline{R}| = \overline{C}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k}.$$

În formula de mai sus apar combinările barate generalizate, care sunt un caz particular al grupărilor barate generalizate, pentru $\mu = 1$.

Formula de recurență furnizează o metodă pentru calculul numărului combinărilor barate generalizate.

Deci, numărul combinărilor barate generalizate este egal cu numărul soluțiilor cu numere naturale strict pozitive ale unei ecuații diofantice liniare, cu coeficienți unitari şi cu limitări superioare ale necunoscutelor.

4 Aplicații

Vom arăta câteva exemple concrete de reducere la cazul grupărilor barate generalizate.

1. $\overline{g}_3^{4(2,2)} = \overline{G}_{6(2,2,2)}^{4(2,2)} = 12$
2. $\overline{a}_3^{4} = \overline{g}_3^{4(1,1,1,1)} = \overline{G}_{6(2,2,2)}^{4(1,1,1,1)} = 36$
3. $\overline{c}_3^{4} = \overline{g}_3^{4(4)} = \overline{G}_{6(2,2,2)}^{4(4)} = 3$
4. $\overline{A}_{5(2,2,1)}^{3} = \overline{G}_{5(2,2,1)}^{3(1,1,1)} = 6$

5. $\overline{C}^{3}_{5(2,2,1)} = \overline{G}^{3(3)}_{5(2,2,1)} = 1$

6. $\overline{a}^{4}_{3} = \overline{A}^{4}_{6(2,2,2)} = \overline{G}^{4(1,1,1,1)}_{6(2,2,2)} = 36$

7. $\overline{c}^{4}_{3} = \overline{C}^{4}_{6(2,2,2)} = \overline{G}^{4(4)}_{6(2,2,2)} = 3$

Pentru înțelegerea profundă a conținutului acestei lucrări propunem cititorului rezolvarea următoarelor teme.

1.Să se formuleze problema grupării obiectelor pentru fiecare din cele 5 cazuri speciale din tabelul de generalizare.

2.Să se formuleze problema distribuirii obiectelor în căsuțe pentru fiecare din cele 5 cazuri speciale din tabelul de generalizare.

3.Să se particularizeze formula de recurență valabilă pentru grupările barate generalizate pentru fiecare din cele 5 cazuri speciale din tabelul de generalizare. De fapt, pentru cazul aranjamentelor barate cu repetiție, a aranjamentelor barate generalizate şi a combinărilor barate generalizate, particularizările respective sunt deja făcute (la capitolul 4 din lucrare).

Bibliografie

[1] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[2] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecțiilor între două mulțimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecționare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81

[3] V. M. Popa, *Mulțimi multiple şi mulțimi ordonate*, Educația Matematică, vol.V, nr. 2, Sibiu, 2009 (în curs de apariție)

[4] V. M. Popa, *Grupări barate generalizate*, Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

Universitatea „Lucian Blaga" Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth"
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

O utilizare combinatorială a polinoamelor lui Newton

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we consider a new problem of distributing objects into cells, with a supplementary condition. We also present a calculating algorithm using the Newton polynomials method, a recurrence formula, the symmetry property and applications.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

Într-o lucrare anterioară [3] s-a considerat o problemă de distribuire a obiectelor în căsuţe, pe care o reamintim în continuare. Problema era legată de numărarea bijecţiilor între două mulţimi multiple.

Este vorba de o problemă de distribuire a unor obiecte în căsuţe distincte, neordonate (nu are importanţă ordinea obiectelor în căsuţe). Considerăm n obiecte (μ clase de obiecte, clasa i conţinând λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$) şi m căsuţe de capacităţi l_j, cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$. Se distribuie cele n obiecte în cele m căsuţe. Numărul de distribuiri posibile se notează astfel: $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$. În simbolul general anterior, în cele două paranteze apar partiţii ale numărului natural n. Ordinea indicilor din paranteze nu are importanţă. Se notează atât indicii de jos cât şi cei de sus în ordinea descrescătoare. Dacă în urma aplicării unor formule de calcul apar indici nuli, aceştia vor fi eliminaţi.

În prezenta lucrare, vom considera o problemă asemănătoare, dar mai restrictivă (cu o condiţie suplimentară şi anume căsuţele să primească numai obiecte distincte). La început vom enunţa această problemă şi apoi vom determina numărul acestor distribuiri de obiecte în căsuţe, având în vedere condiţia amintită mai sus.

2 O nouă problemă de distribuire a obiectelor în căsuțe

Considerăm o problemă de distribuire a unor obiecte în căsuțe distincte, neordonate (nu are importanță ordinea obiectelor în căsuțe). Considerăm n obiecte (μ clase de obiecte, clasa i conținând λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu}\lambda_i = n$) şi m căsuțe de capacități l_j, cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$. Se distribuie cele n obiecte în cele m căsuțe astfel încât fiecare căsuță să primească numai obiecte distincte. Numărul de distribuiri posibile, cu această condiție, se notează astfel: $H_{n(l_1, l_2, \dots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu)}$. În simbolul general anterior, în cele două paranteze apar partiții ale numărului natural n. Ordinea indicilor din paranteze nu are importanță. Vom prefera să notăm atât indicii de jos cât şi cei de sus în ordinea descrescătoare. Dacă în urma aplicării unor formule de calcul apar indici nuli, aceştia vor fi eliminați. Trebuie să avem condițiile: $\lambda_i \le m$, $i = 1,2,\dots\mu$ şi datorită proprietății de dualitate (vezi cap. 4) şi condițiile: $l_j \le \mu$, $j = 1,2,\dots,m$. Dacă aceste condiții nu sunt îndeplinite, valoarea simbolului este nulă.

3 Algoritmul de numărare

În continuare, ne propunem să calculăm valoarea simbolului general introdus mai sus.

Vom considera la început un caz particular şi anume calculul numărului $H_{3(1,1,1)}^{3(2,1)}$. Prin urmare, trebuie să calculăm în câte moduri se pot distribui 3 obiecte (două de o clasă şi unul de altă clasă) în trei căsuțe de capacitate 1, deci fiecare căsuță primind un obiect.

Să presupunem că fiecare căsuță ar putea primi câte un obiect din fiecare clasă, deci în cazul nostru două obiecte diferite. Atunci, primele două obiecte se pot plasa astfel: un obiect în prima căsuță şi al doilea în a doua, în prima şi a treia sau în a doua şi a treia. Acestor posibilități de distribuire a primelor două obiecte le putem ataşa polinomul omogen şi simetric elementar de trei nedeterminate:

$$Q_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3.$$

Gradul polinomului este dat de numărul de obiecte de aceeaşi clasă (2) iar numărul de nedeterminate de numărul de căsuțe (3). Fiecare monom corespunde unei distribuiri.

La fel, al treilea obiect se poate plasa în căsuța întâi, a doua sau a treia. Scriem polinomul. ataşat:

$$Q_1 = y_1 + y_2 + y_3.$$

Fiecărei distribuiri a obiectelor din prima clasă i se poate ataşa o distribuire a obiectului din cealaltă clasă, totalitatea distribuirilor care rezultă reprezentându-se prin produsul celor două polinoame:

$$Q_2 \cdot Q_1 = y_1^2y_2 + y_1^2y_3 + y_2^2y_3 + y_1y_2^2 + y_1y_3^2 + y_2y_3^2 + 3y_1y_2y_3.$$

Coeficientul unui monom arată de câte ori apare el în polinomul final, deci câte distribuiri de tipul respectiv sunt posibile. În cazul nostru, fiecare căsuță primeşte un obiect, deci distribuirile sunt de tipul $y_1y_2y_3$. Numărul de distribuiri posibile este deci 3. Exponentul unei nedeterminate arată câte obiecte sunt în căsuța reprezentată de variabila respectivă. În acest fel, putem deduce de exemplu că numărul de distribuiri a celor trei obiecte considerate în trei căsuțe din care prima nu primeşte nici un obiect, a doua primeşte două obiecte, iar a treia primeşte un obiect este 1, etc.

O simplificare considerabilă a calculelor se poate face considerând reprezentarea polinoamelor simetrice şi omogene elementare prin sumele nedeterminatelor de aceeaşi putere (relațiile lui Newton; [2],[3]).

Astfel, notând:

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

avem: $Q_1 = x_1$; $Q_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2)$

$$Q = Q_1 \cdot Q_2 = \frac{1}{2}(x_1^3 - x_1x_2)]$$

$$Q = \frac{1}{2}[(y_1 + y_2 + y_3)^3 - (y_1 + y_2 + y_3)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

Cu teorema multinomului [1] extragem coeficientul monomului $y_1y_2y_3$:

$$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = 3.$$

Metoda expusă se poate aplica evident pe cazul general. Deci, pentru calculul simbolului general standard elementar $H_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)}$ se procedează astfel:

a) Se calculează polinomul $Q = Q_{\lambda_1} Q_{\lambda_2} \ldots Q_{\lambda_\mu}$

unde $Q_{\lambda_i} = Q_{\lambda_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda_i})$ este polinomul lui Newton, de grad λ_i, în λ_i nedeterminate.

Deci, $Q = Q(x_1, x_2, \ldots, x_\lambda)$ va avea gradul $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$ şi λ nedeterminate, unde $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)$.

b) Se înlocuieşte în Q:

$$x_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2$$

....

$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + \ldots + y_m^\lambda$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1} y_2^{l_2} \ldots y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui Q, care va fi chiar numărul căutat.

Polinomul simetric de m nederminate $y_1, y_2, \ldots, y_m$ şi omogen de gradul n elementar:

$$Q_n = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_n \le m} y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_n}$$

se poate exprima în funcţie de $x_1, x_2, ..., x_n$, unde:

$$x_i = \sum_{1\le j\le m} y_j^i \quad (i = 1,2,...,n)$$

având următoarea formă [2]:

$$Q_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+...+nk_n=n \\ k_1, k_2, ..., k_n \ge 0}} \frac{(-1)^{k_2+k_4+...}}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! ... n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}$$

Numărul de termeni din sumă este $P(n)$, adică numărul de moduri diferite de a scrie pe n ca o sumă de numere naturale, în care ordinea termenilor nu are importanţă.

Aplicând fomula generală de mai sus, se obţin uşor primele patru polinoame ale lui Newton:

$$Q_1 = x_1$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2)$$

$$Q_3 = \frac{1}{6}(x_1^3 - 3x_1x_2 + 2x_3)$$

$$Q_4 = \frac{1}{24}(x_1^4 - 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 - 6x_4)$$

Observăm că polinoamele lui Newton Q se pot obţine din polinoamele de tip Newton P prin înlocuirea nedeterminatelor cu indici pari cu opusele lor.

4 Formula de recurenţă pentru polinoamele Q_n

Pentru polinoamele lui Newton există o formulă de recurenţă. Notăm:

$$Q_i = \frac{1}{i!} D_i \quad (i = 0,1,2,...)$$

Avem următoarea formulă de recurenţă [2], [4]:

$$D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k A_n^k x_{k+1} D_{n-k} .$$

Prin convenţie, $Q_0 = D_0 = 1$.

Această formulă de recurenţă poate fi scrisă şi în formele următoare:

$$Q_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x_k Q_{n-k}$$

$$Q_n = \frac{x_1Q_{n-1} - x_2Q_{n-2} + ... + (-1)^{n-1} x_n Q_0}{n}$$

Formula de recurenţă permite calculul polinoamelor Q_n din aproape în aproape, aceasta fiind o nouă metodă de calcul, pe lîngă metoda care utilizează formula generală prezentată mai sus şi în care numărul termenilor este P(n), adică numărul partiţiilor numărului natural n.

5 Proprietatea de dualitate (simetrie) a simbolului $H_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$

Există relația:

$$H_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = H_{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}^{n(l_1,l_2,...,l_m)}.$$

<u>Demonstrație:</u>

Să considerăm la început un caz particular: $H_{7(3,2,1,1)}^{7(3,2,2)} = H_{7(3,2,2)}^{7(3,2,1,1)} = 5$

Scriem una dintre distribuirile posibile, corespunzător membrului stâng al egalității:

A	B	C	A	B	A	C	(obiecte)	(1)
1	1	1	2	2	3	4	(căsuțe)	

Putem interverti rolul literelor cu al cifrelor şi presupune că 1,2,3,4 indică categoriile de obiecte iar A, B,C căsuțele. Rearanjăm perechile:

1	2	3	1	2	1	4	(2)
A	A	A	B	B	C	C	

Exact aceleaşi perechi apar in (1) şi (2) numai că au fost inversate rândurile. Dar (2) poate fi interpretat ca reprezentând o distribuire formată cu 3 obiecte de clasa 1,două obiecte de clasa 2, un obiect de clasa 3 şi un obiect de clasa 4 în căsuțele A ,B şi C de capacități 3,2 şi respectiv 2. Dar aceasta este una dintre distribuirile corespunzătoare membrului drept al egalității de demonstrat. Rezultă o corespondență biunivocă între cele două mulțimi de distribuiri care vor avea deci acelaşi număr de elemente şi egalitatea din enunț este demonstrată, deoarece procedeul expus rămâne evident valabil pe cazul general.

Observație: Şi simbolul general standard ($k = n$) de la grupările generalizate [3],[5] (respectiv de la numărarea bijecțiilor între două mulțimi multiple) prezintă această proprietate de dualitate (simetrie), iar demonstrația este asemănătoare. Deci: $G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = G_{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}^{n(l_1,l_2,...,l_m)}$.

6 Aplicații

În continuare, vom calcula numărul $N = H_{5(2,2,1)}^{5(2,1,1,1)}$ utilizând algoritmul expus.

Vom utiliza algoritmul prezentat mai sus în acest articol (metoda polinoamelor lui Newton).

Avem:

$$Q = Q_2 \cdot Q_1^3 = \frac{1}{2}\left(x_1^5 - x_1^3 x_2\right)$$

$$x_1 = y_1 + y_2 + y_3$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

$$Q = \frac{1}{2}\left[(y_1 + y_2 + y_3)^5 - (y_1 + y_2 + y_3)^3 \left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)\right]$$

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{5!}{2!\,2!\,1!} - \frac{3!}{0!\,2!\,1!} - \frac{3!}{2!\,0!\,1!}\right) = 12.$$

Ca exercițiu, propunem cititorului să verifice prin calcul egalitățile:

$$H_{6(2,2,1,1)}^{6(2,2,1,1)} = 34$$

$$H_{6(2,2,1,1)}^{6(2,1,1,1,1)} = 78$$

$$H_{7(3,1,1,1,1)}^{7(3,2,1,1)} = 34$$

$$H_{7(2,2,2,1)}^{7(2,2,1,1,1)} = 117$$

şi să formuleze problemele corespunzătoare de distribuire a obiectelor în căsuțe, cu condiția ca fiecare căsuță să primească numai obiecte distincte. Pentru cazul particular de la capitolul 5 să se construiască tabelele cu distribuirile respective (în număr de 5 distribuiri, fiecare).

De asemenea, cititorul este invitat să formuleze o problemă de grupare a obiectelor, după modelul de la grupările generalizate [5].Ce condiție suplimentară apare în acest caz?

Vom menționa că problema prezentată poate fi rezolvată pentru diverse cazuri particulare (aplicații numerice) prin utilizarea calculatorului electronic. Autorul prezentului articol a realizat acest lucru, dar prezentarea acestui aspect nu face obiectul articolului de față. Se va reveni pentru expunerea algoritmului utilizat (bazat pe metoda enumerării) şi a programului de calculator respectiv, într-un articol viitor.

Bibliografie

[1] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[2] D. E. Knuth, *Tratat de programarea calculatoarelor, vol. I*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

[3] V. M. Popa, *Asupra numărării bijecțiilor între două mulțimi multiple*, Gazeta Matematică – Perfecționare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, vol. VII, nr. 2, Bucureşti, 1986, pag. 78-81.

[4] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958

[5] V. M. Popa, *Grupări generalizate,* Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

Universitatea „Lucian Blaga" Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth"
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Aspecte combinatoriale privind ecuația diofantică liniară cu coeficienți unitari

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we present some combinatorial aspects regarding the linear diophantine equation with unit coefficients. We consider the equation with superior limits of variables and the equation with double limits of variables. We also present a interesting combinatorial relation with generalized combinations.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 11D45

1 Introducere

În lucrarea de față vom pune în evidență unele aspecte combinatoriale privind ecuația diofantică liniară cu coeficienți unitari:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k .$$

Numerele k, x_i sunt naturale. De asemenea, limitările b_i şi l_i care pot exista pentru necunoscutele x_i ale ecuației, sunt numere naturale (i=1,2,…,m). Vom considera, pe rând, mai multe situații, funcție de plajele de valori pentru necunoscutele ecuației.

Ne interesează numărul soluțiilor ecuației, iar în unele situații şi lista (mulțimea) soluțiilor respective.

2 Ecuația I, cu limitări superioare ale necunoscutelor

Considerăm ecuația:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k \tag{1}$$

unde necunoscutele x_i verifică condițiile:

$$0 \leq x_i \leq l_i, i = 1,2,...,m. \tag{2}$$

Ținând seama de definiția combinărilor generalizate [2],[3], deducem imediat că numărul soluțiilor ecuației (1) care verifică condițiile (2) este $N = C^k_{n(l_1,l_2,...,l_m)}$, unde $n = \sum_{i=1}^{m} l_i$, $k \leq n$.

Exemplul I.

Pentru ecuația:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \text{ unde :}$$

$$0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 2, 0 \leq x_3 \leq 1, 0 \leq x_4 \leq 1$$

lista soluțiilor cu condițiile indicate este prezentată în continuare.

x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	1	1
0	2	0	1
0	2	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0
1	2	0	0
2	0	0	1
2	0	1	0
2	1	0	0
3	0	0	0

Caz particular 1: $l_1 = l_2 = ... = l_m = 1$.

Pentru ecuația:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condițiile:

$$0 \leq x_i \leq 1, i = 1,2,...,m$$

numărul soluțiilor ecuației este:

$$N = C^k_{n(1,1,...,1)} = C^k_m$$

unde $k \leq m, m = n$ (combinări simple).

Caz particular 2: $l_1 = l_2 = ... = l_m = k$.

Pentru ecuația:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condițiile:

$$0 \leq x_i \leq k, i = 1,2,...,m$$

numărul soluțiilor ecuației este:

$$N = C^k_{n(k,k,...,k)} = c^k_m$$

unde $mk = n$ (combinări cu repetiție).

3 Ecuaţia II, cu duble limitări ale necunoscutelor

Considerăm ecuaţia:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = k \tag{3}$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$b_i \le x_i \le l_i, \; i = 1,2,\ldots,m. \tag{4}$$

Pentru a calcula numărul soluţiilor ecuaţiei (3) care verifică condiţiile (4) facem substituţiile:

$$y_i = x_i - b_i. \tag{5}$$

Deci, $x_i = y_i + b_i$ şi înlocuind în ecuaţia (3) obţinem:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m = k - (b_1 + b_2 + \ldots + b_m) \tag{6}$$

cu condiţiile:

$$0 \le y_i \le l_i - b_i, \; i = 1,2,\ldots,m \tag{7}$$

care este de tipul ecuaţiei I.

Între mulţimea soluţiilor ecuaţiei (3) cu condiţiile (4) şi mulţimea soluţiilor ecuaţiei (6) cu condiţiile (7) există o corespondenţă biunivocă, stabilită prin intermediul relaţiilor (5). Ele au deci acelaşi număr de elemente (acelaşi cardinal).

Dacă notăm:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_m = n'$$

ecuaţia de mai sus se scrie:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m = k - n'$$

cu condiţiile:

$$0 \le y_i \le l_i - b_i, \; i = 1,2,\ldots,m.$$

Numărul soluţiilor ecuaţiei (3) cu condiţiile (4) este deci:

$$N = C^{k-n'}_{n-n'(l_1-b_1, l_2-b_2, \ldots, l_m-b_m)}$$

unde $n = l_1 + l_2 + \ldots + l_m$, $n' = b_1 + b_2 + \ldots + b_m$, $k \le n$, $n \ge n'$, $k \ge n'$.

Exemplul II.

Pentru ecuaţia:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9, \text{ unde :}$$

$$2 \le x_1 \le 5, 2 \le x_2 \le 4, 1 \le x_3 \le 2, 1 \le x_4 \le 2$$

lista soluţiilor cu condiţiile indicate este prezentată în continuare.

x_1	x_2	x_3	x_4
2	3	2	2
2	4	1	2
2	4	2	1
3	2	2	2
3	3	1	2
3	3	2	1
3	4	1	1

4	2	1	2
4	2	2	1
4	3	1	1
5	2	1	1

Caz particular 1: $b_i = 1, i = 1,2,...,m$.

Pentru ecuația:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condițiile:

$$1 \le x_i \le l_i, i = 1,2,...,m$$

folosim substituțiile:

$$y_i = x_i - 1$$

şi obținem ecuația:

$$y_1 + y_2 + ... + y_m = k - m$$

cu condițiile:

$$0 \le y_i \le l_i - 1, i = 1,2,...,m .$$

Numărul soluțiilor ecuației de mai sus, corespunzând cazului particular 1, este:

$$N = \overline{C}^{k}_{n(l_1,l_2,...,l_m)} = C^{k-m}_{n-m(l_1-1,l_2-1,...,l_m-1)} \text{, unde } k \le n, k \ge m .$$

Expresia pentru N cu combinări barate generalizate am scris-o ținând seama de definiția acestora şi folosind ecuația în necunoscutele x_i [4], iar expresia cu combinări generalizate s-a obținut de asemenea pe baza definiției, folosind ecuația cu necunoscutele y_i , sau din cea generală de la ecuația II, în urma particularizării de la cazul 1. Rezultă şi o egalitate interesantă (exprimarea combinărilor barate generalizate cu ajutorul combinărilor generalizate).

Caz particular 2: $l_i = b_i + k - n', i = 1,2,...,m$.

Pentru ecuația:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condițiile:

$$b_i \le x_i \le b_i + k - n', i = 1,2,...,m$$

folosim substituțiile:

$$y_i = x_i - b_i$$

şi obținem ecuația:

$$y_1 + y_2 + ... + y_m = k - (b_1 + b_2 + ... + b_m)$$

cu condițiile:

$$0 \le y_i \le k - n', i = 1,2,...,m .$$

Dacă notăm:

$$b_1 + b_2 + ... + b_m = n'$$

ecuația de mai sus se scrie:

$$y_1 + y_2 + ... + y_m = k - n'$$

cu condiţiile:

$$0 \le y_i \le k - n', i = 1,2,...,m .$$

Numărul soluţiilor ecuaţiei de mai sus, corespunzând cazului particular 2 este:

$$N = c_m^{k-n'}, \text{ unde } n' = b_1 + b_2 + ... + b_m,\ k \ge n'.$$

Expresia pentru N cu combinări cu repetiţie am scris-o ţinând seama de definiţia acestora, folosind ecuaţia în necunoscutele y_i (sau aplicând cazul particular 2 de la ecuaţia I).

<u>Caz particular 3</u>: $b_i = 1$ şi $l_i = 1 + k - m, i = 1,2,...,m$.

Pentru ecuaţia:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condiţiile:

$$1 \le x_i \le 1 + k - m, i = 1,2,...,m$$

folosim substituţiile:

$$y_i = x_i - 1$$

şi obţinem ecuaţia:

$$y_1 + y_2 + ... + y_m = k - m$$

cu condiţiile:

$$0 \le y_i \le k - m, i = 1,2,...,m .$$

Numărul soluţiilor ecuaţiei de mai sus, corespunzând cazului particular 3 este:

$$N = \overline{c}_m^{-k} = c_m^{k-m}, \text{ unde } k \ge m .$$

Expresia pentru N cu combinări barate cu repetiţie am scris-o ţinând seama de definiţia acestora şi folosind ecuaţia în necunoscutele x_i [4], iar expresia cu combinări cu repetiţie s-a obţinut de asemenea pe baza definiţiei, folosind ecuaţia cu necunoscutele y_i (sau aplicând cazul particular 2 de la ecuaţia I).

Am regăsit astfel egalitatea interesantă:

$$\overline{c}_m^{-k} = c_m^{k-m}, \text{ unde } k \ge m$$

(exprimarea combinărilor barate cu repetiţie cu ajutorul combinărilor cu repetiţie).

4 O relaţie combinatorială interesantă

Vom prezenta în continuare o relaţie în care intervin combinările generalizate şi care prin frumuseţea ei poate fi considerată o mică bijuterie matematică.

Considerăm mulţimile:

$$M_1 = \{0,1,...,l_1\}, M_2 = \{0,1,...,l_2\},...,M_m = \{0,1,...,l_m\}$$

unde $l_i \ge 1$ sunt numere naturale, i=1,2,...,m. Notăm $n = l_1 + l_2 + ... + l_m$.

De asemenea, considerăm mulţimea:

$$M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_m .$$

Elementele mulţimii M sunt m-uple de forma: $(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Numărul de elemente al mulțimii M (cardinalul mulțimii M) este:

$$|M| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_m| = (l_1+1)(l_2+1)\ldots(l_m+1)\,. \tag{8}$$

Am aplicat regula produsului (numărul de elemente al produsului cartezian).

Mulțimea M poate fi partiționată în n+1 mulțimi disjuncte, P_k (k=0,1,...,n) admițând că mulțimea P_k este formată din toate m-uplele $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ pentru care $\sum_{j=1}^{m} x_j = k$.

Prin urmare, numărul de elemente al mulțimii M se poate exprima şi astfel:

$$|M| = |P_0| + |P_1| + \ldots + |P_n|\,. \tag{9}$$

Am aplicat regula sumei (caz particular al principiului includerii şi al excluderii [1], pentru mulțimi disjuncte).

Dar, putem scrie:

$$|P_k| = C^{k}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}\,. \tag{10}$$

Ținând seama de (8), (9) şi (10) rezultă că există relația:

$$C^{0}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)} + C^{1}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)} + \ldots + C^{n}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)} = (l_1+1)(l_2+1)\ldots(l_m+1)\,. \tag{11}$$

Aceasta este relația în care intervin combinările generalizate, pe am dorit să o prezentăm.

Dacă în relația de mai sus facem $l_1 = l_2 = \ldots = l_m = 1$ şi deci n=m, obținem:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

cunoscuta relație cu combinări simple şi care este prezentă în toate manualele respectiv capitolele de combinatorică.

Bibliografie

[1] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[2] V. M. Popa, *Combinări generalizate,* Educația Matematică, vol. II, nr.1-2, Sibiu, 2006

[3] V. M. Popa, *Cazuri speciale ale grupărilor generalizate,* Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

[4] V. M. Popa, *Cazuri speciale ale grupărilor barate generalizate,* Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Aspecte combinatoriale privind ecuația diofantică liniară cu coeficienți naturali

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we present some combinatorial aspects regarding the linear diophantine equation with natural coefficients. We consider the equation with superior limits of variables and the equation with double limits of variables. We also present an interesting calculating method for number of particular case of equation with superior limits of variables.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 11D45

1 Introducere

În lucrarea de față vom pune în evidență unele aspecte combinatoriale privind ecuația diofantică liniară cu coeficienți naturali:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m = k.$$

Numerele k, a_i, x_i sunt naturale şi $a_i \neq 0$. De asemenea, limitările b_i şi l_i care pot exista pentru necunoscutele x_i ale ecuației, sunt numere naturale (i=1,2,…,m). Vom considera, pe rând, mai multe situații, funcție de plajele de valori pentru necunoscutele ecuației.

Ne interesează numărul soluțiilor ecuației, iar în unele situații şi lista (mulțimea) soluțiilor respective.

Toate considerațiile care se fac în prezentul articol ramân evident valabile şi în cazul particuluar $a_i = 1$, i=1,2,…,m, caz studiat în lucrarea [1] şi în care ecuația are interpretări combinatoriale suplimentare şi foarte interesante. Acestea sunt legate de noțiunile de combinări generalizate, combinări simple, combinări cu repetiție, combinări barate generalizate, combinări barate cu repetiție.

2 Ecuația I, cu limitări superioare ale necunoscutelor

Considerăm ecuația:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k \quad (1)$$

unde necunoscutele x_i verifică condițiile:

$$0 \le x_i \le l_i, \ i = 1,2,...,m . \quad (2)$$

Numărul soluțiilor acestei ecuații care verifică condițiile indicate se poate determina cu ajutorul unui program de calculator numit EDL-NUMAR. Lista acestor soluții se poate obține cu ajutorul unui program de calculator numit EDL-LISTA. Detalii privind aceste programe de calculator vor fi prezentate într-o lucrare viitoare.

Exemplul I.

Pentru ecuația:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 8, \text{ unde :}$$

$$0 \le x_1 \le 5, 0 \le x_2 \le 2, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 1$$

lista soluțiilor cu condițiile indicate este prezentată în continuare.

x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	1	1
0	1	2	0
1	2	0	1
1	2	1	0
2	0	1	1
2	0	2	0
3	1	0	1
3	1	1	0
4	2	0	0
5	0	0	1
5	0	1	0

Caz particular 1: $l_1 = l_2 = ... = l_m = 1$.

Pentru ecuația:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condițiile:

$$0 \le x_i \le 1, \ i = 1,2,...,m$$

numărul soluțiilor ecuației, respectiv lista soluțiilor ecuației se obțin ca mai sus, impunând evident noile limitări superioare ale necunoscutelor corespunzătoare acestui caz particular.

Caz particular 2: $l_i = \left[\dfrac{k}{a_i}\right]$, i=1,2,…,m.

Pentru ecuația:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condițiile:

$$0 \le x_i \le \left[\frac{k}{a_i}\right],\ i = 1,2,...,m$$

numărul soluțiilor ecuației, respectiv lista soluțiilor ecuației se obțin ca mai sus, impunând evident noile limitări superioare ale necunoscutelor corespunzătoare acestui caz particular. Aceste noi limitări sunt cele naturale (maxim posibile).

3 Ecuația II, cu duble limitări ale necunoscutelor

Considerăm ecuația:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k \tag{3}$$

unde necunoscutele x_i verifică condițiile:

$$b_i \le x_i \le l_i, i = 1,2,...,m. \tag{4}$$

Este evident că pentru a avea un număr de soluții mai mare decât zero, trebuie să avem îndeplinită şi condiția: $k \ge a_1b_1 + a_2b_2 + ...a_mb_m$.

Pentru a calcula numărul soluțiilor ecuației (3) care verifică condițiile (4) facem substituțiile:

$$y_i = x_i - b_i. \tag{5}$$

Deci, $x_i = y_i + b_i$ şi înlocuind în ecuația (3) obținem:

$$a_1y_1 + a_2y_2 + ... + a_my_m = k - (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_mb_m) \tag{6}$$

cu condițiile:

$$0 \le y_i \le l_i - b_i, i = 1,2,...,m \tag{7}$$

care este de tipul ecuației I.

Între mulțimea soluțiilor ecuației (3) cu condițiile (4) şi mulțimea soluțiilor ecuației (6) cu condițiile (7) există o corespondență biunivocă, stabilită prin intermediul relațiilor (5). Ele au deci acelaşi număr de elemente (acelaşi cardinal). Prin urmare, numărul soluțiilor ecuației (3) cu condițiile (4) se poate determina stabilind acest număr pentru ecuația (6) cu condițiile (7), folosind programul de calculator EDL-NUMAR. Lista soluțiilor ecuației (3) cu condițiile (4) se poate determina stabilind acestă listă pentru ecuația (6) cu condițiile (7), folosind programul de calculator EDL-LISTA şi apoi adaugând la fiecare număr y_i din lista respectivă numărul b_i.

Altfel, numărul soluțiilor acestei ecuații care verifică condițiile indicate se poate determina direct cu ajutorul unui program de calculator numit EDL-NUMAR-LIM.INF. Lista acestor soluții se poate obține cu ajutorul unui program de calculator numit EDL-LISTA-LIM.INF. Detalii privind aceste programe de calculator vor fi prezentate într-o lucrare viitoare.

<u>Exemplul II.</u>

Pentru ecuația:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 20, \text{ unde}:$$

$$2 \le x_1 \le 7, 2 \le x_2 \le 4, 1 \le x_3 \le 3, 1 \le x_4 \le 2$$

lista soluțiilor cu condițiile indicate este prezentată în continuare.

x_1	x_2	x_3	x_4
2	3	2	2
2	3	3	1
3	4	1	2
3	4	2	1
4	2	2	2
4	2	3	1
5	3	1	2
5	3	2	1
6	4	1	1
7	2	1	2
7	2	2	1

Caz particular 1: $b_i = 1, i = 1,2,...,m$.

Pentru ecuația:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condițiile:

$$1 \le x_i \le l_i, i = 1,2,...,m$$

folosim substituțiile:

$$y_i = x_i - 1$$

şi obținem ecuația:

$$a_1y_1 + a_2y_2 + ... + a_my_m = k - (a_1 + a_2 + ... + a_m)$$

cu condițiile:

$$0 \le y_i \le l_i - 1, i = 1,2,...,m.$$

Numărul soluțiilor ecuației, respectiv lista soluțiilor ecuației se obțin ca mai sus, impunând evident noile limitări superioare ale necunoscutelor corespunzătoare acestui caz particular.

Caz particular 2: $l_i = \left[\dfrac{a_ib_i + k - n'}{a_i}\right], n' = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_mb_m, i = 1,2,...,m$.

Pentru ecuația:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condițiile:

$$b_i \le x_i \le \left[\frac{a_ib_i + k - n'}{a_i}\right], n' = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_mb_m, i = 1,2,...,m.$$

folosim substituțiile:

$$y_i = x_i - b_i$$

şi obținem ecuația:

$$a_1y_1 + a_2y_2 + ... + a_my_m = k - (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_mb_m)$$

cu condițiile:

$$0 \le y_i \le \left[\frac{a_ib_i + k - n'}{a_i}\right] - b_i, i = 1,2,...,m.$$

Numărul soluțiilor ecuației, respectiv lista soluțiilor ecuației se obțin ca mai sus, impunând evident noile limitări superioare ale necunoscutelor corespunzătoare acestui caz particular.

Caz particular 3: $b_i = 1$ şi $l_i = \left[\frac{a_i + k - n'}{a_i}\right]$, $n' = a_1 + a_2 + ... + a_m$, $i = 1,2,...,m$.

Pentru ecuația:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k$$

unde necunoscutele x_i verifică condițiile:

$$1 \le x_i \le \left[\frac{a_i + k - n'}{a_i}\right], n' = a_1 + a_2 + ... + a_m, i = 1,2,...,m.$$

folosim substituțiile:

$$y_i = x_i - 1$$

şi obținem ecuația:

$$a_1y_1 + a_2y_2 + ... + a_my_m = k - (a_1 + a_2 + ... + a_m)$$

cu condițiile:

$$0 \le y_i \le \left[\frac{a_i + k - n'}{a_i}\right] - 1, i = 1,2,...,m.$$

Numărul soluțiilor ecuației, respectiv lista soluțiilor ecuației se obțin ca mai sus, impunând evident noile limitări superioare ale necunoscutelor corespunzătoare acestui caz particular.

4 O metodă de calcul interesantă

Vom prezenta în continuare o metodă de calcul interesantă pentru numărul de soluții ale ecuației I, în cazul particular 2, când avem limitări superioare naturale (maxim posibile) ale necunoscutelor. Metoda este „manuală" şi recursivă, fiind adaptarea unei idei prezentate în cunoscuta lucrare „Cum rezolvăm o problemă" de George Polya (Editura Ştiințifică, Bucureşti, 1965) şi unde este preluată dintr-un articol din revista „The American Mathematical Monthly", Nr. 63, din anul 1956.

Pentru introducerea metodei, considerăm la început un caz particular.

Ne propunem să calculăm numărul soluțiilor cu numere naturale ale ecuației:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 5. \tag{8}$$

Considerăm ecuația mai generală:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = k. \tag{9}$$

Notăm cu A_k numărul soluțiilor ecuației:

$$x_1 = k.$$

Notăm cu B_k numărul soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 = k.$$

Notăm cu C_k numărul soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = k.$$

Lista (mulțimea) soluțiilor ecuației (9) este formată din două submulțimi disjuncte. Prima conține soluțiile pentru care $x_3 = 0$ iar a doua conține soluțiile pentru care $x_3 \geq 1$.

Prima submulțime are B_k elemente iar a doua C_{k-3} elemente. Într-adevăr, numărul soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = k$$

cu $x_3 \geq 1$ este egal cu numărul soluțiilor ecuației:

$$y_1 + y_2 + 3y_3 = k - 3$$

cu $y_3 \geq 0$.Aceasta, deoarece între mulțimile soluțiilor celor două ecuații se poate stabili o corespondență biunivocă, pe baza relațiilor:

$$x_1 = y_1;\ x_2 = y_2;\ x_3 - 1 = y_3.$$

Deci, putem scrie:

$$C_k = B_k + C_{k-3}. \tag{10}$$

Asemănător, deducem că avem şi relația:

$$B_k = A_k + B_{k-1}. \tag{11}$$

Este clar că $A_0 = B_0 = C_0 = 1$ iar $A_k = 1$ pentru orice $k > 0$.

Numerele A_k, B_k, C_k pentru $k < 0$ sunt toate nule.

Pentru calculul numărului soluțiilor ecuației (8) care este evident $N = C_5$, vom utiliza relațiile (10) şi (11) cu referire la ecuația (9).

Vom construi următorul tabel, în care numerele se calculează pe baza relațiilor (10) şi (11) şi a observațiilor făcute imediat după aceste relații.

k	0	1	2	3	4	5
A_k	1	1	1	1	1	1
B_k	1	2	3	4	5	6
C_k	1	2	3	5	7	9

Putem acum afirma că numărul soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$

este $N = C_5 = 9$.

Lista soluțiilor ecuației este:

x_1	x_2	x_3
0	2	1
0	5	0
1	1	1
1	4	0
2	0	1
2	3	0
3	2	0
4	1	0
5	0	0

Dar, putem afirma şi că numărul soluţiilor ecuaţiei:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$$

este $C_4 = 7$, etc.

Metoda ramâne evident valabilă pe caz general, pentru calculul numărului soluţiilor ecuaţiei:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k$$

unde $0 \le x_i \le \left[\frac{k}{a_i}\right],\ i = 1,2,...,m$.

<u>Aplicaţie</u>

În câte moduri se poate schimba o bancnotă de un leu?

Rezolvarea acestei probleme înseamnă determinarea numărului soluţiilor ecuaţiei:

$$1x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 50x_4 = 100,$$

unde: x_1, x_2, x_3, x_4 sunt numere naturale.

Aplicăm metoda de calcul prezentată anterior.

$$A_k : 1;\ B_k : 1, 5;\ C_k : 1, 5, 10;\ D_k : 1, 5, 10, 50.$$

Se pot scrie relaţiile:

$$D_k = C_k + D_{k-50};\quad C_k = B_k + C_{k-10};\quad B_k = A_k + B_{k-5}.$$

Construim tabelul de calcul:

k	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
A_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
C_k	1		4		9		16		25		36		49		64		81		100		121
D_k	1										37										158

Se observă că numărul căutat este $N = D_{100} = 158$.

5 Metoda funcţiei generatoare

Pentru a calcula numărul soluţiilor ecuaţiei:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = k$$

unde $0 \le x_i \le \left[\frac{k}{a_i}\right],\ i = 1,2,...,m$,

notăm acest număr $N = c(k) = c_k$.

El poate fi aflat ca şi coeficientul lui x^k în dezvoltatea în serie de puteri a funcţiei generatoare a acestor numere.

Funcția generatoare are urmatoarea formă [2]:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})...(1-x^{a_m})}$$

iar dezvoltarea în serie de puteri este:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_k x^k + ...$$

<u>Exemplu.</u>

Pentru ecuația:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$

considerăm funcția generatoare:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1-x^3)}.$$

Dezvoltarea în serie de puteri a funcției este:

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + 12x^6 + ...$$

Căutăm coeficientul termenului în x^5 (deoarece membrul drept al ecuației noastre este $k = 5$) şi obținem: $N = c_5 = 9$. Dezvoltarea în serie se poate obține uşor folosind produsul soft Mathcad 14. O variantă a metodei utilizează polinoame (a se vedea lucrarea [3]).

Bibliografie

[1] V. M. Popa, *Aspecte combinatoriale privind ecuația diofantică liniară cu coeficienți unitari,* Sibiu, 2009 (în prezentul volum)

[2] P. Shiu, *Computations of the partition function,* The Mathematical Gazette, UK, Vol.81, No. 490, 1997

[3] I. Niven, *Mathematics of choice. How to count without counting,* The Mathematical Association of America, 1965

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Relații între combinări

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we propose a relations between combinations. We give five groups of relations between simple (or without repetitions), with repetitions, with repetitions barred, generalized and generalized barred combinations.

Next present the complementar generalized combinations' formula and a new method for the proof of this formula.

We also present a interesting combinatorial relation with generalized barred combinations.

In the end of the paper we indicate the references.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

Combinările, atât cele simple cât şi cele cu repetiție sunt binecunoscute în combinatorică. În unele lucrări anterioare [1], [2] autorul prezentelor rânduri a introdus o serie de noțiuni noi legate de combinări. Este vorba de combinări barate cu repetiție, de combinări generalizate şi de combinări barate generalizate. Ținând seama de definiția combinărilor şi de proprietățile lor de bază, rezultă unele relații între ele care se pot deduce uşor. Cititorul este îndemnat să demonstreze aceste relații.

2 Exprimarea combinărilor barate cu repetiție

Combinările barate cu repetiție se pot exprima cu ajutorul combinărilor cu repetiție şi al combinărilor simple (fără repetiție).

Avem următoarele relații.

$\overline{c}_m^k = c_m^{k-m},\ k \geq m$

$\overline{c}_m^k = C_{k-1}^{m-1},\ k \geq m\,.$

3 Exprimarea combinărilor cu repetiție

Combinările cu repetiție se pot exprima cu ajutorul combinărilor barate cu repetiție şi al combinărilor simple (fără repetiție).

Avem următoarele relații.

$$c_m^k = \overline{c}_m^{m+k}$$

$$c_m^k = C_{m+k-1}^k .$$

4 Exprimarea combinărilor simple (fără repetiție)

Combinările simple (fără repetiție) se pot exprima cu ajutorul combinărilor cu repetiție şi al combinărilor barate cu repetiție.

Avem următoarele relații.

$$C_n^k = c_{n-k+1}^k ,\ n \ge k$$

$$C_n^k = \overline{c}_{k+1}^{n+1} ,\ n \ge k .$$

5 Exprimarea combinărilor barate generalizate

Combinările barate generalizate se pot exprima cu ajutorul combinărilor generalizate.

Avem următoarea relație.

$$\overline{C}_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^k = \overline{C}_{n-m(l_1-1,l_2-1,\ldots,l_m-1)}^{k-m} ,\ \text{unde}\ k \le n ;\ k \ge m .$$

6 Exprimarea combinărilor generalizate

Combinările generalizate se pot exprima cu ajutorul combinărilor barate generalizate.

Avem următoarea relație.

$$C_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^k = \overline{C}_{n+m(l_1+1,l_2+1,\ldots,l_m+1)}^{k+m} ,\ \text{unde}\ k \le n .$$

7 Formula combinărilor generalizate complementare

Formula combinărilor generalizate complementare are următoarea formă [1], [4]:

$$C_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^k = C_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^{n-k} .$$

Ea rezultă direct din definiția combinărilor generalizate [1].

De asemenea, formula rezultă din relația mai generală de complementaritate a grupărilor generalizate, prin particularizare [4].

În cele ce urmează vom prezenta o nouă demonstrație a formulei, folosind în acest scop considerații legate de ecuația diofantică liniară cu coeficienți unitari, cu limitări superioare ale necunoscutelor.

Se consideră ecuația:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = k , \tag{1}$$

unde $x_i \in N$, $x_i \le l_i$, $l_i \in N^*$ (i=1,2,…,m), $m \in N^*$, $k \in N$, $k \le \sum_{i=1}^{m} l_i$.

Notăm cu $C_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k}$ unde $n = \sum_{i=1}^{m} l_i$, numărul soluțiilor ecuației de mai sus şi care reprezintă şi numărul combinărilor generalizate, după cum se constată uşor.

În ecuația de mai sus facem următoarele substituții:

$$x_i = l_i - y_i \quad (i=1,2,\ldots,m). \tag{2}$$

Obținem ecuația:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m = n - k \tag{3}$$

cu $0 \le y_i \le l_i$ (i=1,2,…,m) şi care are numărul de soluții $C_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n-k}$.

Pe de altă parte, între mulțimile soluțiilor ecuațiilor (1) şi (3) există o corespondență biunivocă dată de substituțiile (2). Prin urmare, cele două mulțimi au acelaşi număr de elemente şi deci putem scrie relația:

$$C_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k} = C_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n-k}.$$

Dacă în relația de mai sus facem $l_1 = l_2 = ... = l_m = 1$ şi deci n=m, obținem:

$$C_n^k = C_n^{n-k},$$

cunoscuta relație de complementaritate pentru combinările simple şi care este prezentă în toate manualele respectiv capitolele de combinatorică.

Am folosit următoarea egalitate:

$$C_{n(1,1,...,1)}^{k} = C_m^k$$

care se observă cu uşurință (avem aici n=m). Prin urmare simbolul $C_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k}$ generalizează combinările simple (fără repetiție).

De altfel, se poate observa şi următoarea egalitate:

$$C_{n(k,k,...,k)}^{k} = c_m^k$$

unde avem n=mk şi unde am notat cu c_m^k numărul combinărilor cu repetiție de m luate câte k.

Prin urmare simbolul $C_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k}$ generalizează şi combinările cu repetiție.

8 Relație cu combinări barate generalizate

Vom prezenta în continuare o relație în care intervin combinările barate generalizate şi care este asemănătoare cu relația corespunzătoare cu combinări generalizate [3].

Considerăm mulțimile:

$$M_1 = \{1,...,l_1\}, M_2 = \{1,...,l_2\},...,M_m = \{1,...,l_m\}$$

unde $l_i \ge 1$ sunt numere naturale, i=1,2,...,m. Notăm $n = l_1 + l_2 + ... + l_m$.

De asemenea, considerăm mulțimea:

$$M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_m.$$

Elementele mulțimii M sunt m-uple de forma: $(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Numărul de elemente al mulțimii M (cardinalul mulțimii M) este:

$$|M| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot ... \cdot |M_m| = l_1 l_2 ... l_m . \tag{4}$$

Am aplicat regula produsului (numărul de elemente al produsului cartezian).

Mulțimea M poate fi partiționată în n-m+1 mulțimi disjuncte, P_k (k=m,m+1,...,n) admițând că mulțimea P_k este formată din toate m-uplele $(x_1, x_2, ..., x_m)$ pentru care $\sum_{j=1}^{m} x_j = k$, $1 \le x_j \le l_j$.

Prin urmare, numărul de elemente al mulțimii M se poate exprima şi astfel:

$$|M| = |P_m| + |P_{m+1}| + ... + |P_n| . \tag{5}$$

Am aplicat regula sumei (caz particular al principiului includerii şi al excluderii [4], pentru mulțimi disjuncte).

Dar, putem scrie:

$$|P_k| = \overline{C}^{k}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} . \tag{6}$$

Ținând seama de (8), (9) şi (10) rezultă că există relația:

$$\overline{C}^{m}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} + \overline{C}^{m+1}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} + ... + \overline{C}^{n}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} = l_1 l_2 ... l_m . \tag{7}$$

Aceasta este relația în care intervin combinările barate generalizate, pe am dorit să o prezentăm. Relația se poate deduce şi din relația corespunzătoare cu combinări generalizate [3], în care înlocuim combinările generalizate cu combinări barate generalizate, folosind în acest scop formula corespunzătoare prezentată mai sus în acest articol (la paragraful 6).

Bibliografie

[1] V. M. Popa, *Combinări generalizate*.
[2] V. M. Popa, *Cazuri speciale ale grupărilor barate generalizate*.
[3] V. M. Popa, *Aspecte combinatoriale privind ecuația diofantică liniară cu coeficienți unitari*.
[4] V. M. Popa, *Formule pentru cazuri particulare ale grupărilor generalizate şi ale ecuației diofantice liniare*.
Toate articolele menționate la bibliografie se găsesc în volumul: Popa, V.M. – *Aspecte de combinatorică cu aplicații în electrotehnică*, Editura Universității „Lucian Blaga" din Sibiu, Sibiu, 2009.

Universitatea „Lucian Blaga" Sibiu
Facultatea de Inginerie
Departamentul de Calculatoare şi Inginerie Electrică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: web.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Cazuri particulare la numărarea funcțiilor între două mulțimi multiple

Vasile Mircea Popa

Abstract

In this paper we calculate the number of the bijections, the injections, the functions and the surjections between two multiple sets in particular cases.

We give four groups of relations regarding the particular cases. These particular cases are given by the structure of multiple sets.

We also show the conclusions.

At the end of the paper the references are presented.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

Pe caz general, numărarea bijecțiilor, a injecțiilor, a funcțiilor şi a surjecțiilor între două mulțimi multiple a fost prezentată în lucrările [1], [2], [3], [4]. Există o serie de cazuri particulare când această numărare se poate exprima uşor, prin formule simple. Pentru unele situații de acest tip se poate vedea de exemplu lucrarea [7]. În acest articol prezentăm sistematic toate cazurile particulare care există la numărarea bijecțiilor, a injecțiilor, a funcțiilor şi a surjecțiilor între două mulțimi multiple. Formulele respective rezultă uşor ținând seama de definițiile şi principalele proprietăți ale noțiunilor respective. O parte din relații sunt deduse în [7]. Cititorul este îndemnat să demonstreze toate aceste relații.

Vom folosi în cele ce urmează două noțiuni pe care le vom reaminti pe scurt. Vom nota cu S(n,m) numărul lui Stirling de speța a doua. El dă numărul partițiilor unei mulțimi de n elemente în m clase ($n \geq m$). De asemenea, vom nota cu P(n,m) numărul de scrieri ale numărului natural n sub forma unei sume de m termeni mai mari sau egali cu 1, în care ordinea termenilor nu are importanță ($n \geq m$). Pentru detalii se poate vedea lucrarea [7]. De asemenea orice alte noțiuni sau notații folosite se găsesc în lucrarea generală [6].

2 Numărarea bijecțiilor între două mulțimi multiple

Pe caz general, numărarea bijecțiilor între două mulțimi multiple este definită în lucrarea [1]. Tot în acea lucrare se indică algoritmul general de numărare. Există o serie de cazuri particulare când această numărare se poate face cu relații simple. Cazurile particulare sunt date de structura mulțimilor multiple între care se definesc bijecțiile. Aceasta poate fi văzută din seriile de indici inferiori şi superiori de la simbolurile utilizate (a se vedea [5]).

Cazurile particulare sunt următoarele.

1). $G_{n(n)}^{n(1,1,\dots,1)} = 1$

2). $G_{n(1,1,\dots,1)}^{n(1,1,\dots,1)} = n!$

3). $G_{n(n)}^{n(n)} = 1$

4). $G_{n(1,1,\dots,1)}^{n(n)} = 1$

5). $G_{n(1,1,\dots,1)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)} = \dfrac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\dots\lambda_\mu!}$

6). $G_{n(l_1,l_2,\dots,l_m)}^{n(1,1,\dots,1)} = \dfrac{n!}{l_1!l_2!\dots l_m!}$

7). $G_{n(l_1,l_2,\dots,l_m)}^{n(n)} = 1$

8). $G_{n(n)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\mu)} = 1$

3 Numărarea injecțiilor între două mulțimi multiple

Pe caz general, numărarea injecțiilor între două mulțimi multiple este definită în lucrarea [2]. Tot în acea lucrare se indică algoritmul general de numărare. Există o serie de cazuri particulare când această numărare se poate face cu relații simple. Cazurile particulare sunt date de structura mulțimilor multiple între care se definesc injecțiile. Aceasta poate fi văzută din seriile de indici inferiori şi superiori de la simbolurile utilizate (a se vedea [5]).

Cazurile particulare sunt următoarele.

1). $G_{n(n)}^{k(1,1,\dots,1)} = G_{n(n)}^{n(1,1,\dots,1,n-k)} = 1$

2). $G_{n(1,1,\dots,1)}^{k(1,1,\dots,1)} = G_{n(1,1,\dots,1)}^{n(1,1,\dots,1,n-k)} = \dfrac{n!}{1!1!\dots1!(n-k)!} = A_n^k$

3). $G_{n(n)}^{k(k)} = G_{n(n)}^{n(k,n-k)} = 1$

4). $G_{n(1,1,...,1)}^{k(k)} = G_{n(1,1,...,1)}^{n(k,n-k)} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$

5). $G_{n(1,1,...,1)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = G_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$

6). $G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(1,1,...,1)} = A_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k}$

7). $G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k(k)} = C_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{k}$

8). $G_{n(n)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = G_{n(n)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu,n-k)} = 1$

4 Numărarea funcțiilor între două mulțimi multiple

Pe caz general, numarărea funcțiilor între două mulțimi multiple este definită în lucrarea [3]. Tot în acea lucrare se indică algoritmul general de numărare. Există o serie de cazuri particulare când această numărare se poate face cu relații simple. Cazurile particulare sunt date de structura mulțimilor multiple între care se definesc funcțiile. Aceasta poate fi văzută din seriile de indici inferiori şi superiori de la simbolurile utilizate (a se vedea [5]).

Cazurile particulare sunt următoarele.

1). $F_{n(n)}^{k(1,1,...,1)} = S(k,1) + S(k,2) + ... + S(k,n)$

2). $F_{n(1,1,...,1)}^{k(1,1,...,1))} = n^k = a_n^k$

3). $F_{n(n)}^{k(k)} = P(k,1) + P(k,2) + ... + P(k,n)$

4). $F_{n(1,1,...,1)}^{k(k)} = c_n^k$

5). $F_{n(1,1,...,1)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = g_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = c_n^{\lambda_1} c_n^{\lambda_2} ... c_n^{\lambda_\mu}$

5 Numărarea surjecțiilor între două mulțimi multiple

Pe caz general, numărarea surjecțiilor între două mulțimi multiple este definită în lucrarea [4]. Tot în acea lucrare se indică algoritmul general de numărare. Există o serie de cazuri particulare când această numărare se poate face cu relații simple. Cazurile particulare sunt date de structura mulțimilor multiple între care se definesc surjecțiile. Aceasta poate fi văzută din seriile de indici inferiori şi superiori de la simbolurile utilizate (a se vedea [5]).

Cazurile particulare sunt următoarele.

1). $S_{n(n)}^{k(1,1,...,1)} = S(k,n)$

2). $S_{n(1,1,...,1)}^{k(1,1,...,1))} = s_{k,n} = n!S(k,n) = \overline{a}_n^k$

3). $S_{n(n)}^{k(k)} = P(k,n)$

4). $S_{n(1,1,...,1)}^{k(k)} = \overline{c}_n^k$

5). $S_{n(1,1,...,1)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \overline{g}_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$

6 Concluzii

După cum se observă, relațiile prezentate mai sus asigură numărarea bijecțiilor, a injecțiilor , a funcțiilor şi a surjecțiilor între două mulțimi multiple în o serie de cazuri particulare. Cazurile particulare sunt date de structura mulțimilor multiple între care se definesc funcțiile. Aceasta poate fi văzută din seriile de indici inferiori şi superiori de la simbolurile utilizate. Amănunte despre aceste notații pot fi văzute în lucrarea [5] indicată la bibliografie.

Bibliografie

[1] V. M. Popa, *Numarărea bijecțiilor între două mulțimi multiple.*
[2] V. M. Popa, *Numărarea injecțiilor între două mulțimi multiple.*
[3] V. M. Popa, *Numărarea funcțiilor între două mulțimi multiple.*
[4] V. M. Popa, *Numărarea surjecțiilor între două mulțimi multiple.*
[5] V. M. Popa, *Mulțimi multiple şi mulțimi ordonate.*
[6] V. M. Popa, *Aspecte de combinatorică cu aplicații în electrotehnică*, Editura Universității „Lucian Blaga" din Sibiu, Sibiu, 2009.
[7] I. Tomescu, *Introducere în combinatorică*, Editura tehnică, Bucureşti, 1972.
Primele cinci articole menționate la bibliografie se găsesc în volumul: Popa, V.M. – *Aspecte de combinatorică cu aplicații în electrotehnică*, Editura Universității „Lucian Blaga" din Sibiu, Sibiu, 2009, indicat la poziția 6 în lista bibliografică.

Universitatea „Lucian Blaga" Sibiu
Facultatea de Inginerie
Departamentul de Calculatoare şi Inginerie Electrică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: web.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Distribuirea obiectelor în căsuțe distincte sau indiscernabile

Vasile Mircea Popa

Abstract

The article treats the problem of distributing distinguishable or indistinguishable objects in distinguishable or indistinguishable boxes.

This is a fundamental problem in combinatorics, together with obiect grouping problem.

Presents the first four issues of distribution of objects in boxes. Below are presented the other two problems of distribution of objects in boxes that can be indistinguishables. They are attached to problem of counting functions between two multiple sets and problem of counting surjections between two multiple sets.

At the end of the paper are presented the conclusions and references.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

După cum se ştie, problema distribuirii obiectelor în căsuțe este alături de problema grupării obiectelor o problemă fundamentală în combinatorică. Obiectele pot fi distincte sau identice iar căsuțele pot fi distincte sau indiscernabile.

În lucrarea [5] sunt prezentate mai multe probleme de distribuire a obiectelor în căsuțe distincte, neordonate (nu are importanță ordinea obiectelor în căsuțe). Ele vor fi prezentate pe scurt în lucrarea de față. Mai exact, este vorba de patru probleme de distribuire a obiectelor în căsuțe, ale căror soluții sunt date de numerele $G_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}$, $G_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}$, $\overline{G}_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}$, $H_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}$, cu notațiile din lucrarea menționată mai sus.

De asemenea, în lucrarea de față vom considera şi probleme de distribuire a obiectelor în căsuțe care pot fi indiscernabile. Ele sunt ataşate problemei numărării funcțiilor între două mulțimi multiple, respectiv numărării surjecțiilor între două mulțimi multiple.

2 Problemă de distribuire a obiectelor în căsuțe (problema 1)

Considerăm n obiecte (μ clase de obiecte, clasa i conținând λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$) şi m căsuțe de capacități l_j, cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$. Se consideră căsuțele distincte, neordonate (nu are importanță ordinea obiectelor în căsuțe). Se distribuie cele n obiecte în cele m căsuțe astfel încât casuța j să primească l_j obiecte. Numărul de distribuiri posibile este $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$. În simbolul general anterior, în cele două paranteze apar partiții ale numărului natural n. Ordinea indicilor din paranteze nu are importanță. Vom prefera să notăm atât indicii de jos cât şi cei de sus în ordinea descrescătoare. Dacă în urma aplicării unor formule de calcul apar indici nuli, aceştia vor fi eliminați.

După cum se ştie, simbolul $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$ reprezintă şi soluția unei probleme de grupare a obiectelor, dar şi numărul bijecțiilor dintre două mulțimi multiple [1].

3 Problemă de distribuire a obiectelor în căsuțe (problema 2)

Considerăm k obiecte (μ clase de obiecte, clasa i conținând λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = k$) şi m căsuțe de capacități l_j, cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$. Se consideră căsuțele distincte, neordonate (nu are importanță ordinea obiectelor în căsuțe). Se distribuie cele k obiecte în cele m căsuțe astfel încât căsuța j să primească cel mult l_j obiecte (deci nici un obiect, unul sau mai multe, maximum l_j). Numărul de distribuiri posibile este $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$, unde $k \leq n$. Ordinea indicilor din paranteze nu are importanță. Vom prefera să notăm atât indicii de jos cât şi cei de sus în ordinea descrescătoare. Dacă în urma aplicării unor formule de calcul apar indici nuli, aceştia vor fi eliminați.

După cum se ştie, simbolul $G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$ reprezintă şi soluția unei probleme de grupare a obiectelor, dar şi numărul injecțiilor dintre două mulțimi multiple [2].

4 Problemă de distribuire a obiectelor în căsuțe (problema 3)

Considerăm k obiecte (μ clase de obiecte, din clasa i având λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = k$) şi m căsuțe de capacități l_j, cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$. Se consideră căsuțele distincte, neordonate (nu are importanță ordinea obiectelor în căsuțe). Se distribuie cele k obiecte în cele m căsuțe astfel încât căsuța j să primească cel puțin un obiect şi cel mult l_j obiecte (deci un obiect sau mai multe, maximum l_j). Numărul de distribuiri posibile este: $\overline{G}_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}$, unde $k \leq n$, $k \geq m$.

După cum se ştie, simbolul $\overline{G}_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}$ reprezintă şi soluția unei probleme de grupare a obiectelor [3].

5 Problemă de distribuire a obiectelor în căsuțe (problema 4)

Considerăm o problemă de distribuire a unor obiecte în căsuțe distincte, neordonate (nu are importanță ordinea obiectelor în căsuțe). Considerăm n obiecte (μ clase de obiecte, clasa i conținând λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$) şi m căsuțe de capacități l_j, cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$. Se distribuie cele n obiecte în cele m căsuțe astfel încât fiecare căsuță să primească numai obiecte distincte. Numărul de distribuiri posibile, cu această condiție, se notează astfel: $H_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}$. În simbolul general anterior, în cele două paranteze apar partiții ale numărului natural n. Ordinea indicilor din paranteze nu are importanță. Vom prefera să notăm atât indicii de jos cât şi cei de sus în ordinea descrescătoare. Dacă în urma aplicării unor formule de calcul apar indici nuli, aceştia vor fi eliminați. Trebuie să avem condițiile: $\lambda_i \leq m$, $i = 1,2,\ldots\mu$ şi datorită proprietății de dualitate (vezi lucrarea [5]) şi condițiile: $l_j \leq \mu$, $j = 1,2,\ldots,m$. Dacă aceste condiții nu sunt îndeplinite, valoarea simbolului este nulă.

După cum se ştie, simbolul $H_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}$ reprezintă şi soluția unei probleme de grupare a obiectelor [4].

6 Problemă de distribuire a obiectelor în căsuțe (problema 5)

Vom considera acum o nouă problemă de distribuire a obiectelor în căsuțe, ataşată problemei numărării funcțiilor între două mulțimi multiple [5].

Problema de distribuire ataşată este urmatoarea.

Considerăm k obiecte (μ clase de obiecte, clasa i conținând λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = k$) şi n căsuțe. Avem m clase de căsuțe , clasa j conținând l_j căsuțe indiscernabile (echivalente), cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$. Se consideră căsuțele neordonate (nu are importanță ordinea obiectelor în căsuțe). Se distribuie cele k obiecte în cele n căsuțe astfel încât orice căsuță să primească cel mult k obiecte (deci nici un obiect, unul sau mai multe, maximum k) . Numărul de distribuiri posibile este $F_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}$.

7 Problemă de distribuire a obiectelor în căsuțe (problema 6)

Vom considera acum o nouă problemă de distribuire a obiectelor în căsuțe, ataşată problemei numărării surjecțiilor între două mulțimi multiple [5].

Problema de distribuire ataşată este următoarea.

Considerăm k obiecte (μ clase de obiecte, clasa i conținând λ_i obiecte identice, deci $\sum_{i=1}^{\mu}\lambda_i = k$) şi n căsuțe. Avem m clase de căsuțe , clasa j conținând l_j căsuțe indiscernabile (echivalente), cu $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$. Se consideră căsuțele neordonate (nu are importanță ordinea obiectelor în căsuțe). Se distribuie cele k obiecte în cele n căsuțe astfel încât fiecare căsuță să primească cel puțin un obiect şi cel mult k-n+1 obiecte (deci un obiect sau mai multe, maximum $k - n + 1$).

Numărul de distribuiri posibile este $S_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}$, $k \geq n$.

8 Concluzii

S-au prezentat în lucrarea de față două noi probleme de distribuire a obiectelor în căsuțe, ataşate numărării funcțiilor, respectiv surjecțiilor între două mulțimi multiple. Facem observația că la problema 1 şi problema 2 numărul căsuțelor este m iar la problema 5 şi problema 6 numărul căsuțelor este n, cu notațiile adoptate.

Bibliografie

[1] V. M. Popa, *Numarărea bijecțiilor între două mulțimi multiple*.
[2] V. M. Popa, *Numărarea injecțiilor între două mulțimi multiple*.
[3] V. M. Popa, *Grupări barate generalizate*.
[4] V. M. Popa, *O utilizare combinatorială a polinoamelor lui Newton*.
[5] V. M. Popa, *Aspecte de combinatorică cu aplicații în electrotehnică*, Editura Universității „Lucian Blaga" din Sibiu
Toate articolele menționate la bibliografie (pozițiile 1...4) se găsesc în volumul: Popa, V.M. – *Aspecte de combinatorică cu aplicații în electrotehnică*, Editura Universității „Lucian Blaga" din Sibiu, Sibiu, 2009, indicat la poziția 5 în lista bibliografică.

Universitatea „Lucian Blaga" Sibiu
Facultatea de Inginerie
Departamentul de Calculatoare şi Inginerie Electrică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: web.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Program de calculator pentru numărarea funcțiilor între două mulțimi multiple

Vasile Mircea Popa

Abstract

For counting functions between two multiple sets have made a computer program called FUNCTIONS-NUMBER. The paper present this computer program.

To obtain the list of functions between two multiple sets have made a computer program called FUNCTIONS-LIST.The paper also present this computer program.

Finally we show conclusions.

The references are indicated at the end of the paper.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

Pentru numărarea funcțiilor între două mulțimi multiple, respectiv pentru oținerea listei acestor funcții (mai exact, a listei matricilor ce caracterizează aceste funcții) s-a realizat un program de calculator în variantele FUNCTII-LISTA, respectiv FUNCTII-NUMAR. Programul a fost scris în Mathcad.

2 Program de calculator FUNCTII

Numărul funcțiilor între două mulțimi multiple a fost notat cu $F_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$ [1].

Pentru a calcula acest număr cu ajutorul calculatorului, se porneşte de la numărul $g_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = G_{nk(k,k,...,k)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$.

Deci, este vorba de grupări generalizate [2].

Vom genera aşa cum ştim, lista matricilor ce caracterizează aceste grupări generalizate [3]. Aceste matrici sunt de forma următoare.

$$
y = \begin{bmatrix}
x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\
x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\
\vdots & & & & & \\
x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\
\vdots & & & & & \\
x_{\mu 1} & x_{\mu 2} & \dots & x_{\mu j} & \dots & x_{\mu n}
\end{bmatrix}
$$

În lista matricilor de această formă (listă corespunzătoare programului GG2-LISTA [3]), trebuie să ştergem o serie de matrici. Mai exact, o matrice y2 nu va fi trecută în listă dacă anterior am obţinut o matrice y1 şi avem următoarea situaţie: primele l_1 coloane din matricea y2 sunt primele l_1 coloane din matricea y1 scrise eventual în altă ordine, următoarele l_2 coloane din matricea y2 sunt următoarele l_2 coloane din matricea y1 scrise eventual în altă ordine,..., ultimele l_m coloane din matricea y2 sunt ultimele l_m coloane din matricea y1 scrise eventual în altă ordine (între condiţiile enumerate avem conectorul logic SI). În acest scop se utilizează o funcţie h(y) ce realizează această filtrare.

Lista care se obţine va conţine matricile ce caracterizează funcţiile între două mulţimi multiple. Programul de calculator respectiv a fost numit FUNCTII-LISTA. Propunem cititorului ca un exerciţiu de programare să scrie un astfel de program, după principiul expus mai sus. Varianta de program numită FUNCTII-NUMAR generează matricile amintite anterior, numără aceste matrici şi dă numărul respectiv.

3 Concluzii

Numărarea funcţiilor între două mulţimi multiple se poate face prin metoda indicată în [1], utilizând formula lui de Bruijn. Programul de calculator FUNCTII-NUMAR permite obţinerea acestui număr într-un timp mult mai scurt. Programul de calculator FUNCTII-LISTA furnizează lista funcţiilor respective.

Bibliografie

[1] V. M. Popa, *Numărarea funcţiilor între două mulţimi multiple.*
[2] V. M. Popa, *Cazuri speciale ale grupărillor generalizate.*
[3] V. M. Popa, *Programe de calculator cu caracter combinatorial.*
Cele trei articole menţionate la bibliografie se găsesc în volumul: Popa, V.M. – *Aspecte de combinatorică cu aplicaţii în electrotehnică*, Editura Universităţii „Lucian Blaga” din Sibiu, Sibiu, 2009.

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie
Departamentul de Calculatoare şi Inginerie Electrică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: web.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Program de calculator pentru numărarea surjecțiilor între două mulțimi multiple

Vasile Mircea Popa

Abstract

For counting surjections between two multiple sets have made a computer program called SURJECTIONS-NUMBER. The paper present this computer program.

To obtain the list of surjections between two multiple sets have made a computer program called SURJECTIONS-LIST. The paper also present this computer program.

Finally we show conclusions.

The references are indicated at the end of the paper.

2000 Mathematical Subject Classification: 05A05

1 Introducere

Pentru numărarea surjecțiilor între două mulțimi multiple, respectiv pentru oținerea listei acestor surjecții (mai exact, a listei matricilor ce caracterizează aceste surjecții) s-a realizat un program de calculator în variantele SURJECTII-LISTA, respectiv SURJECTII-NUMAR. Programul a fost scris în Mathcad.

2 Program de calculator SURJECTII

Numărul surjecțiilor între două mulțimi multiple a fost notat cu $S_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}$, $k \geq n$ [1].

Pentru a calcula acest număr se porneşte de la numărul

$\overline{g}_n^{k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)} = \overline{G}_{n(k-n+1)(k-n+1,k-n+1,\ldots,k-n+1)}^{k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)}$.

Deci, este vorba de grupări barate generalizate [2].

Vom genera aşa cum ştim, lista matricilor ce caracterizează aceste grupări generalizate [3]. Aceste matrici sunt de forma următoare.

$$y = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & & & & & \\ x_{\mu 1} & x_{\mu 2} & \cdots & x_{\mu j} & \cdots & x_{\mu n} \end{bmatrix}$$

În lista matricilor de această formă (lista corespunzătoare programului GG3-LISTA [3]), trebuie să ştergem o serie de matrici. Mai exact, o matrice y2 nu va fi trecută în listă dacă anterior am obţinut o matrice y1 şi avem următoarea situaţie: primele l1 coloane din matricea y2 sunt primele l1 coloane din matricea y1 scrise eventual în altă ordine, următoarele l2 coloane din matricea y2 sunt următoarele l2 coloane din matricea y1 scrise eventual în altă ordine,..., ultimele lm coloane din matricea y2 sunt ultimele lm coloane din matricea y1 scrise eventual în altă ordine (între condiţiile enumerate avem conectorul logic SI). În acest scop se utilizează o funcţie h(y) ce realizează această filtrare.

Lista care se obţine va conţine matricile ce caracterizează surjecţiile între două mulţimi multiple. Programul de calculator respectiv a fost numit SURJECTII-LISTA. Propunem cititorului ca un exerciţiu de programare să scrie un astfel de program, după principiul expus mai sus. Varianta de program numită SURJECTI-NUMAR generează matricile amintite anterior, numără aceste matrici şi dă numărul respectiv.

3 Concluzii

Numărarea surjecţiilor între două mulţimi multiple se poate face prin metoda indicată în [1] utilizând principiul includerii şi al excluderii şi formula lui de Bruijn. Programul de calculator SURJECTII-NUMAR permite obţinerea acestui număr într-un timp mult mai scurt. Programul de calculator SURJECTII-LISTA furnizează lista surjecţiilor respective.

Bibliografie

[1] V. M. Popa, *Numărarea surjecţiilor între două mulţimi multiple*.
[2] V. M. Popa, *Cazuri speciale ale grupărillor barate generalizate*.
[3] V. M. Popa, *Programe de calculator cu caracter combinatorial*.
Cele trei articole menţionate la bibliografie se găsesc în volumul: Popa, V.M. – *Aspecte de combinatorică cu aplicaţii în electrotehnică*, Editura Universităţii „Lucian Blaga” din Sibiu, Sibiu, 2009.

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie
Departamentul de Calculatoare şi Inginerie Electrică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: web.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

RECEPTOARE DISCRETE

A Mathematical Model for Unbalanced Classes Analysis of Polyphasic Loads

Vasile Mircea POPA

Abstract: The paper proposes a new method for calculating the number of equivalence classes for discreet unbalanced loads. The determination of this number is a combinatorial problem of distributing n objects (μ classes of objects where the class j contains λ_j identical objects, so that $\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j = n$) in m cells of capacity l_i, having $\sum_{i=1}^{m} l_i = n$.

1. Introduction

Consider a polyphasic unbalanced load and equivalent scheme in star connection (fig.1).

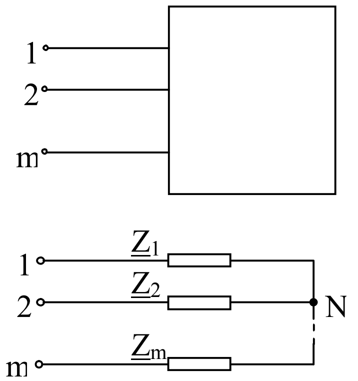

Fig.1

The phase i of load requires a number l_i from the elementary impedances (i=1,2,…,m) (fig.2).

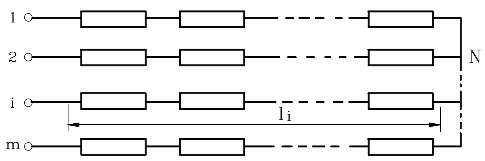

Fig.2

We have μ impedance classes, where the class j contains λ_j identical impedances $(j = 1,2,...,\mu)$.

Supposing that:

$$\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j = \sum_{i=1}^{m} l_i = n \tag{1}$$

the number of polyphasic load unbalanced classes is finite.

If we note this number:

$$N = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} \tag{2}$$

we can use for his calculation an original algorithm we are going to present below.

2. Original algorithm

I propose the following algorithm [3].

a) We solve the polynomial:

$$P = P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} ... P_{\lambda_\mu} \tag{3}$$

where:

$$P_{\lambda_j} = P_{\lambda_j}\left(x_1, x_2, ..., x_{\lambda_j}\right)$$

is a Newton type polynomial of degree λ_j in λ_j variables [1].

$$P = P(x_1, x_2, ..., x_\lambda) \tag{4}$$

will have a:

$$\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j = n$$

degree and λ variables, where:

$$\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu).$$

b) We replace in P:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 + ... + y_m \\ x_2 &= y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2 \\ &\vdots \\ x_\lambda &= y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda \end{aligned} \qquad (5)$$

c) With the help of the multinominal theorem we calculate the coefficient of the single term $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ of the expansion of P, which will be the number we are looking for.

The general polynomial of Newton type has the form:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+...+nk_n=n \\ k_1, k_2, ..., k_n \geq 0}} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! ... n^{k_n} k_n!}. \quad (6)$$

Applying the above mentioned general formula we can easily obtain the first Newton type polynomials:

$$P_1 = x_1$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right)$$

$$P_3 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3\right)$$

$$P_4 = \frac{1}{24}\left(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4\right)$$

The algorithm that we displayed before coincides with the Pólya – de Brujin enumeration method used in our problem case [2].

We can also remark that the number N represents also the number of matrices with μ rows and m columns, made of natural numbers, where the sum of the rows and columns are given:

$$\begin{array}{c|cccc} n & l_1 & l_2 & \cdots & l_m \\ \hline \lambda_1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ \lambda_2 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_\mu & x_{\mu 1} & x_{\mu 2} & \cdots & x_{\mu m} \end{array} \qquad (7)$$

The algorithm was programmed on the electronic computer.

3. Conclusions

This paper presents a mathematical model for polyphasic loads unbalances classes analysis. The number N represents also the number of solutions for the system of equations:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ji} = \lambda_j; \quad \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i; \quad \lambda_j, l_i > 0; \quad x_{ji} \geq 0 \, T$$

he numbers x_{ji} are natural numbers and the numbers λ_j, l_i are strictly positive natural numbers. The system has μm unknowns (because of the equilibrium conditions (1)).

As an application we propose to the reader to check up by calculation the equalities:

$$G_{8(2,2,1,1,1,1)}^{8(2,2,2,1,1)} = 1548$$

$$G_{8(2,2,1,1,1,1,1)}^{9(3,2,2,1,1)} = 4900$$

and to formulate the according problems complying with the count of solutions both for the before system and for the matrices (7).

4. References:

[1] D. E. Knuth – *The Art of Computer Programming*, vol.1, *Fundamentals Algorithms*, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1973

[2] I. Tomescu – *Introduction to Combinatorics,* Collet's (Publishers) Limited, London and Wellingborough, England, 1975

[3] V. M. Popa – *On a Question of Linear Programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol.X, Sibiu, Romania, 1993

The Algebraic Characterisation of Discreet Unbalanced Loads

Vasile Mircea Popa

Abstract: The paper proposes an algebraic characterisation for unbalanced discreet loads. The algebraic model is the bijection between two finite multiple sets. The number of unbalanced discreet loads is the number of equivalence classes for equivalence relation defined onto bijection set.

Key words: m-phased load, discreet unbalanced loads, algebraic characterisation for discreet unbalanced loads

1. Introduction

We are considering an m-phased unbalanced load and the equivalent scheme in star connection. We assume that the phases are distinct between them (discernible). If the impedances from the m phases are made up (in a series) of elementary impedances (physical elements), we call the m-phased load discreet unbalanced load (DUL). [3],[4]. We assume that we have n elementary impedances, namely μ classes of different elementary impedances, the j class containing λ_j identical impedances, thus:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n . \tag{1}$$

The m distinct phases of the load with a star connection, contain l_i elementary impedances each, with:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = n . \tag{2}$$

The scheme of such a discreet unbalanced load is given in fig 1.

We call such a discreet unbalanced load of the $n(l_1,l_2,\ldots,l_m;\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)$ type.

We are to imply next that the discreet unbalanced loads (DUL), which we are to consider, do belong to this type.

At the transfer of some elementary impedances from a phase to another we obtain different unbalances loads, which introduce different types of lack of balance into the network where they belong.

Particularly, some of these loads can be balanced but they can be considered as limit cases of unbalanced loads [3].

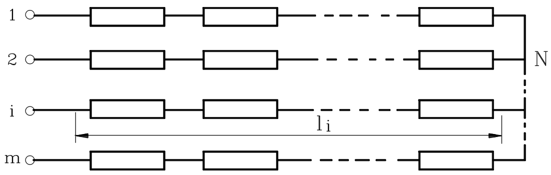

Figure 1.

A question that is raised immediately is determined by the number of possible unbalanced, in other words, the number of the discreet unbalanced load. The number of the discreet unbalanced loads, which may exist, is finite and we note it:

$$N = N(DUL) = G_{n(l_1,l_2,\ldots,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)} . \tag{3}$$

By the N=N(DUL) number calculation we use methods from the discreet mathematics, to be more exactly, from the combinatorics. [1], [2], [3].

2. The algebraic model for RDD

The algebraic model for the discreet unbalanced load is the bijection between two multiple sets [3],[4]. We take into consideration two finite sets X and Y, having the same number of elements: $|X|=|Y|=n$, as well as the set of bijections $f : X \rightarrow Y$, that we note as Y^x . Let us assume an equivalence relation (ρ_1) defined on the set X, which determines a partition of the set X, where μ equivalence classes X_j containing each λ_j elements, that is

$|X_j| = \lambda_j$, (j=1,2…μ). The elements of an equivalence class will be called equivalent or identical. In the same way, we consider an equivalent relation (ρ_2) defined on the set Y, which determines a partition of the set Y in m classes of equivalence, Y_i containing each l_i elements, namely $|Y_i| = l_i$ (i=1,2…m). In this way, the sets X and Y become multiple sets, namely sets where the elements may repeat. Using this terminology, we may say that the set X contains μ distinct elements, the j element repeating λ_j times (j=1,2…μ). Likewise, for the set Y.

Now we are to consider a permutations group G of the set X that is the simple (or direct) product of the symmetrical groups of permutations for the equivalence classes elements from X [1], [2], [3].

This group is noted as: $G = S_{\lambda_1} \cdot S_{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot S_{\lambda_\mu}$ and it is defined the following way: for any $\alpha \in G$, $\alpha_j \in S_{\lambda_j}$, $x \in X_j$, we have:

$$\alpha(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_\mu)(x) = \alpha_j(x) \qquad (4)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, \mu)$$

The defition is consistent. Due to the fact that G is a finite subset of S_n, in order that G may be a permutation group of the set X (a sub-group of the symmetric group S_n) it is sufficient for us to check that for any $\alpha, \alpha' \in G \Rightarrow \alpha\alpha' \in G$ (we noted $\alpha\alpha'$ the α and α' permutation composition). Let $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_\mu)$ and $\alpha' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_j', \ldots, \alpha_\mu')$ be. For any $x \in X_j$, we get after the definition:

$$\alpha\alpha'(x) = \alpha(\alpha'(x)) = \alpha(\alpha_j'(x)) = \alpha_j(\alpha_j'(x)) = \alpha_j\alpha_j'(x)$$

We thus obtain:

$\alpha\alpha' = (\alpha_1\alpha_1', \alpha_2\alpha_2', \ldots, \alpha_j\alpha_j', \ldots, \alpha_\mu\alpha_\mu')$ and we can observe that $\alpha\alpha' \in G$.

Therefore G is a permutation group of the X set. We used the finite subgroups characterisation theorem [1],[2]. Thus, through this permutation group, any X element of the X set is changed into an element that belongs to the same equivalence class as X.

Analogously, we also consider the H permutation group of the Y set:

$$H = S_{l_1} \cdot S_{l_2} \cdot \ldots \cdot S_{l_m}.$$

For any $\beta \in H$, $\beta_i \in S_{l_i}$, $y \in Y_i$, we have:

$$\beta(y) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_m)(y) = \beta_i(y) \qquad (5)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

That is, through the permutation of this group, any y element of the Y set is changed into an element that belong to the same equivalence class as y.

There can be defined an equivalence relation (ρ) on the Y^X set, as follows: $f_1 \sim f_2$ if $\alpha \in G$ and $\beta \in H$ exist, so that $f_2 = \beta f_1 \alpha$. We demonstrate that the relation defined like this is an equivalence relation on the bijections set f: X→Y, in ratio with the G and H permutation groups.

The relation is reflexive: $f \sim f$, because $f = \varepsilon_2\, f\, \varepsilon_1$, where $\varepsilon_1 \in G$ and $\varepsilon_2 \in H$ are identical permutations from the two permutation groups. The relation is symmetrical: $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1$. It is true that $f_2 = \beta\, f_1\, \alpha$ leads to $f_1 = \beta^{-1} f_2\, \alpha^{-1}$, where $\alpha^{-1} \in G$ and $\beta^{-1} \in H$,fact that proves the assertion. The relation is transitive: $f_1 \sim f_2$ and $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3$. That is, from $f_2 = \beta\, f_1\, \alpha$ and $f_3 = \beta'\, f_2\, \alpha'$ it results $f_3 = \beta'\beta f_1 \alpha\alpha' = \beta'' f_1 \alpha''$, where: $\beta'\beta = \beta'' \in H$ and $\alpha\alpha' = \alpha'' \in G$.

The relation (ρ) of equivalence determines a partition of the Y^X set into classes of equivalence. The number of these classes of equivalence is noted in the following way:

$$|Y^X / \rho| = G_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}. \qquad (6)$$

We notice that the setting forth of this problem is equivalent to the problem to define the discreet unbalanced load (DUL).

We take into consideration n elementary impedance (μ impedance classes, the j class containing λ_j identical impedances, as $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n$) and m phases, the i phase receiving l_i elementary inseried impedances, with $\sum_{i=1}^{m} l_i = n$.

The n impedances are distributed in the m phases. The number of possible distribution is:

$$N = N(DUL) = G_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}. \qquad (7)$$

3. Conclusions

Therefore, the mathematical model for the discreet unbalanced load is the bijection between two multiple sets and the counting of the discreet unbalanced loads (DUL) is reduced to the bijections between two multiple sets counting [4].

We also note that the defined relation for the lack of balance on the discreet loads set is an equivalence relation and the classes with lack of balance are corresponding equivalence classes.

The author of this paper has elaborated four methods for the calculation of the N (DUL) number [3].

Bibliography

[1] C. Năstăsescu , C. Niță , C. Vraciu – *Bazele algebrei*, vol. I , Editura Academiei, Bucureşti, 1986.

[2] D. Popescu , C. Vraciu – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986 .

[3] V. M. Popa – *Aplicații și încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifazate în regimuri nesimetrice*, Referat de doctorat nr. 2, Universitatea Tehnica Cluj - Napoca, Facultatea de Electrotehnică Cluj - Napoca, 1994 .

[4] V.M. Popa – *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 38, nr. 1, 1995 .

Methods for Calculating the Number of Discreet Unbalanced Loads

Vasile Mircea Popa

Abstract: This paper presents a method for unbalanced discreet loads number calculation. Four methods are presented and the enumeration method is also detailed. The respective algorithm was programmed on the electronic computer.

Key words: m-phased loads, discreet unbalanced loads, methods for discreet unbalanced loads number calculation, enumeration method.

1. Introduction

The m- phased discreet unbalanced load of the $n(l_1,l_2,...,l_m;\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu)$ type has been defined in some previous papers [2], [3].

We are considering an m-phased unbalanced load and the equivalent scheme in star connection. We assume that the phases are distinct between them (discernible). If the impedances from the m phases are made up (in a series) of elementary impedances (physical elements), we call the m-phased load discreet unbalanced load (DUL). [2]. We assume that we have n elementary impedances, namely μ classes of different elementary impedances, the j class containing λ_j identical impedances, thus:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n .$$

The m distinct phases of the load with a star connection, contain l_i elementary impedances each, with:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = n .$$

The scheme of such a discreet unbalanced load is given in fig 1.

We call such a discreet unbalanced load of the $n(l_1,l_2,\ldots,l_m;\lambda_1,\lambda_2\ldots\lambda_\mu)$ type.

We are to imply next that the discreet unbalanced loads (DUL), which we are to consider, do belong to this type.

At the transfer of some elementary impedances from a phase to another we obtain different unbalances loads, which introduce different types of lack of balance into the network where they belong.Particularly, some of these loads can be balanced but they can be considered as limit cases of unbalanced loads [2]

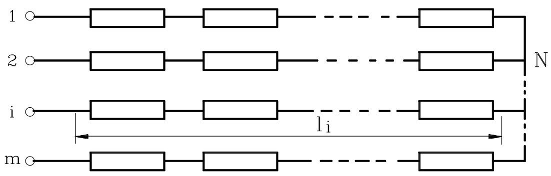

Figure 1.

A question that is raised immediately is determined by the number of possible unbalanced, in other words, the number of the discreet unbalanced load. The number of the discreet unbalanced loads, which may exist, is finite and we note it:

$$N = N(DUL) = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}$$

The author of this paper has elaborated four methods for the N (DUL) number calculation. These are:

1. The enumeration method
2. The Newton type polynomials method
3. The recurrence method
4. The order reducing method.

The Newton type polynomials method has been set forth in the [3] paper. Now we are going to present the enumeration method.

2. The enumeration method

This method is based on the observation that the N number is equal to the solutions number of the system:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ji} = \lambda_j ; \ j = 1,2,...,\mu \\ \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i ; \ i = 1,2,...,m \end{cases} \quad (1)$$

Where $\lambda_j, l_i > 0$; $x_{ji} \geq 0$ are natural numbers.

This system has μm unknowns and $\mu + m - 1$ independent equations (because of the conditions $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = \sum_{i=1}^{m} l_i = n$).

Therefore, the non-determination degree of system is:

$$\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1) \quad (2)$$

We notice that the N number also represents the matrices number with μ rows and m columns, containing natural numbers, where the sum of the rows, respectively of the columns, are imposed:

n	l_1	l_2	...	l_m
λ_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1m}
λ_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2m}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
λ_μ	$x_{\mu 1}$	$x_{\mu 2}$	...	$x_{\mu m}$

(3)

The enumeration method "manually" applied, consist of the effective construction of the matrices of the type (3) and their counting. It is obvious that for n capital, this variant is totally unpractical. Based on the enumeration method, we made up a computer program (called the RDD program) which systematically generates matrices of the (3) type and finally it gives the number of these matrices. The problem is reduced to the determination of the reduced matrices with μ-1 and m – 1 dimensions, where the x_{ji} variables take natural values between 0 and a maximum value and their sum is higher than or equal to the $n - l_1 - \lambda_1$.

We may write:

$$0 \leq x_{ji} \leq \min(\lambda_j - x_{j2} - ... - x_{j,i-1}; l_i - x_{2i} - ... - x_{j-1,i}) \quad (4)$$

$$S = \sum_{j=2}^{\mu} \sum_{i=2}^{m} x_{ji} \geq n - l_1 - \lambda_1 \quad (5)$$

referring to the matrix:

$$M = \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2i} & \cdots & x_{2m} \\ x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3i} & \cdots & x_{3m} \\ \cdots & & & & & \\ x_{j2} & x_{j3} & \cdots & x_{ji} & \cdots & x_{jm} \\ \cdots & & & & & \\ x_{\mu 2} & x_{\mu 3} & \cdots & x_{\mu j} & \cdots & x_{\mu m} \end{bmatrix} \quad (6)$$

The number of the reduced matrices of the (6) type coincides with the (3) matrices number and it is exactly N (DUL)

A numeric example obtained:

$$G_{30(10,10,10)}^{30(10,10,10)} = 2211 \quad (7)$$

Bibliography:

[1] V. M. Popa – *On a question linear programming,* Acta Universitatis Cibiniensis, vol. X (1), Sibiu, 1993.

[2] V. M. Popa - *Aplicații şi încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifazate în regimuri nesimetrice,* Referat de doctorat nr. 2, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică Cluj-Napoca, 1994.

[3] V. M. Popa – *A Mathematical Model for Polyplastic Loads Unbalanced Classes Analysis,* Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 38, nr. 1, 1995.

The Recurrence Method for Calculating the Unbalanced Classes Number of m-Phased Loads

Vasile Mircea Popa

Abstract: This work shows a recurrence method for m-phased loads unbalanced classes number calculation. The numbers N(DUL) can be determined recursively, using recurrence relations. At the end of the paper a numerical computational example is presented.

Key words: m-phased loads, discreet unbalanced loads, recurrence method.

1. Introduction

In some previous papers[3], [4] it was defined the m-phased load of the $n(l_1,l_2,...,l_m;\ \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_\mu)$ type.

We are considering an m-phased unbalanced load and the equivalent scheme in star connection. We assume that the phases are distinct between them (discernible). If the impedances from the m phases are made up (in a series) of elementary impedances (physical elements), we call the m-phased load discreet unbalanced load (DUL). [2]. We assume that we have n elementary impedances, namely μ classes of different elementary impedances, the j class containing λ_j identical impedances, thus:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n\ . \qquad (1)$$

The m distinct phases of the load with a star connection, contain l_i elementary impedances each, with:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = n\ . \qquad (2)$$

The scheme of such a discreet unbalanced load is given in fig 1.

We call such a discreet unbalanced load of the $n(l_1,l_2,...,l_m;\ \lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)$ type.

We are to imply next that the discreet unbalanced loads (DUL), which we are to consider, do belong to this type.

At the transfer of some elementary impedances from a phase to another we obtain different unbalances loads, which introduce different types of lack of balance into the network where they belong.

Particularly, some of these loads can be balanced but they can be considered as limit cases of unbalanced loads [2]

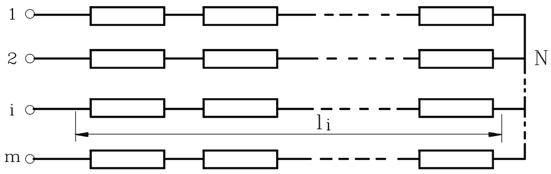

Figure 1.

A question that is raised immediately is determined by the number of possible unbalanced, in other words, the number of the discreet unbalanced load. The number of the discreet unbalanced loads, which may exist, is finite and we note it:

$$N = N(DUL) = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}\ . \qquad (3)$$

This paper shows the recurrence method for the discreet unbalanced loads for the N (DUL) number calculation.

2. The recurrence method

The number of the unbalanced classes for the discreet unbalanced loads can be determined with the aid of some N (DUL) numbers with lesser order.

The recurrence relations are easily deduced starting from the definition of the number N (DUL).By the decreasing order of te superior and inferior indices and the using of the symmetrical properties it was determinated that:

$$\lambda_\mu=\min\,(l_1, l_2,...,l_m;\ \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_\mu) \qquad (4)$$

a) if $\lambda_\mu=1$, it results:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-1(l_1,l_2,...,l_i-1...,l_m)}^{n-1(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\mu-1})} \qquad (5)$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 1 \qquad (6)$$

in natural numbers, with $0 \le x_i \le 1$, $(i = 1,2,...,m)$.

The solutions number of this equation is:

$$|R| = c_m^1 = m \text{ (combinations with repetition).} \qquad (7)$$

b) if $\lambda_\mu=2$, it results:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-2(l_1,l_2,...,l_i-2,...,l_m)}^{n-2(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\mu-1})} \qquad (8)$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 2 \qquad (9)$$

in natural numbers, with $0 \le x_i \le 2$, $(i = 1,2,...,m)$.

The solutions number of this equation is:

$$|R| = c_m^2 = \frac{m(m+1)}{2}. \qquad (10)$$

c) if $\lambda_\mu=3$ it results:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-3(l_1,l_2,...,l_i-3,...,l_m)}^{n-3(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\mu-1})} \qquad (11)$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 3 \qquad (12)$$

in natural numbers, with $0 \le x_i \le 3$, $(i = 1,2,...,m)$.

The number of solutions for this equation is:

$$|R| = c_m^3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}. \qquad (13)$$

The list of these recurrence relations may continue, but their application becomes more and more difficult, because of the increasing of $|R|$.

Very simple and advantageously is the applying of the first two recurrence relation, that is for:

$\lambda_\mu=1$, and $\lambda_\mu=2$

We illustrate the method giving an example.

Calculate the number: $N = G_{10(3,3,2,2)}^{10(4,3,2,1)}$.

Applying the relation (2), we obtain:

$$N = G_{9(2,3,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,1,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} =$$
$$= 2 \cdot G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + 2 \cdot G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} = 2 \cdot 109 + 2 \cdot 87 = 392$$

It is obvious that the applying of the recurrence relation for N (DUL) it is assumed the knowledge of the value for this type of inferior order numbers (n-1, n-2, …).

Bibliography:

[1] D. Popescu, C. Vraciu – *Elemente de teoria grupurilor finite,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

[2] V. M. Popa – *On a question of linear programming,* Acta Universitatis Cibiniensis, vol.X (1), Sibiu, 1993.

[3] V. M. Popa – *Aplicaţii şi încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifazate în regimuri nesimetrice*, Referat de doctorat nr. 2, Universitatea Tehnică Cluj- Napoca, Facultatea de Electrotehnică Cluj – Napoca, 1994.

[4] V. M. Popa- *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis,* Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 38, nr. 1, 1995.

The Order Reducing Method for Determining the Number of Discreet Unbalanced Loads

Vasile Mircea POPA

Abstract: The paper proposes a new method for calculating the number of equivalence classes for discreet unbalanced loads, the order reducing method. The determination of this number is a combinatorial problem of distributing n impedances (μ classes of impedances where the class j contains λ_j equivalent impedances) in m phases of capacity l_i. The discreet unbalanced load is defined in this paper. The paper proposes an algebraic characterization for unbalanced discreet loads. The algebraic model is the bijection between two finite multiple sets. The number of unbalanced discreet loads is the number of equivalence classes for equivalence relation defined onto bijection set. This paper presents a method for unbalanced discreet loads number calculation. Four methods are presented and the order reducing method is detailed. The enumeration method algorithm was programmed on the electronic computer. In the paper numerical computational examples are given. At the end of the paper the conclusions and references are presented.

Key words: m-phased load, discreet unbalanced load, mathematical model for the discreet unbalanced load, methods for the discreet unbalanced loads calculation, order reducing method.

1. Introduction

We are considering an m-phased unbalanced load and the equivalent scheme in star connection (fig. 1, fig. 2).

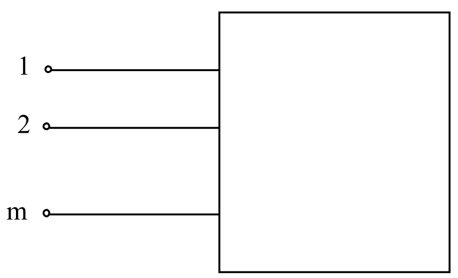

Figure 1 – A polyphasic unbalanced load

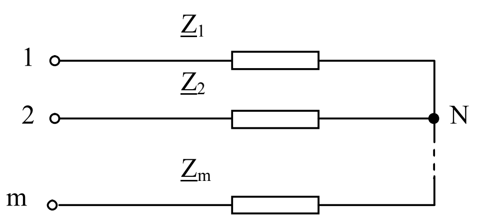

Figure 2 – Equivalent scheme in star connection

We assume that the phases are distinct between them (discernible). If the impedances from the m phases are made up (in a series) of elementary impedances (physical elements), we call the m-phased load discreet unbalanced load (DUL). [4], [5], [9]. We assume that we have n elementary impedances, namely μ classes of different elementary impedances, the j class containing λ_j identical impedances, thus:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n \tag{1}$$

The m distinct phases of the load with a star connection, contain l_i elementary impedances each, with:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = n \tag{2}$$

The scheme of such a discreet unbalanced load is given in fig. 3.

We call such a discreet unbalanced load of the $n(l_1, l_2, ..., l_m; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$ type.

We are to imply next that the discreet unbalanced loads (DUL), which we are to consider, do belong to this type.

At the transfer of some elementary impedances from a phase to another we obtain different unbalances loads, which introduce different types of lack of balance into the network where they belong.

Particularly, some of these loads can be balanced but they can be considered as limit cases of unbalanced loads [5]

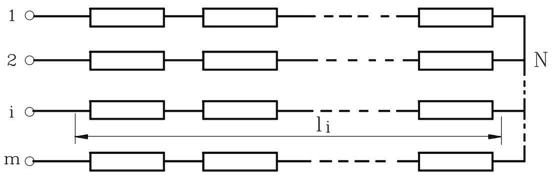

Figure 3 – Discreet unbalanced load

A question that is raised immediately is determined by the number of possible unbalanced, in other words, the number of the discreet unbalanced load. The number of the discreet unbalanced loads, which may exist, is finite and we note it:

$$N = N(DUL) = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} \tag{3}$$

By the $N = N(DUL)$ number calculation we use methods from the discreet mathematics, to be more exactly, from the combinatorics. [5], [2], [17], [18].

2. The mathematical model for DUL [6]

The mathematical model for the discreet unbalanced load is the bijection between two multiple sets [4],[5]. We take into consideration two finite sets X and Y, having the same number of elements: $|X| = |Y| = n$, as well as the set of bijections $f: X \rightarrow Y$ that we note as Y^X. Let us assume an equivalence relation (ρ_1) defined on the set X, which determines a partition of the set X, where μ equivalence classes X_j containing each λ_j elements, that is $|X_j| = \lambda_j, (j = 1, 2, ..., \mu)$. The elements of an equivalence class will be called equivalent or identical. In the same way, we consider an equivalent relation (ρ_2) defined on the set Y, which determines a partition of the set Y in m classes of equivalence, Y_i containing each l_i elements, namely $|Y_i| = l_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$. In this way, the sets X and Y become multiple sets, namely sets where the elements may repeat. Using this terminology, we may say that the set X contains μ distinct elements, the j element repeating λ_j times $(j = 1, 2, ..., \mu)$. Likewise, for the set Y.

Now we are to consider a permutations group G of the set X that is the simple (or direct) product of the symmetrical groups of permutations for the equivalence classes elements from X [5], [2], [17], [18].

This group is noted as: $G = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times ... \times S_{\lambda_\mu}$ and it is defined the following way: for any $\alpha \in G$, $\alpha_j \in S_{\lambda j}$, $x \in X_j$, we have:

$$\alpha(x) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j, ..., \alpha_\mu)(x) = \alpha_j(x) \tag{4}$$
$$(j = 1, 2, ..., \mu)$$

The definition is consistent. Due to the fact that G is a finite subset of S_n, in order that G may be a permutation group of the set X (a sub-group of the symmetric group S_n) it is sufficient for us to check that for any α, $\alpha' \in G$ $\Rightarrow \alpha\alpha' \in G$ (we noted $\alpha\alpha'$ the α and α' permutation composition). Let $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j, ..., \alpha_\mu)$ and $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_j, ..., \alpha'_\mu)$ be. For any $x \in X_j$, we get after the definition:

$$\alpha\alpha'(x) = \alpha(\alpha'(x)) = \alpha(\alpha'_j(x)) = \alpha_j(\alpha'_j(x)) = \alpha_j\alpha'_j(x)$$

We thus obtain:

$\alpha\alpha' = (\alpha_1\alpha'_1, \alpha_2\alpha'_2, ..., \alpha_j\alpha'_j, ..., \alpha_\mu\alpha'_\mu)$ and we can observe that $\alpha\alpha' \in G$.

Therefore G is a permutation group of the X set. We used the finite subgroups characterisation theorem [2],[17],[18]. Thus, through this permutation group, any X element of the X set is changed into an element that belongs to the same equivalence class as X.

Analogously, we also consider the H permutation group of the Y set:

$$H = S_{l_1} \times S_{l_2} \times ... \times S_{l_m}.$$

For any $\beta \in H$, $\beta_i \in S_{l_i}$, $y \in Y_i$, we have:

$$\beta(y) = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_i, ..., \beta_m)(y) = \beta_i(y) \tag{5}$$
$$(i = 1, 2, ..., m)$$

That is, through the permutation of this group, any y element of the Y set is changed into an element that belong to the same equivalence class as y.

There can be defined an equivalence relation (ρ) on the Y^X set, as follows: $f_1 \sim f_2$ if $\alpha \in G$ and $\beta \in H$ exist, so that $f_2 = \beta f_1 \alpha$. We demonstrate that the relation defined like this is an equivalence relation on the bijections set $f: X \rightarrow Y$, in ratio with the G and H permutation groups.

The relation is reflexive: $f \sim f$, because $f = \varepsilon_2 f \varepsilon_1$, where $\varepsilon_1 \in G$ and $\varepsilon_2 \in H$ are identical permutations from the two permutation groups. The relation is symmetrical: $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1$. It is true that $f_2 = \beta f_1 \alpha$ leads to $f_1 = \beta^{-1} f_2 \alpha^{-1}$, where $\alpha^{-1} \in G$ and $\beta^{-1} \in H$, fact that proves the assertion. The relation is transitive: $f_1 \sim f_2$ and $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3$. That is, from $f_2 = \beta f_1 \alpha$ and $f_3 = \beta' f_2 \alpha'$ it results $f_3 = \beta'\beta f_1 \alpha\alpha' = \beta'' f_1 \alpha''$, where: $\beta'\beta = \beta'' \in H$ and $\alpha'\alpha = \alpha'' \in G$.

The relation (ρ) of equivalence determines a partition of the Y^X set into classes of equivalence. The number of these classes of equivalence is noted in the following way:

$$|Y^X/\rho| = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} \tag{6}$$

We notice that the setting forth of this problem is equivalent to the problem to define the discreet unbalanced load (DUL). We take into consideration n elementary impedance (μ impedance classes, the j class containing λ_j identical impedances, as $\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j = n$) and m phases, the i phase receiving l_i elementary inseried impedances, with $\sum_{i=1}^{m} l_j = n$.

The n impedances are distributed in the m phases. The number of possible distribution is:

$$N = N(DUL) = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} \tag{7}$$

3. Methods for the N(DUL) number calculation

The author of this paper has elaborated four methods for the N (DUL) number calculation. These are:

1. The enumeration method
2. The Newton type polynomials method
3. The recurrence method
4. The order reducing method.

3.1. The enumeration method [7]

The enumeration method is based on the observation that the N number is equal to the solutions number of the system:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ji} = \lambda_j; \quad j = 1, 2, ..., \mu \\ \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i; \quad i = 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{8}$$

where $\lambda_j, l_i > 0; \quad x_{ji} \geq 0$ are natural numbers.

This system has μm unknowns and $\mu + m - 1$ independent equations (because of the conditions $\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j = \sum_{i=1}^{m} l_i = n$)

Therefore, the non-determination degree of system is:

$$\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1) \tag{9}$$

We notice that the N number also represents the matrices number with μ rows and m columns, containing natural numbers, where the sum of the rows, respectively of the columns, are imposed:

$$\begin{array}{c|cccc} n & l_1 & l_2 & \cdots & l_m \\ \hline \lambda_1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ \lambda_2 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_\mu & x_{\mu 1} & x_{\mu 2} & \cdots & x_{\mu m} \end{array} \tag{10}$$

The enumeration method "manually" applied consists of the effective construction of the matrices of the type (10) and their counting. It is obvious that for n capital, this variant is totally unpractical. Based on the enumeration method, we made up a computer program (called the DUL program) which systematically generates matrices of the (10) type and finally it gives the number of these matrices. The problem is reduced to the determination of the reduced matrices with $\mu - 1$ and $m - 1$ dimensions, where the x_{ji} variables take natural values between 0 and a maximum value and their sum is higher than or equal to the $n - l_1 - \lambda_1$.

We may write:

$$0 \leq x_{ji} \leq \min(\lambda_j - x_{j2} - x_{j3} - ... - x_{j,i-1}; \\ l_i - x_{2i} - x_{3i} - ... - x_{j-1,i}) \tag{11}$$

$$S = \sum_{j=2}^{\mu}\sum_{i=2}^{m} x_{ji} \geq n - l_1 - \lambda_1 \tag{12}$$

referring to the matrix:

$$M = \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2i} & \cdots & x_{2m} \\ x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3i} & \cdots & x_{3m} \\ \vdots & & & & & \\ x_{j2} & x_{j3} & \cdots & x_{ji} & \cdots & x_{jm} \\ \vdots & & & & & \\ x_{\mu 2} & x_{\mu 3} & \cdots & x_{\mu i} & \cdots & x_{\mu m} \end{bmatrix} \tag{13}$$

The number of the reduced matrices of the (13) type coincides with the (10) matrices number and it is exactly N (DUL)

A numeric example obtained:

$$G_{30(10,10,10)}^{30(10,10,10)} = 2211 \tag{14}$$

3.2.The Newton type polynomials method [4]

I propose the following algorithm [4], the Newton type polynomials method.

a) We solve the polynomial:

$$P = P_{\lambda 1} P_{\lambda 2} ... P_{\lambda \mu} \tag{15}$$

where: $P_{\lambda j} = P_{\lambda j}(x_1, x_2, ..., x_{\lambda j})$ is a Newton type polynomial of degree λ_j in λ_j variables [1].

$$P = P(x_1, x_2, ..., x_\lambda) \tag{16}$$

will have a:

$$\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j = n$$

degree and λ variables, where:

$$\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu).$$

b) We replace in P:

$$x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$
$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$$
$$\vdots$$
$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda$$

c) With the help of the multinominal theorem we calculate the coefficient of the single term $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ of the expansion of P, which will be the number we are looking for.

The general polynomial of Newton type has the form:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + ... + nk_n = n \\ k_1, k_2, ..., k_n \geq 0}} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! ... n^{k_n} k_n!}. \tag{17}$$

Applying the above mentioned general formula we can easily obtain the first Newton type polynomials:

$$P_1 = x_1$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right)$$

$$P_3 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3\right)$$

$$P_4 = \frac{1}{24}\left(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4\right).$$

The algorithm that we displayed before coincides with the Pólya – de Brujin enumeration method used in our problem case [2].

3.3. The recurrence method [8]

The number of the unbalanced classes for the discreet unbalanced loads can be determined with the aid of some N (DUL) numbers with lesser order.

The recurrence relations are easily deduced starting from the definition of the number N (DUL). By the decreasing order of the superior and inferior indices and the using of the symmetrical properties it was determined that:

$$\lambda_\mu = \min\left(l_1, l_2, ..., l_m; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu\right). \tag{18}$$

If $\lambda_\mu = 1$, it results:

$$G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-1(l_1, l_2, ..., l_i-1, ..., l_m)}^{n-1(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{\mu-1})} \tag{19}$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 1 \tag{20}$$

in natural numbers, with $0 \le x_i \le 1$, $(i = 1, 2, ..., m)$.

The solutions number of this equation is:

$$|R| = c_m^1 = m \text{ (combinations with repetition).} \tag{21}$$

If $\lambda_\mu = 2$, it results:

$$G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-2(l_1, l_2, ..., l_i-2, ..., l_m)}^{n-2(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{\mu-1})} \tag{22}$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 2 \tag{23}$$

in natural number, with $0 \le x_i \le 2$, $(i = 1, 2, ..., m)$.

The solutions number of this equation is:

$$|R| = c_m^2 = \frac{m(m+1)}{2}. \tag{24}$$

If $\lambda_\mu = 3$ it results:

$$G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-3(l_1, l_2, ..., l_i-3, ..., l_m)}^{n-3(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{\mu-1})} \tag{25}$$

where R is the equation solutions set:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 3 \tag{26}$$

in natural numbers, with $0 \le x_i \le 3$, $(i = 1, 2, ..., m)$.

The number of solutions for this equation is:

$$|R| = c_m^3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}. \tag{27}$$

The list of these recurrence relations may continue, but their application becomes more and more difficult, because of the increasing of $|R|$.

Very simple and advantageously is the applying of the first two recurrence relation, that is for:

$\lambda_\mu = 1$, and $\lambda_\mu = 2$.

We illustrate the method giving an example.

Calculate the number: $N = G_{10(3,3,2,2)}^{10(4,3,2,1)}$.

Applying the relation (2), we obtain:

$$N = G_{9(2,3,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,1,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} =$$

$$= 2 \cdot G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + 2 \cdot G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} = 2 \cdot 109 + 2 \cdot 87 = 392$$

It is obvious that the applying of the recurrence relation for N (DUL) it is assumed the knowledge of the value for this type of inferior order numbers $(n-1, n-2, ...)$.

4. The order reducing method

We consider the general symbol:

$$N = N(DUL) = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} \tag{28}$$

If $l_1 + \lambda_1 > n$ we may affirm that:

$$G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_{2n-l_1-\lambda 1(n-\lambda_1, l_2, ..., l_m)}^{2n-l_1-\lambda_1(n-l_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} \tag{29}$$

and the order is reduced.

Let's consider the matrix:

$$\begin{array}{c|cccc} n & l_1 & l_2 & \cdots & l_m \\ \hline \lambda_1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ \lambda_2 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & & & \\ \lambda_\mu & x_{\mu 1} & x_{\mu 2} & \cdots & x_{\mu m} \end{array} \tag{30}$$

By separating the first row and the first column, we obtain the reduced matrix, of dimensions $(\mu-1)(m-1)$.

Let N_ν be the number of cases in which the reduced matrix has the value ν.

Let the symbols:

$$G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_n \tag{31}$$

$$G_{n-1(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n-1(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_{n-1} \tag{32}$$

$$G_{n-2(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n-2(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_{n-2} \tag{33}$$

$$G_{n-3(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n-3(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_{n-3}. \tag{34}$$

We may affirm that:

a) if $l_1 + \lambda_1 = n$

$$G_n = G_{n-1} + N_0 \tag{35}$$

$$G_n = G_{n-2} + N_0 + N_1 \tag{36}$$

$$G_n = G_{n-3} + N_0 + N_1 + N_2 \tag{37}$$

b) if $l_1 + \lambda_1 = n - 1$

$$G_n = G_{n-1} + N_1 \tag{38}$$

$$G_n = G_{n-2} + N_1 + N_2 \tag{39}$$

c) if $l_1 + \lambda_1 = n - 2$

$$G_n = G_{n-1} + N_2 \tag{40}$$

We will now calculate the numbers N_ν, $(\nu = 0, 1, 2)$.

In the general symbol:

$$N = N(DUL) = G^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}_{n(l_1, l_2, ..., l_m)} \tag{41}$$

we apply the symmetry property, so that $l_1 \geq \lambda_1$. The inferior and superior indexes are in decreasing order:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_\mu \tag{42}$$

$$l_1 \geq l_2 \geq ... \geq l_m . \tag{43}$$

In the set of numbers $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu$, we make the following notations:

α_1 - the number of digits 1

α_2 - the number of digits 2

$\vdots$

$\alpha_{\mu-1}$ - the number of digits $\mu - 1$

α_μ - the number of digits ν or greater then μ.

We may affirm that:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu = \mu - 1 \tag{44}$$

We obtain the expressions:

$$N_0 = 1 \tag{45}$$

$$N_1 = (\mu - 1)(m - 1) \tag{46}$$

$$N_2 = \alpha_2 G^{n-l_1(2,\, n-l_1-2)}_{n-l_1(l_2, ..., l_m)} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2} G^{n-l_1(1,\, 1,\, n-l_1-2)}_{n-l_1(l_2, ..., l_n)} \tag{47}$$

The order reducing method consists of applying the relations: (29), (35), ..., (40) and (45), (46), (47).

Similar to the recurrence method, the order reducing method for the N(DUL) number calculation assumes knowing the value of several such numbers of inferior orders.

5. Numerical results obtained

In the following tables are given the numbers N(DUL) for n=1, 2, 3, 4, 5, 6 and 7.

Table 1 (n=1)

1	(1)
(1)	1

Table 2 (n=2)

2	(2)	(1,1)
(2)	1	1
(1,1)	1	2

Table 3 (n=3)

3	(3)	(2,1)	(1,1,1)
(3)	1	1	1
(2,1)	1	2	3
(1,1,1)	1	3	6

Table 4 (n=4)

4	(4)	(3,1)	(2,2)	(2,1,1)	(1,1,1,1)
(4)	1	1	1	1	1
(3,1)	1	2	2	3	4
(2,2)	1	2	3	4	6
(2.1.1)	1	3	4	7	12
(1,1,1,1)	1	4	6	12	24

Table 5 (n=5)

5	(5)	(4,1)	(3,2)	(3,1,1)	(2,2,1)	(2,1,1,1)	(1,1,1,1,1)
(5)	1	1	1	1	1	1	1
(4,1)	1	2	2	3	3	4	5
(3,2)	1	2	3	4	5	7	10
(3,1,1)	1	3	4	7	8	13	20
(2,2,1)	1	3	5	8	11	18	30
(2,1,1,1)	1	4	7	13	18	33	60
(1,1,1,1,1)	1	5	10	20	30	60	120

Table 6 (n=6)

6	(6)	(5,1)	(4,2)	(3,3)	(4,1,1)	(3,2,1)	(2,2,2)	(3,1,1,1)	(2,2,1,1)	(2,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1)
(6)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(5,1)	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	6
(4,2)	1	2	3	3	4	5	6	7	8	11	15
(3,3)	1	2	3	4	4	6	7	8	10	14	20
(4,1,1)	1	3	4	4	7	8	9	13	14	21	30
(3,2,1)	1	3	5	6	8	12	15	19	24	38	60
(2,2,2)	1	3	6	7	9	15	21	24	33	54	90
(3,1,1,1)	1	4	7	8	13	19	24	34	42	72	120
(2,2,1,1),	1	4	8	10	14	24	33	42	58	102	180
(2,1,1,1,1)	1	5	11	14	21	38	54	72	102	192	360
(1,1,1,1,1,1)	1	6	15	20	30	60	90	120	180	360	720

Table 7 (n=7; partial)

7	(7)	(6,1)	(5,2)	(4,3)	(5,1,1)	(4,2,1)	(3,3,1)	(3,2,2)	(4,1,1,1)
(7)	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(6,1)	1	2	2	2	3	3	3	3	4
(5,2)	1	2	3	3	4	5	5	6	7
(4,3)	1	2	3	4	4	6	7	8	8
(5,1,1)	1	3	4	4	7	8	8	9	13
(4,2,1)	1	3	5	6	8	12	13	16	19
(3,.3,1)	1	3	5	7	8	13	16	19	20

6. Conclusions

Therefore, the mathematical model for the discreet unbalanced load is the bijection between two multiple sets and the counting of the discreet unbalanced loads (DUL) is reduced to the bijections between two multiple sets counting [4], [5].

We also note that the defined relation for the lack of balance on the discreet loads set is an equivalence relation and the classes with lack of balance are corresponding equivalence classes.

The author of this paper has elaborated four methods for the calculation of the N (DUL) number [4], [5].

This paper presents a mathematical model for polyphasic loads unbalances classes analysis. The number N represents also the number of solutions for the system of equations:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ji} = \lambda_j; \quad \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i; \quad \lambda_j, l_i > 0; \quad x_{ji} \geq 0$$

The numbers x_{ji} are natural numbers and the numbers λ_j, l_i are strictly positive natural numbers. The system has μm unknowns (because of the equilibrium conditions).

As an application we urge the reader to check up by calculation the equalities:

$$G_{8(2,2,1,1,1,1)}^{8(2,2,2,1,1)} = 1548$$

$$G_{8(2,2,1,1,1,1,1)}^{9(3,2,2,1,1)} = 4900$$

and to formulate the according problems complying with the count of solutions both for the before system and for the matrices (10).

References:

[1] D. E. Knuth – "*The Art of Computer Programming*", vol.1, Fundamentals Algorithms, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1973

[2] I. Tomescu – "*Introduction to Combinatorics*", Collet's (Publishers) Limited, London and Wellingborough, England, 1975

[3] V. M. Popa – "*On a Question of Linear Programming*", Acta Universitatis Cibiniensis, vol.X, Sibiu, Romania, 1993

[4] V. M. Popa – "*A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*", Acta Electrotehnica Napocensis, vol.36, nr. 1, pg. 91-92, 1995

[5] V. M. Popa – "*Contribuții la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicații*", Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj-Napoca, 1999

[6] V. M. Popa – "*The Algebraic Characterization of the Discreet Unbalanced Loads*", Acta Universitatis Cibiniensis, vol.XXXII, Technical Series, A. Electrical Engineering and Electronics, pg. 33-34, Sibiu, 1999

[7] V. M. Popa – "*Methods for the Discreet Unbalanced Load Number Calculation*", Acta Universitatis Cibiniensis, vol.XXXII, Technical Series, A. Electrical Engineering and Electronics, pg. 31-32, Sibiu, 1999

[8] V. M. Popa – "*The Recurrence Method for m-Phased Loads Unbalanced Classes Number Calculation*", Acta Universitatis Cibiniensis, vol.XXXII, Technical Series, A. Electrical Engineering and Electronics, pg. 29-30, Sibiu, 1999

[9] V. M. Popa – "*Aplicații şi încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifazate în regimuri nesimetrice*", Referat de doctorat nr.2, Universitatea Thenică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj-Napoca, 1994

[10] V. M: Popa – "*On a Classification of the Three-Phase Loads*", Acta Universitatis Cibiniensis, vol.XIV (2), pg. 87-90, Sibiu, 1995

[11] V. M. Popa – "*A New Approach to be Characterized the Unbalanced Three-Phase Loads*", Acta Universitatis Cibiniensis, vol. XIV (2), pg. 91-93, Sibiu, 1995

[12] V. M. Popa – "*On an Analysis for the Unbalanced Loads*", Acta Electrotehnica Napocensis, vol.36, nr.1, pg. 93-94, Cluj-Napoca, 1995

[13] V. M. Popa – "Using Generalized Impedances in the study of a Real Unbalanced Load", Proocedings of the 2nd International Workshop CAD in Electromagnetism and Electrical Circuits – CADEMEC 99, Cluj-Napoca, 7-9 September 1999, volume, pg. 91-94

[14] V. M. Popa – "A Synthesis Regarding the Study of the Real Unbalanced Load", Universitatea "Politehnica" din Timişoara, Analele Facultății de Inginerie din Hunedoara, Tomul II, Fascicula 2, ISSN 1454-6531, pag. 9-12, Hunedoara, 2000

[15] V. M. Popa – "The Study of the Real Unbalanced Load for Extreme Functioning Situations", Universitatea "Politehnica" din Timişoara, Analele Facultății de Inginerie din Hunedoara, Tomul II, Fascicula 2, ISSN 1454-6531, pag. 13-16, Hunedoara, 2000

[16] E. Simion, E. Man, R. V. Ciupa, P. Roşca, V. Neamțu, V. M. Popa – "*Teoria circuitelor electrice*", Editura Universității Tehnice Cluj-Napoca, 1996

[17] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu – "*Bazele algebrei*", vol. I, Editura Academiei, Bucureşti, 1986

[18] D. Popescu, C. Vraciu – "*Elemente de teoria grupurilor finite*", Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986

[19] E. Pavel – "*Considerații privind receptoarele electrice trifazate dezechilibrate*", ENERG, vol.VII, pag. 194-220, Editura Thenică, Bucureşti, 1989

[20] E. Pavel – "*Noi aspecte ale teoriei receptoarelor trifazate statice dezechilibrate*", Energetica, vol.37, nr.11, noiembrie 1989, pag. 481-492

Model matematic al receptorului dezechilibrat discret

Vasile Mircea Popa

Abstract

Mathematical model for the discreet unbalanced load.

This paper presents a mathematical model for a discreet unbalanced load. We are considering an m-phased unbalanced load and the equivalent scheme in star connection. We assume that the phases are distinct between them (discernable). If the impedances from the m phases are made up (in a series) of elementary impedances (physical elements), we call the m-phased load discreet unbalanced load (DUL) [1], [3], [4]. We assume that we have n elementary impedances, namely μ classes of different elementary impedances, the j class containing λ_j identical impedances, thus: $\sum \lambda_j = n$. The m distinct phases of the load with a star connection contain l_i elementary impedances each, with: $\sum l_i = n$.

1. Introducere

Considerăm un receptor dezechilibrat m-fazat şi schema echivalentă în conexiunea stea (fig. 1).

În fazele receptorului se găsesc impedanțele complexe $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, ..., \underline{Z}_m$ şi considerăm fazele distincte (discernabile).

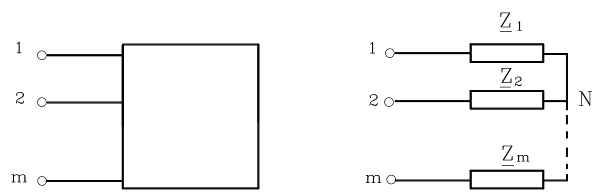

Fig. 1 Receptor dezechilibrat m-fazat şi schema echivalentă în stea

Dacă aceste impedanțe sunt formate (prin înseriere) din impedanțe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul m-fazat receptor dezechilibrat discret (RDD) [1], [2], [3], [4].

Presupunem că avem n impedanțe elementare, anume μ clase de impedanțe elementare diferite, clasa j conținând λ_j impedanțe identice, deci:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n \,. \tag{1}$$

Cele m faze distincte ale receptorului legat în stea conțin câte l_i impedanțe elementare, cu:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = n \,. \tag{2}$$

Schema unui astfel de receptor dezechilibrat discret este dată in figura 2.

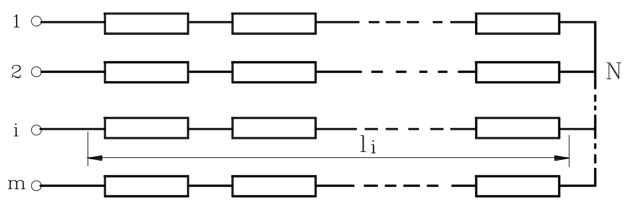

Fig. 2 Schema unui receptor dezechilibrat discret (RDD)

Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul n $n(l_1, l_2, ..., l_m; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$. În cele ce urmează vom subînțelege că receptorii dezechilibrați discreți (RDD) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

La transferul unor impedanțe elementare de pe o fază pe alta se obțin receptoare dezechilibrate diferite, care introduc diverse tipuri de dezechilibre în rețeaua din care fac parte.

În particular, unele din aceste receptoare pot fi echilibrate, dar acestea pot fi considerate cazuri limită de receptoare dezechilibrate, în conformitate cu punctul de vedere evidențiat în [1].

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibrați discreți.

Numărul receptorilor dezechilibrați discreți care pot exista este finit şi îl notăm :

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} \,. \tag{3}$$

Pentru calcul numărului N=N(RDD) se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [1], [3].

2. Modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret

Modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret este bijecția între două mulțimi multiple. [1], [3], [4].

Considerăm două mulțimi finite X şi Y având acelaşi număr de elemente: $|X| = |Y| = n$, precum şi mulțimea bijecțiilor $f : X \to Y$, mulțime pe care o notam $B(X,Y)$.

Să considerăm o relație de echivalență (ρ_1) definită pe mulțimea X, care determină o partiție a mulțimii X în μ clase de echivalență X_j conținând câte λ_j elemente, adică $|X_j| = \lambda_j$ ($j = 1,2,...,\mu$). Elementele unei clase de echivalență vor fi denumite echivalente sau identice. La fel, considerăm o relație de echivalență (ρ_2) definită pe mulțimea Y, care determină o partiție a mulțimii Y în m clase de echivalență Y_i conținând câte l_i elemente, adică $|Y_i| = l_i$ ($i = 1,2,...,m$).

În acest fel, mulțimile X şi Y devin mulțimi multiple, adică mulțimi în care elementele se pot repeta. Utilizând această terminologie, putem spune că mulțimea X conține μ elemente distincte, elementul j repetându-se de λ_j ori ($j = 1,2,...,\mu$). Asemănător, pentru mulțimea Y (fig. 3).

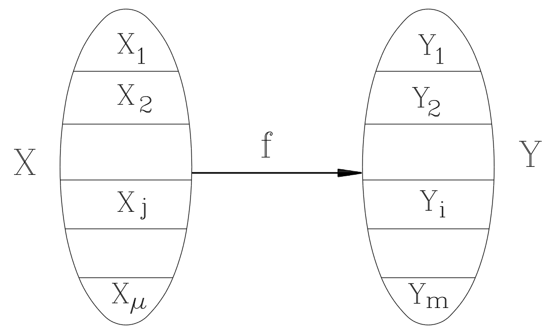

Fig. 3 Bijecția între două mulțimi multiple

Vom considera acum un grup G de permutări al mulțimii X şi anume produsul simplu (sau direct) al grupurilor simetrice de permutări ale elementelor claselor de echivalență din X [1], [3], [4]. Acest grup se notează astfel: $G = S_{\lambda_1} \cdot S_{\lambda_2} \cdot ... \cdot S_{\lambda_\mu}$ şi se defineşte în felul următor: pentru orice $\alpha \in G$, $\alpha_j \in S_{\lambda_j}$, $x \in X_j$, avem:

$$\alpha(x)(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j, ..., \alpha_\mu)(x) = \alpha_j(x),\ j = (1,2,...,\mu). \quad (4)$$

Deci, prin permutările acestui grup, orice element x al mulţimii X este transformat într-un element care aparţine aceleiaşi clase de echivalenţă ca şi x.

Analog,considerăm şi grupul H de permutări al mulţimii Y:

$$H = S_{l_1} \cdot S_{l_2} \cdot \ldots \cdot S_{l_m}$$

Pentru orice $\beta \in H$, $\beta_i \in S_{l_i}$, $y \in Y_i$, avem:

$$\beta(y) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots \beta_m)(y) = \beta_i(y), \ i = (1, 2, \ldots, m). \tag{5}$$

Deci, prin permutările acestui grup, orice element y al mulţimii Y este transformat într-un element care aparţine aceleiaşi clase de echivalenţă ca şi y.

Se poate defini o relaţie de echivalenţă (ρ) pe mulţimea $B(X,Y)$, în modul următor: $f_1 \sim f_2$ dacă există $\alpha \in G$ şi $\beta \in H$ astfel încât $f_2 = \beta\ f_1\ \alpha$.

Se poate demonstra că relaţia astfel definită este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea bijecţiilor [1].

Relaţia (ρ) de echivalenţă determină o partiţie a mulţimii $B(X,Y)$ în clase de echivalenţă. Numărul acestor clase de echivalenţă se notează astfel:

$$|B(X,Y)/\rho| = G_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}. \tag{6}$$

Observăm că problema expusă mai sus este echivalentă cu problema definirii receptorului dezechilibrat discret (RDD).

Prin urmare, modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret este bijecţia între două mulţimi multiple iar numărarea receptorilor dezechilibraţi discreţi (RDD) se reduce la numărarea bijecţiilor între două mulţimi multiple [1], [3].

De asemenea, observăm că relaţia de dezechilibru definită pe mulţimea receptorilor discreţi este o relaţie de echivalenţă iar clasele de dezechilibru sunt clasele de echivalenţă corespuzătoare.

3. Exemplu privind structura receptorilor dezechilibraţi discreţi de un anumit tip

În continuare vom considera un caz particular şi anume vom determina numărul receptorilor dezechilibraţi discreţi de tipul 7 (3, 2, 2; 4, 3). Avem: $G_{7(3,2,2)}^{7(4,3)} = 8$.

Receptorii dezechilibrați discreți corespuzători sunt reprezentați în continuare (fig. 4).

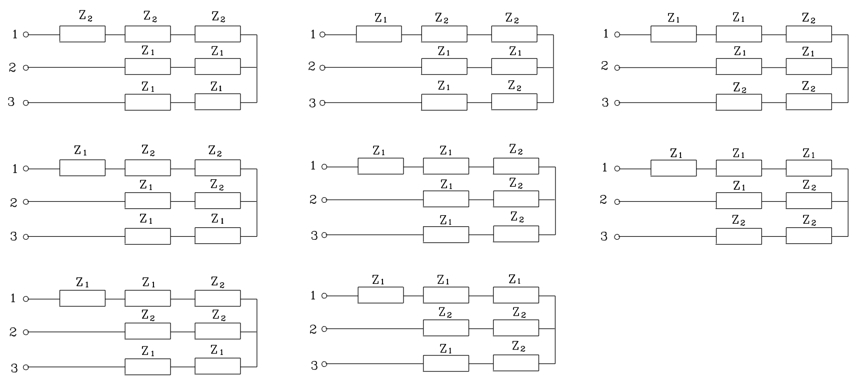

Fig. 4 Schemele receptorilor dezechilibrați discreți de tipul 7 (3, 2, 2; 4, 3)

4. Algoritm de calcul pentru numărul N=N(RDD)

Pentru calculul numărului:

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)}$$

putem utiliza algoritmul dedus în [1],[3] şi pe care îl reproducem în continuare:

a) Se calculează polinomul:

$$P = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot ... \cdot P_{\lambda_\mu},$$

unde $P_{\lambda_i} = P_{\lambda_i}(x_1, x_2, ..., x_{\lambda_i})$ este polinomul de tip Newton, de grad λ_i, în λ_i nedeterminate.

Deci, $P = P(x_1, x_2, ..., x_\lambda)$ va avea gradul $\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = n$ şi λ nedeterminate, unde $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$.

b) Se înlocuieşte în P:

$$x_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$

$$x_2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_\lambda = y_1^\lambda + y_2^\lambda + ... + y_m^\lambda .$$

c) Se calculează cu teorema multinomului coeficientul monomului $y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_m^{l_m}$ din dezvoltarea lui P, care va fi chiar numărul căutat.

Polinomul general de tip Newton are forma:

$$P_n = \sum_{\substack{k_1+2k_2+...+nk_n=n \\ k_1, k_2, ..., k_n \geq 0}} \frac{1}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! ... n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n} .$$

Aplicând formula generală de mai sus se obţin uşor primele patru polinoame de tip Newton:

$$P_1 = x_1; \qquad P_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2\right); \qquad P_3 = \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3\right);$$

$$P_4 = \frac{1}{24}\left(x_1^4 + 6x_2^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4\right).$$

Algoritmul expus mai sus coincide cu metoda de numărare Pólya – de Bruijn aplicată în cazul problemei noastre [1].

5. Concluzii

În prezenta lucrare s-a definit şi apoi s-a considerat un model matematic pentru receptorul dezechilibrat discret. Relaţia de dezechilibru definită pe mulţimea receptorilor dezechilibraţi discreţi este o relaţie de echivalenţă iar clasele de dezechilibru sunt clasele de echivalenţă corespuzătoare. Se determină numărul claselor de dezechilibru prin metode speciale de calcul. Printr-un program de calculator elaborat în acest sens, se obţine lista reprezentanţilor claselor de dezechilibru, deci lista receptorilor dezechilibraţi discreţi de un anumit tip care pot exista. Cu alte cuvinte, folosind modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret se poate studia structura receptorilor dezechilibraţi de un anumit tip, se poate calcula numărul claselor de dezechilibru şi se poate obţine lista exhaustivă a reprezentanţilor claselor de dezechilibru respective. Unele aspecte ale problematicii abordate în lucrarea de faţă au fost iniţiate în teza de doctorat a autorului şi au fost dezvoltate în unele lucrări ulterioare (a se vedea lista bibliografică).

Bibliografie

[1] Popa V.M. – *Contribuţii la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicaţii*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, 1999

[2] Popa V.M. – *Program de calculator pentru analiza structurii receptoarelor dezechilibrate discrete*, Lucrările primei Conferinţe tehnico-stiinţifice "Profesorul Dorin Pavel-fondatorul hidroenergeticii româneşti", Sebeş, 8-9 iunie 2001, Volumul Tehnică şi Inginerie, ISBN 973-8254-07-8, Sebeş, 2001

[3] Popa V.M. - *The Order Reducing Method for Discreet Unbalanced Loads Number Determination*, Acta Universitatis Cibiniensis, volumul XLII, Seria Tehnică, H. Inginerie Electrică şi Electronică (nivel internaţional), Sibiu, 2001

[4] Popa V.M. - *The Newton Type Polynomials Method for the Discreet Unbalanced Loads Classes Analysis*, www.roger-univ.ro, Publicaţii, Analele Universităţii Româno-Germane din Sibiu, Secţiunea Tehnică, Sibiu, 2003

Aspecte algebrice privind receptoarele dezechilibrate discrete m-fazate

Vasile Mircea Popa

Abstract

The paper proposes an algebraic characterisation for unbalanced discreet loads. The algebraic model is the bijection between two finite multiple sets. The number of unbalanced discreet loads is the number of equivalence classes for equivalence relation defined onto bijection set.

1. Introducere

Vom considera un receptor dezechilibrat m - fazat şi schema echivalentă în conexiune stea. Presupunem că fazele sunt distincte între ele (discernabile). Dacă impedanțele din cele m faze sunt formate (prin înseriere) din impedanțe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul m - fazat receptor dezechilibrat discret (RDD). [3], [4].

Presupunem că avem n impedanțe elementare, anume μ clase de impedanțe elementare diferite, clasa j conținând λ_j impedanțe identice , deci:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n \,. \tag{1}$$

Cele m faze distincte ale receptorului legat în stea conțin câte li impedanțe elementare , cu:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = n \,. \tag{2}$$

Schema unui astfel de receptor dezechilibrat discret este dată în figura 1.

Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul n (l_1, l_2, ... , l_m; λ_1, λ_2, ..., λ_μ). În cele ce urmează vom subînțelege că receptorii dezechilibrați discreți (RDD) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

La transferul unor impedanțe elementare de pe o fază pe alta se obțin receptoare dezechilibrate diferite, care introduc diverse tipuri de dezechilibre în rețeaua din care fac parte. În particular, unele din aceste receptoare pot fi echilibrate, dar acestea pot fi considerate cazuri limită de receptoare dezechilibrate [3].

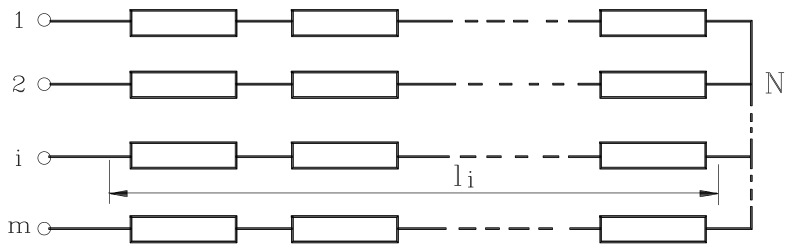

Fig.1

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibrați discreți. Numărul receptorilor dezechilibrați discreți care pot exista este finit şi îl notăm:

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)} . \tag{3}$$

Pentru calcul numărului $N = N(RDD)$ se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [1], [2], [3].

2. Modelul algebric pentru RDD

Modelul algebric pentru receptorul dezechilibrat discret este bijecția între două mulțimi multiple. [3], [4]. Considerăm două mulțimi finite X şi Y având acelaşi număr de elemente: $|X| = |Y| = n$, precum şi mulțimea bijecțiilor $f : X \to Y$, mulțime pe care o notăm Y^X.

Să considerăm o relație de echivalență (ρ_1) definită pe mulțimea X, care determină o partiție a mulțimii X în μ clase de echivalență X_j conținând câte λ_j elemente, adică $|X_j| = \lambda_j$, $j = (1,2,\ldots,\mu)$. Elementele unei clase de echivalență vor fi denumite echivalente sau identice. La fel, considerăm o relație de echivalentă (ρ_2) definită pe mulțimea Y, care determină o partiție a mulțimii Y în m clase de echivalență Y_i conținând câte l_i elemente, adică $|Y_i| = l_i$, $i = (1,2,\ldots,m)$. În acest fel, mulțimile X şi Y devin mulțimi multiple, adică mulțimi în care elementele se pot repeta. Utilizând această terminologie, putem spune că mulțimea X conține μ elemente distincte, elementul j repezându-se de λ_j ori ($j = 1,2,\ldots,\mu$). Asemănător, pentru mulțimea Y.

Vom considera acum un grup G de permutări al mulțimii X şi anume produsul simplu (sau direct) al grupurilor simetrice de permutări ale elementelor claselor de echivalență din X [1], [2], [3].

Acest grup se notează astfel: $G = S_{\lambda_1} \cdot S_{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot S_{\lambda_\mu}$ şi se defineşte în felul următor: pentru orice $\alpha \in G$, $\alpha_j \in S_{\lambda_j}$, $x \in X_j$, avem:

$$\alpha(x)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_\mu)(x) = \alpha_j(x),\ j = (1,2,\ldots,\mu). \tag{4}$$

Definiţia este consistentă. Într-adevăr, deoarece G este o submulţime finită a lui S_n, pentru ca G să fie un grup de permutări al mulţimii X (subgrup al grupului simetric S_n) este suficient să verificăm că pentru orice $\alpha,\ \alpha' \in G \Rightarrow \alpha\alpha' \in G$ (am notat cu $\alpha\alpha'$ compunerea permutărilor α şi α'). Fie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_\mu)$ şi $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_j, \ldots, \alpha'_\mu)$. Pentru orice $x \in X_j$, avem conform definiţiei:

$$\alpha\alpha'(x) = \alpha(\alpha'(x)) = \alpha(\alpha'_j(x)) = \alpha_j(\alpha'_j(x)) = \alpha_j\alpha'_j(x).$$

Se obţine deci:

$$\alpha\alpha' = (\alpha_1\alpha'_1, \alpha_2\alpha'_2, \ldots, \alpha_j\alpha'_j, \ldots, \alpha_\mu\alpha'_\mu),$$

şi se observă că $\alpha\alpha' \in G$.

Prin urmare G este un grup de permutări al mulţimii X. Am utilizat teorema de caracterizare a subgrupurilor finite [1], [2]. Deci, prin permutările acestui grup, orice element x al mulţimii X este transformat într-un element care aparţine aceleiaşi clase de echivalenţă ca şi x.

Analog,considerăm şi grupul H de permutări al mulţimii Y:

$$H = S_{l_1} \cdot S_{l_2} \cdot \ldots \cdot S_{l_m}.$$

Pentru orice $\beta \in H$, $\beta_i \in S_{l_i}$, $y \in Y_i$, avem:

$$\beta(y) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots \beta_m)(y) = \beta_i(y),\ i = (1,2,\ldots,m). \tag{5}$$

Deci, prin permutările acestui grup, orice element y al mulţimii Y este transformat într-un element care aparţine aceleiaşi clase de echivalenţă ca şi y.

Se poate defini o relaţie de echivalenţă (ρ) pe mulţimea Y^X, în modul următor: $f_1 \sim f_2$ dacă există $\alpha \in G$ şi $\beta \in H$ astfel încât $f_2 = \beta\ f_1\ \alpha$. Să demonstrăm că relaţia astfel definită este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea bijecţiilor $f : X \to Y$, în raport cu grupurile G şi H de permutări.

Relaţia este reflexivă: $f \sim f$, deoarece $f = \varepsilon_2\ f\ \varepsilon_1$, unde $\varepsilon_1 \in G$ şi $\varepsilon_2 \in H$ sunt permutările identice din cele două grupuri de permutări. Relaţia este simetrică: $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1$. Într-adevăr, $f_2 = \beta\ f_1\ \alpha$ conduce la $f_1 = \beta^{-1}\ f_2\ \alpha^{-1}$, unde $\alpha^{-1} \in G$ şi $\beta^{-1} \in H$,ceea ce probează afirmaţia. Relaţia este tranzitivă: $f_1 \sim f_2$ şi $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3$. Într-adevăr, din $f_2 = \beta\ f_1\ \alpha$ şi $f_3 = \beta'\ f_2\ \alpha'$ rezultă $f_3 = \beta'\beta f_1 \alpha\alpha' = \beta'' f_1 \alpha''$, unde $\beta\beta' = \beta'' \in H$ şi $\alpha\alpha' = \alpha'' \in G$.

Relaţia (ρ) de echivalenţă determină o partiţie a mulţimii Y^X în clase de echivalenţă. Numărul acestor clase de echivalenţă se notează astfel:

$$\left|Y^X / \rho\right| = G_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}. \tag{6}$$

Observăm că problema expusă mai sus este echivalentă cu problema definirii receptorului dezechilibrat discret (RDD). Considerăm n impedanțe elementare (μ clase de impedanțe, clasa j conținând λ_j impedanțe identice, deci $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n$) şi m faze, faza i primind l_i impedanțe elementare înseriate, cu $\sum_{i=1}^{m} l_i = n$. Se distribuie cele n impedanțe în cele m faze. Numărul de distribuiri posibile este:

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)} . \tag{7}$$

3. Concluzii

Prin urmare, modelul matematic pentru receptorul dezechilibrat discret este bijecția între două mulțimi multiple iar numărarea receptorilor dezechilibrați discreți (RDD) se reduce la numărarea bijecțiilor între două mulțimi multiple [4].

De asemenea, observăm că relația de dezechilibru definită pe mulțimea receptorilor discreți este o relație de echivalență iar clasele de dezechilibru sunt clasele de echivalență corespuzătoare. Autorul aceste lucrari a elaborat patru metode pentru calculul numarului N(RDD) [3].

Bibliografie

[1] C. Năstăsescu , C. Niță , C. Vraciu – *Bazele algebrei*, vol. I , Editura Academiei, Bucureşti, 1986

[2] D. Popescu , C. Vraciu – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986

[3] V. M. Popa – *Aplicații şi încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifa*zate *în regimuri nesimetrice*, Referat de doctorat nr. 2, Universitatea Tehnica Cluj - Napoca, Facultatea de Electrotehnică Cluj - Napoca, 1994

[4] V.M. Popa – *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 38, nr. 1, 1995

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Metode pentru analiza claselor de dezechilibru ale receptoarelor m-fazate

Vasile Mircea Popa

Abstract

This paper presents methods for m – phased loads unbalanced classes analysis. Four methods are presented and the enumeration method is detailed. The respective algorithm was programmed on the electronic computer.

1. Introducere

Receptorul dezechilibrat discret m - fazat de tipul $n(l_1, l_2, ..., l_m; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$ a fost definit în unele lucrări anterioare [4], [5].

Autorul prezentei lucrări a elaborat patru metode pentru calculul numărului N(RDD). Acestea sunt:

1.Metoda enumerării

2.Metoda polinoamelor de tip Newton

3.Metoda de recurență

4.Metoda reducerii ordinului.

Metoda polinoamelor de tip Newton a fost expusă în lucrarea [4]. În continuare vom prezenta metoda enumerării.

2. Metoda enumerării

Această metodă se bazează pe observația că numărul N este egal cu numărul soluțiilor sistemului:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ji} = \lambda_j; \quad j = 1, 2, ..., \mu \\ \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i; \quad i = 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{1}$$

unde $\lambda_j, l_i > 0; \quad x_{ji} \geq 0$ sunt numere naturale.

Acest sistem are μm necunoscute şi $\mu + m - 1$ ecuații independente (datorită condiției $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = \sum_{i=1}^{m} l_i = n$). Prin urmare, gradul de nedeterminare al sistemului este:

$$\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1). \tag{2}$$

Se observă că numărul N reprezintă de asemenea numărul matricilor cu μ linii şi m coloane, conținând numere naturale, la care sumele liniilor, respectiv ale coloanelor sunt impuse:

$$\begin{array}{c|cccc} n & l_1 & l_2 & \cdots & l_m \\ \hline \lambda_1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ \lambda_2 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & & & & \\ \lambda_\mu & x_{\mu 1} & x_{\mu 2} & \cdots & x_{\mu m} \end{array} \tag{3}$$

Metoda enumerării aplicată "manual" constă în construirea efectivă a matricilor de tipul (3) şi numărarea lor. Este evident că pentru n mare această variantă este total nepractică.

Pe baza metodei enumerării s-a realizat un program de calculator (numit programul RDD) care generează sistematic matrici de tipul (3) şi în final dă numărul acestor matrici. Problema se reduce la determinarea matricilor reduse de dimensiuni $\mu - 1$ şi $m - 1$, în care variabilele x_{ji} iau valori naturale cuprinse între 0 şi o valoare maximă iar suma lor este mai mare sau egală decât numărul $n - l_1 - \lambda_1$.

Putem scrie :

$$0 \leq x_{ji} \leq \min\left(\lambda_j - x_{j2} - x_{j3} - \ldots - x_{j,i-1}; l_i - x_{2i} - x_{3i} - \ldots - x_{j-1,i}\right) \tag{4}$$

$$S=\sum_{j=2}^{\mu}\ \sum_{i=2}^{m} x_{ji} \geq n-l_1-\lambda_1 \tag{5}$$

cu referire la matricea :

$$M=\begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2i} & \dots & x_{2m} \\ x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3i} & \dots & x_{3m} \\ \vdots & & & & & \\ x_{j2} & x_{j3} & \dots & x_{ji} & \dots & x_{jm} \\ \vdots & & & & & \\ x_{\mu 2} & x_{\mu 3} & \dots & x_{\mu i} & \dots & x_{\mu m} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Numărul matricilor reduse de tipul (6) coincide cu numărul matricilor (3) şi este deci chiar N(RDD).

Câteva exemple numerice obţinute:

$$G_{8(3,2,1,1,1)}^{8(2,2,2,1,1)}=618 \tag{7}$$

$$G_{9(3,2,2,1,1)}^{9(3,2,2,1,1)}=1173 \tag{8}$$

$$G_{9(2,2,2,1,1,1)}^{9(3,3,1,1,1)}=1980 \tag{9}$$

$$G_{10(2,2,2,2,2)}^{10(3,3,2,2)}=1830 \tag{10}$$

$$G_{10(5,2,2,1)}^{10(2,2,2,1,1,1,1)}=1875 \tag{11}$$

$$G_{10(5,2,1,1,1)}^{10(2,2,2,1,1,1,1)}=3510 \tag{12}$$

$$G_{30(10,10,10)}^{30(10,10,10)}=2211 \tag{13}$$

Programul RDD permite obţinerea numerelor N(RDD) în timpi variind de la o fracţiune de secundă la câteva minute, în cazul valorilor mari (de ordinul milioanelor). Utilizând metoda enumerării, respectiv programul de calculator RDD, s-au calculat toate valorile lui N(RDD) pentru $n \leq 10$. Tabelele cu numerele N(RDD) sunt date în lucrarea [5].

Tabelele conţin numerele claselor de dezechilibru pentru receptori dezechilibraţi discreţi de tipul $n(l_1,l_2,...,l_m;\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)$. Numărul n este notat în colţul din stânga-sus al fiecărui tabel. Indicii inferiori sunt marcaţi în partea stângă a tabelelor, sub forma $(l_1,l_2,...,l_m)$. Indicii superiori sunt marcaţi în partea superioară a tabelelor, sub forma $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)$. La intersecţia liniei şi a coloanei respective se citeşte numărul N=N(RDD).

Tabelele sunt exhaustive şi prezintă simetrie faţă de diagonala principală, datorită proprietăţii de simetrie.

Marele avantaj al utilizării programului de calculator este posibilitatea calculării unor numere N(RDD) pentru un n oarecare, când nu dispunem de tabelele cu numerele N(RDD) pentru n-1, n-2, ... (necesare pentru metoda recursivă). În acest caz, comparaţia cu una din metodele manuale de calcul (metoda enumerării, metoda polinoamelor de tip Newton, metoda de recurenţă, metoda reducerii ordinului) evidenţiază avantajul absolut , incontestabil al utilizării programului de calculator.

Bibliografie

[1] D. Popescu, C. Vraciu – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986

[2] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu – *Bazele algebrei*, vol. I, Editura Academiei, Bucureşti, 1986

[3] V. M. Popa – *On a Question of Linear Programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol. X (1), Sibiu, 1993, pag. 65 – 67

[4] V.M. Popa –*A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 36, nr. 1, Cluj – Napoca, 1995, pag. 91 – 92

[5] V. M. Popa – *Contribuţii la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicaţii*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj-Napoca, 1999

Universitatea „Lucian Blaga” Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth”
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

Metodă recursivă pentru determinarea numărului receptoarelor dezechilibrate discrete

Vasile Mircea Popa

Abstract

The paper proposes a recursive method for unbalanced discreet loads number calculation. The numbers N (RDD) can be determined recursively, using recurrence relations. At the end of the paper a numerical computational example is presented.

1. Introducere

Vom considera un receptor dezechilibrat m-fazat şi schema echivalentă în conexiune stea. Presupunem că fazele sunt distincte între ele (discernabile). Dacă impedanţele din cele m faze sunt formate (prin înseriere) din impedanţe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul m-fazat receptor dezechilibrat discret (RDD) [3], [4].

Presupunem că avem n impedanţe elementare, anume μ clase de impedanţe elementare diferite, clasa j conţinând λ_j impedanţe identice, deci:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n . \qquad (1)$$

Cele m faze distincte ale receptorului legat în stea conţin câte li impedanţe elementare , cu:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = n . \qquad (2)$$

Schema unui astfel de receptor dezechilibrat discret este dată in figura 1.

Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul $n(l_1,l_2,...,l_m;\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)$. În cele ce urmează vom subînțelege că receptorii dezechilibrați discreți (RDD) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

La transferul unor impedanțe elementare de pe o fază pe alta se obțin receptoare dezechilibrate diferite, care introduc diverse tipuri de dezechilibre în rețeaua din care fac parte. În particular, unele din aceste receptoare pot fi echilibrate, dar acestea pot fi considerate cazuri limită de receptoare dezechilibrate [4].

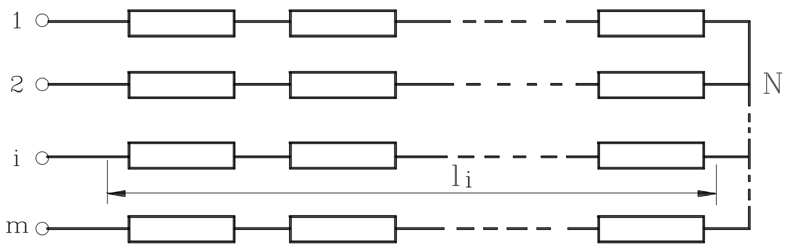

Fig.1

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibrați discreți. Numărul receptorilor dezechilibrați discreți care pot exista este finit şi îl notăm :

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)}. \tag{3}$$

Pentru calcul numărului $N = N(RDD)$ se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [1], [2], [4].

În prezenta lucrare va fi expusă metoda recursivă pentru calculul numărului N(RDD) al receptoarelor dezechilibrate discrete.

2. Metoda recursivă (de recurență)

Numărul claselor de dezechilibru pentru receptoarele dezechilibrate discrete se poate determina cu ajutorul unor formule de recurență. Acestea permit calculul numărului N(RDD) de ordin n cu ajutorul unor numere N(RDD) de ordine mai mici. Formulele de recurență se deduc uşor, pornind de la definiția numărului N(RDD). Prin ordonarea descrescătoare a indicilor superiori şi inferiori şi utilizarea proprietății de simetrie facem ca :

$$\lambda_\mu = \min\left(l_1, l_2, ..., l_m, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\right) \tag{4}$$

a) dacă $\lambda_\mu = 1$, avem:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-1(l_1,l_2,...,l_i-1,...,l_m)}^{n-1(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\mu-1})} \tag{5}$$

unde R este mulțimea soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 1 \tag{6}$$

în numere naturale, cu $0 \le x_i \le 1, \quad (i = 1, 2, ..., m)$.

Numărul soluțiilor acestei ecuații este:

$$|R| = c_m^1 = m \text{ (combinări cu repetiție).} \tag{7}$$

b) Dacă $\lambda_\mu = 2$, avem:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-2(l_1,l_2,...,l_i-2,...,l_m)}^{n-2(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\mu-1})} \tag{8}$$

unde R este mulțimea soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 2 \tag{9}$$

în numere naturale, cu $0 \le x_i \le 2, \quad (i = 1, 2, ..., m)$.

Numărul soluțiilor acestei ecuații este:

$$|R| = c_m^2 = \frac{m(m+1)}{2}. \tag{10}$$

c) Dacă $\lambda_\mu = 3$, avem:

$$G_{n(l_1,l_2,...,l_m)}^{n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\mu)} = \sum_R G_{n-3(l_1,l_2,...,l_i-3,...,l_m)}^{n-3(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{\mu-1})} \tag{11}$$

unde R este mulțimea soluțiilor ecuației:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 3 \tag{12}$$

în numere naturale, cu $0 \le x_i \le 3, \quad (i = 1, 2, ..., m)$.

Numărul soluțiilor acestei ecuații este:

$$|R| = c_m^3 = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}. \tag{13}$$

Lista acestor formule de recurență poate fi continuată, dar aplicarea lor devine tot mai grea, datorită creşterii lui $|R|$.

Foarte simplă şi avantajoasă este aplicarea primelor două formule de recurenţă, deci pentru $\lambda_\mu = 1$ şi $\lambda_\mu = 2$.

Vom ilustra metoda printr-un exemplu.

Să se calculeze numărul $N = G_{10(3,3,2,2)}^{10(4,3,2,1)}$.

Aplicând formula (5) obţinem:

$$N = G_{9(2,3,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,1,2)}^{9(4,3,2)} + G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} = 2 \cdot G_{9(3,2,2,2)}^{9(4,3,2)} + 2 \cdot G_{9(3,3,2,1)}^{9(4,3,2)} =$$
$$= 2 \cdot 109 + 2 \cdot 87 = 392$$

Este evident că aplicarea metodei de recurenţă pentru N(RDD) presupune cunoaşterea valorii unor astfel de numere de ordine inferioare ($n-1$, $n-2$, ...).

Bibliografie

[1] D. Popescu , C. Vraciu – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986

[2] V.M. Popa – *On a Question of Linear Programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol. X (1), Sibiu, 1993, pag. 65-67

[3] V.M. Popa – *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 36, nr. 1, Cluj-Napoca, 1995, pag. 91-92

[4] V.M. Popa – *Contribuţii la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicaţii*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj-Napoca, 1999

Universitatea „Lucian Blaga" Sibiu
Facultatea de Inginerie „Hermann Oberth"
Catedra de Inginerie Electrică şi Electronică
Str. Emil Cioran, nr. 4
Sibiu, România
E-mail: vasile_mircea.popa@ulbsibiu.ro
Web: webspace.ulbsibiu.ro/vasile_mircea.popa

O metodă de reducere pentru calculul numărului receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate

Vasile Mircea Popa

Abstract

A Reducing Method for the m-Phased Discreet Unbalanced Loads Number Calculation

The paper proposes a new method for calculating the number of equivalence classes for discreet unbalanced loads, the order reducing method. The discreet unbalanced load is defined in this paper. This paper presents a method for unbalanced discreet loads number calculation. Four methods are presented and the reducing method is also detailed. At the end of the paper the conclusions and references are presented.

1. Introducere

Considerăm un receptor dezechilibrat m-fazat şi schema echivalentă în conexiunea stea (fig. 1).

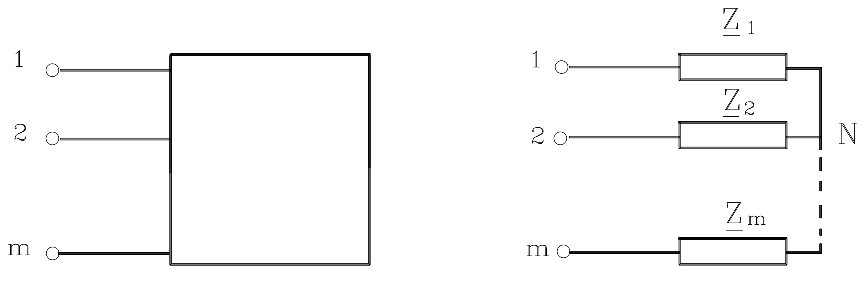

Fig. 1. Receptor dezechilibrat m-fazat şi schema echivalentă în stea

În fazele receptorului se găsesc impedanţele complexe $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \ldots, \underline{Z}_m$ şi considerăm fazele distincte (discernabile).

Dacă aceste impedanţe sunt formate (prin înseriere) din impedanţe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul m-fazat receptor dezechilibrat discret (RDD) [4], [5], [6].

Presupunem că avem n impedanțe elementare, anume μ clase de impedanțe elementare diferite, clasa j conținând λj impedanțe identice, deci:

$$\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = n . \qquad (1)$$

Cele m faze distincte ale receptorului legat în stea conțin câte li impedanțe elementare, cu:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = n . \qquad (2)$$

Schema unui astfel de receptor dezechilibrat discret este dată in figura 2.

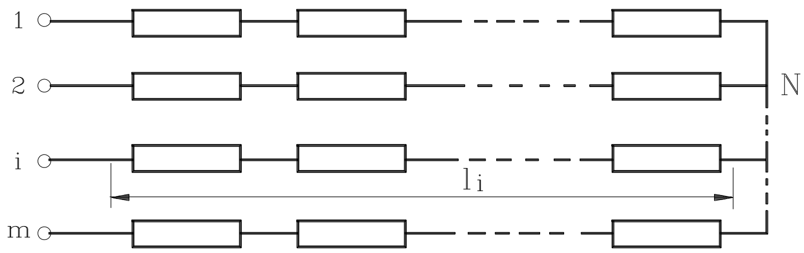

Fig.2. Schema unui receptor dezechilibrat discret (RDD)

Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul n (l1, l2, ... , lm; λ1, λ2, ..., λμ). În cele ce urmează vom subînțelege că receptorii dezechilibrați discreți (RDD) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

La transferul unor impedanțe elementare de pe o faza pe alta se obțin receptoare dezechilibrate diferite, care introduc diverse tipuri de dezechilibre în rețeaua din care fac parte.

În particular, unele din aceste receptoare pot fi echilibrate, dar acestea pot fi considerate cazuri limită de receptoare dezechilibrate, în conformitate cu punctul de vedere evidențiat în lucrarea [5].

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibrați discreți.

Numărul receptorilor dezechilibrați discreți care pot exista este finit şi îl notăm:

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1, l_2, \ldots, l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u)} . \qquad (3)$$

Pentru calcul numărului N = N (RDD) se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [4], [5].

2. Metode pentru calculul numărului N(RDD)

Autorul prezentei lucrări a elaborat patru metode pentru calculul numărului N(RDD). Acestea sunt:

1. Metoda enumerării [5], [6]
2. Metoda polinoamelor de tip Newton [4]
3. Metoda de recurență [5]
4. Metoda reducerii ordinului.

Primele trei metode sunt dezvoltate în referințele bibliografice indicate.

În continuare vom prezenta metoda reducerii ordinului.

3. O metodă de reducere a ordinului

Considerăm simbolul general:

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} \tag{4}$$

Dacă $l_1 + \lambda_1 > n$, putem afirma că:

$$G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_{2n-l_1-\lambda_1(n-\lambda_1, l_2, ..., l_m)}^{2n-l_1-\lambda_1(n-l_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} \tag{5}$$

şi ordinul este redus.

Să considerăm matricea:

$$\begin{array}{c|cccc} n & l_1 & l_2 & \cdots & l_m \\ \hline \lambda_1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ \lambda_2 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & & & \\ \lambda_\mu & x_{\mu 1} & x_{\mu 2} & \cdots & x_{\mu m} \end{array} \tag{6}$$

Separând primul rând şi prima coloană, obţinem matricea redusă, de dimensiuni $(\mu - 1)(m - 1)$.

Fie N_ν numărul de cazuri în care matricea redusă ia valoarea ν (suma elementelor).

Fie simbolurile:
$$G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_n \tag{7}$$

$$G_{n-1(l_1-1, l_2, ..., l_m)}^{n-1(\lambda_1-1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_{n-1} \tag{8}$$

$$G_{n-2(l_1-2, l_2, ..., l_m)}^{n-2(\lambda_1-2, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_{n-2} \tag{9}$$

$$G_{n-3(l_1-3, l_2, ..., l_m)}^{n-3(\lambda_1-3, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} = G_{n-3}. \tag{10}$$

Putem afirma că:

-dacă $l_1 + \lambda_1 = n$
$$G_n = G_{n-1} + N_0 \tag{11}$$

$$G_n = G_{n-2} + N_0 + N_1 \tag{12}$$

$$G_n = G_{n-3} + N_0 + N_1 + N_2 \tag{13}$$

-dacă $l_1 + \lambda_1 = n - 1$
$$G_n = G_{n-1} + N_1 \tag{14}$$

$$G_n = G_{n-2} + N_1 + N_2 \tag{15}$$

-dacă $l_1 + \lambda_1 = n - 2$
$$G_n = G_{n-1} + N_2 \tag{16}$$

Vom calcula numerele N_ν, $(\nu = 0, 1, 2)$.

În simbolul general:
$$N = N(RDD) = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)} \tag{17}$$

aplicăm proprietatea de simetrie, astfel încât $l_1 \geq \lambda_1$. Indicii inferiori şi superiori sunt în ordine descrescătoare:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_\mu \tag{18}$$

$$l_1 \geq l_2 \geq ... \geq l_m. \tag{19}$$

În mulţimea de numere $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu$, facem următoarele notaţii:

α_1 = numărul de cifre 1; α_2 = numărul de cifre 2; ..., $\alpha_{\nu-1}$ = numărul de cifre $\nu-1$, α_ν = numărul de cifre ν sau mai mari decât ν.

Putem afirma că: $$\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu=\mu-1 \quad (20)$$

Obținem expresiile: $$N_0=1 \quad (21)$$

$$N_1=(\mu-1)(m-1) \quad (22)$$

$$N_2=\alpha_2 G_{n-l_1(l_2,\dots,l_m)}^{n-l_1(2,\,n-l_1-2)}+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}G_{n-l_1(l_2,\dots,l_n)}^{n-l_1(1,\,1,\,n-l_1-2)}. \quad (23)$$

Metoda reducerii ordinului constă în aplicarea relațiilor: (5), (11), ..., (16) şi (21), (22), (23).

Similar cu metoda de recurență, metoda reducerii ordinului pentru calculul numerelor N(RDD) presupune cunoaşterea valorilor unor asemenea numere de ordin inferior.

4. Concluzii

Dintre metodele “manuale” de calcul, deosebit de practice sunt formulele de reducere a ordinului pentru l1 + λ1 > n; l1 + λ1 = n; l1 + λ1 = n - 1. Deci, 3 formulele de calcul simple cu care se pot calcula din aproape în aproape orice tabele cu numere N(RDD), bazându-ne pe cele existente (anterioare,cu n mai mic).

Bibliografie

[1] Popescu, D., Vraciu, C. – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986

[2] Năstăsescu, C., Niță, C., Vraciu, C. –*Bazele algebrei*, vol. I, Editura Academiei, Bucureşti, 1986

[3] Popa, V. M. – *On a Question of Linear Programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol. X (1), Sibiu, 1993, pag. 65 – 67

[4] Popa, V. M. – *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 36, nr. 1, Cluj - Napoca, 1995, pag. 91 – 92

[5] Popa, V. M. – *Contribuții la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicații*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj - Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj - Napoca, 1999

[6] Popa,V.M. – *Program de calculator pentru analiza structurii receptoarelor dezechilibrate discrete*, Lucrările primei conferințe tehnico-ştiințifice “Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii româneşti”, volumul Tehnică şi Inginerie, pag. 121-126, Sebeş, 8-10 iunie 2001

Analiza asistată de calculator a receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate

Vasile Mircea Popa

Abstract

The Computer Aided Analysis of the m-Phased Discreet Unbalanced Loads

The paper proposes a computer program for calculating the number of equivalence classes for discreet unbalanced loads. The determination of this number is a combinatorial problem of distributing n impedances (μ classes of impedances where the class j contains λj equivalent impedances) in m phases of capacity li. The enumeration method algorithm was programmed on the electronic computer. In the paper numerical computational examples are given.

1. Introducere

Considerăm un receptor dezechilibrat m-fazat şi schema echivalentă în conexiunea stea. În fazele receptorului se găsesc impedanțele complexe $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, ..., \underline{Z}_m$ şi considerăm fazele distincte (discernabile). Dacă aceste impedanțe sunt formate (prin înseriere) din impedanțe elementare (elemente fizice), vom numi receptorul m-fazat receptor dezechilibrat discret (RDD). [4], [5], [6].

Presupunem că avem n impedanțe elementare, anume μ clase de impedanțe elementare diferite, clasa j conținând λ_j impedanțe identice. Cele m faze distincte ale receptorului legat în stea conțin câte l_i impedanțe elementare. Un astfel de receptor dezechilibrat discret îl vom numi de tipul $n(l_1, l_2, ..., l_m; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$. În cele ce urmează vom subînțelege că receptorii dezechilibrați discreți (RDD) pe care îi vom considera sunt de acest tip.

O problemă care se pune imediat este determinarea numărului de dezechilibre posibile, cu alte cuvinte a numărului receptorilor dezechilibrați discreți.

Numărul receptorilor dezechilibrați discreți care pot exista este finit şi îl notăm :

$$N = N(RDD) = G_{n(l_1, l_2, ..., l_m)}^{n(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_u)}. \tag{1}$$

Pentru calcul numărului N = N (RDD) se utilizează metode din matematica discretă, mai exact, din combinatorică [4], [5].

2. Metode pentru analiza receptoarelor dezechilibrate discrete

Autorul prezentei lucrări a elaborat patru metode pentru calculul numărului N(RDD). Acestea sunt:

1. Metoda enumerării
2. Metoda polinoamelor de tip Newton
3. Metoda de recurență
4. Metoda reducerii ordinului.

În continuare vom prezenta metoda enumerării.

Această metodă se bazează pe observația că numărul N este egal cu numărul soluțiilor sistemului:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ji} = \lambda_j; \quad j = 1, 2, ..., \mu \\ \sum_{j=1}^{\mu} x_{ji} = l_i; \quad i = 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{2}$$

unde $\lambda_j, l_i > 0; \quad x_{ji} \geq 0$ sunt numere naturale.

Acest sistem are μm necunoscute şi $\mu + m - 1$ ecuații independente (datorită condiției $\sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j = \sum_{i=1}^{m} l_i = n$). Prin urmare, gradul de nedeterminare al sistemului este:

$$\mu m - (\mu + m - 1) = (\mu - 1)(m - 1) \tag{3}$$

Se observă că numărul N reprezintă de asemenea numărul matricilor cu μ linii şi m coloane, conținând numere naturale, la care sumele liniilor, respectiv ale coloanelor sunt impuse:

$$\begin{array}{c|cccc} n & l_1 & l_2 & \dots & l_m \\ \hline \lambda_1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ \lambda_2 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & & & & \\ \lambda_\mu & x_{\mu 1} & x_{\mu 2} & \dots & x_{\mu m} \end{array} \tag{4}$$

Metoda enumerării aplicată "manual" constă în construirea efectivă a matricilor de tipul (4) şi numărarea lor. Este evident că pentru n mare această variantă este total nepractică.

3. Analiză asistată de calculator

Pentru valori mari ale lui n, calculul numărului N(RDD) prin metodele arătate anterior este dificil.

Pe baza metodei enumerării s-a realizat un program de calculator (numit programul RDD) care generează sistematic matrici de tipul (4) şi în final dă numărul acestor matrici. Problema se reduce la determinarea matricilor reduse de dimensiuni $\mu - 1$ şi $m - 1$, în care variabilele x_{ji} iau valori naturale cuprinse între 0 şi o valoare maximă iar suma lor este mai mare sau egală decât numărul $n - l_1 - \lambda_1$.

Putem scrie :

$$0 \leq x_{ji} \leq \min\left(\lambda_j - x_{j2} - x_{j3} - ... - x_{j,i-1}; l_i - x_{2i} - x_{3i} - ... - x_{j-1,i}\right) \tag{5}$$

$$S = \sum_{j=2}^{\mu} \sum_{i=2}^{m} x_{ji} \geq n - l_1 - \lambda_1 \tag{6}$$

cu referire la matricea:

$$M = \begin{bmatrix} x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2i} & \dots & x_{2m} \\ x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3i} & \dots & x_{3m} \\ \vdots & & & & & \\ x_{j2} & x_{j3} & \dots & x_{ji} & \dots & x_{jm} \\ \vdots & & & & & \\ x_{\mu 2} & x_{\mu 3} & \dots & x_{\mu i} & \dots & x_{\mu m} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Numărul matricilor reduse de tipul (7) coincide cu numărul matricilor (4) şi este deci chiar N(RDD).

În continuare vom prezenta câteva rezultate numerice obţinute utilizând programul de calculator RDD. Primele cinci rezultate ar putea fi obţinute şi prin una din metodele “manuale” de calcul.

$G_{8(3,2,1,1,1)}^{8(2,2,2,1,1)} = 618$	$G_{9(3,2,2,1,1)}^{9(3,2,2,1,1)} = 1173$
$G_{9(2,2,2,1,1,1)}^{9(3,3,1,1,1)} = 1980$	$G_{10(2,2,2,2,2)}^{10(3,3,2,2)} = 1830$
$G_{10(5,2,2,1)}^{10(2,2,2,1,1,1,1)} = 1875$	$G_{30(10,10,10)}^{30(10,10,10)} = 2211$

Ecranul programului RDD este prezentat în figura 1:

```
INTRODUCETI DIMENSIUNILE MATRICII:

Numarul de linii:      5
Numarul de coloane:    5

INTRODUCETI PARAMETRII:
    n =  15

INTRODUCETI COMPONENTELE PE LINII
   la1 = 5
   la2 = 4
   la3 = 2
   la4 = 2
   la5 = 2

INTRODUCETI COMPONENTELE PE COLOANE
   l1 = 7
   l2 = 3
   l3 = 2
   l4 = 2
   l5 = 1


NUMARUL DE DEZECHILIBRE POSIBILE ESTE

            [n = 15]  [5 linii]
          G                         = 14981
            [n = 15]  [5 coloane]

Continuati? [d/n]
```

Fig. 1 Ecranul programului RDD (ecranul de lucru)

Programul RDD permite obţinerea numerelor N(RDD) în timpi variind de la o fracţiune de secundă la câteva minute, în cazul valorilor mari (de ordinul milioanelor). Utilizând metoda enumerării, respectiv programul de calculator RDD, s-au calculat toate valorile lui N(RDD) pentru n≤10. Tabelele cu numerele N(RDD) sunt date în lucrarea [5]. Tabelele conţin numerele claselor de dezechilibru pentru receptori dezechilibraţi discreţi de tipul $n(l_1, l_2, ..., l_m; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$. Numărul n este notat în colţul stânga-sus al fiecărui tabel. Indicii inferiori sunt marcați în partea stângă a tabelelor, sub forma $(l_1, l_2, ..., l_m)$. Indicii superiori sunt marcați în partea superioară a tabelelor, sub forma $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu)$.

La intersecția liniei şi a coloanei respective se citeşte numărul N=N(RDD).

Tabelele sunt exhaustive şi prezintă simetrie față de diagonala principală.

4. Concluzii

Numerele N = N(RDD) sunt cu atât mai "simple" (mai mici şi mai uşor de calculat) cu atât ordinul n este mai mic. Din acest motiv, tabelele s-au calculat în ordinea prezentată, adică începând cu n = 1, continuând cu n = 2 ş.a.m.d. până la n = 10. Dintre metodele "manuale" de calcul, deosebit de practice sunt formulele de recurență pentru $\lambda_\mu = 1$ şi $\lambda_\mu = 2$ şi formulele de reducere a ordinului pentru $l_1 + \lambda_1 > n$; $l_1 + \lambda_1 = n$; $l_1 + \lambda_1 = n - 1$. Deci, 5 formulele de calcul simple cu care se pot calcula din aproape în aproape orice tabel, bazându-ne pe cele existente (anterioare). Totuşi un astfel de calcul „manual" al primelor 10 tabele cu numerele N(RDD) necesită circa 40 de ore de calcul.

Programul de calculator RDD, scris în limbajul C şi rulat pe un calculator AMD K7 750 MHz, 128 MB memorie RAM şi 20 GB pentru HDD permite efectuarea aceluiaşi calcul în circa 8 ore (aici este evident inclus şi timpul necesar introducerii datelor). Marele avantaj al utilizării programului de calculator este posibilitatea calculării unor numere N(RDD) pentru un n oarecare, când nu dispunem de tabelele cu numerele N(RDD) pentru n-1, n-2, ... (necesare pentru metoda recursivă). În acest caz, comparația cu una din metodele manuale de calcul (metoda enumerării, metoda polinoamelor de tip Newton, metoda de recurență, metoda reducerii ordinului) evidențiază avantajul absolut, incontestabil al utilizării programului de calculator.

Programul de calculator RDD, cu o minimă modificare, permite şi afişarea structurii receptoarelor dezechilibrate discrete prin intermediul matricii reprezentative (4).

Bibliografie

[1] Popescu, D., Vraciu, C. – *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

[2] Năstăsescu, C., Niță, C., Vraciu, C. – *Bazele algebrei*, vol. I, Editura Academiei, Bucureşti, 1986.

[3] Popa, V. M. – *On a Question of Linear Programming*, Acta Universitatis Cibiniensis, vol. X (1), Sibiu, 1993, pag. 65 – 67.

[4] Popa, V. M. – *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*, Acta Electrotehnica Napocensis, vol. 36, nr. 1, Cluj - Napoca, 1995, pag. 91 – 92.

[5] Popa, V. M. – *Contribuții la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicații*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj - Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj - Napoca, 1999.

[6] Popa, V. M. – *Program de calculator pentru analiza structurii receptoarelor dezechilibrate discrete*, Lucrările primei conferințe tehnico-ştiințifice "Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii româneşti", volumul Tehnică şi Inginerie, pag. 121-126, Sebeş, 8-10 iunie 2001.

ANEXA

Tabel
care indică unde au mai fost publicate o parte dintre articole.

Articolul	Unde a mai fost publicat
Grupări generalizate.	Volumul Matematică aplicată, Sibiu, 1995, pag. 11-23 (o variantă a articolului).
A Mathematical Model for Unbalanced Classes Analysis of Polyphasic Loads.	International Workshop in Electrotechnics, Cluj-Napoca, 17-20 august 1995, Acta Electrotehnica Napocensis, vol.36, nr. 1, ISSN 1224-2497, pag. 91-92.
The Algebraic Characterization of Discreet Unbalanced Loads.	Acta Universitatis Cibiniensis, vol. XXXII , Technical series, A. Electrical Engineering and Electronics, ISSN 1221-4930, Sibiu, 1999, pag. 33-34.
Methods for Calculating the Number of Discreet Unbalanced Loads.	Acta Universitatis Cibiniensis, vol. XXXII, Technical series, A. Electrical Engineering and Electronics, ISSN 1221-4930, Sibiu, 1999, pag. 31-32.
The Recurrence Method for Calculating the Unbalanced Classes Number of m-Phased Loads.	Acta Universitatis Cibiniensis, vol. XXXII,Technical series,A. Electrical Engineering and Electronics, ISSN 1221-4930, Sibiu, 1999, pag. 29-30.
The Order Reducing Method for Determining the Number of Discreet Unbalanced Loads.	Acta Universitatis Cibiniensis, vol. XLVI, Technical series, H. Electrical Engineering and Electronics, ISSN 1221-4949, Sibiu, 2001, (nivel internațional), pag. 61-66.
Model matematic al receptorului dezechilibrat discret.	Lucrările celei de A VIII-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii româneşti”, Sebeş, 30-31 mai 2008; Volumul „Ştiință şi Inginerie” (vol. 13), ISBN 973-8130-82-4, pag. 229-234.
Aspecte algebrice privind receptoarele dezechilibrate discrete m-fazate.	Sesiunea de comunicări ştiințifice a Universității “Petru Maior”, Târgu Mureş, 27-28 octombrie 2000, Volumul 7, Electroenergentică, ISBN 973-8084-19-9, pag. 197-200.
Metode pentru analiza claselor de dezechilibru ale receptoarelor m-fazate.	Sesiunea de comunicări ştiințifice a Academiei Forțelor Terestre “Nicolae Bălcescu”, TEHNOMIL 2001, Sibiu, 27 aprilie 2001, Volum, Electronică şi Electrotehnică, ISBN 973-8088-48-8, pag. 103-106.
Metodă recursivă pentru determinarea numărului receptoarelor dezechilibrate discrete.	Sesiunea de comunicări ştiințifice a Academiei Forțelor Terestre “Nicolae Bălcescu”, TEHNOMIL 2001, Sibiu, 27 aprilie 2001, Volum, Electronică şi Electrotehnică, ISBN 973-8088-48-8, pag. 107-110.

O metodă de reducere pentru calculul numărului receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate.	A III-a Sesiune de Comunicări Ştiinţifice cu participare internaţională, Hunedoara, 4-5 octombrie 2001; Universitatea "Politehnica" din Timişoara, Analele Facultăţii de Inginerie din Hunedoara, Tomul III, Fascicola 2, ISSN 1454-6531, pag. 44-47.
Analiza asistată de calculator a receptoarelor dezechilibrate discrete m-fazate.	A III-a Sesiune de Comunicări Ştiinţifice cu participare internaţională, Hunedoara, 4-5 octombrie 2001; Universitatea "Politehnica" din Timişoara, Analele Facultăţii de Inginerie din Hunedoara, Tomul III, Fascicola 2, ISSN 1454-6531, pag. 48-51.

BIBLIOGRAFIE

[A1] Abuelma'atti, M.T. - *Simple method for calculating Fourier coefficients of experimentally obtained waveforms*; IEE Proc. - Sci.Meas.Technol., Vol.141, No.3, May 1994, pp.177-178

[A2] Akherraz, M. - *Pspice - Assisted Dynamic Modeling and Simulation of Induction Motor Drives*; 1997 IEEE International Electric Machines and Drives Conference Record, May 18-21, 1997, pp. MB1, 8.1-8.3

[A3] Akpinar, K., Pillay, P., Richards, G.G. - *Induction motor drive behavior during unbalanced faults*; Electric Power Systems Research, Vol.36, No.2, February 1996, pp. 131-137

[A4] Albu, T., Ion, I.D. - *Itinerar în algebra superioară*, Editura All, Bucureşti, 1997

[A5] Amin, B. - *Contribution to iron-loss evaluation in electrical machines; European Transactions on Electrical Power Engineering*, Vol.5, No.5, Sep.-Oct. 1995, pp.325-332

[A6] Amin, B. - Slot - *Based Equations and General Equivalent Circuit in Induction Motor-Analysis and Control*; ETEP, Vol.5, No.6, November/December 1995, pp.375-382

[A7] Arkhangelskii, N.L., Kurnyshev, B.S., Zakharov, P.A. - *A tensor approach to the electromagnetic analysis of an induction motor*; Electrical Technology, Selected Translations from Elektrichestvo, No.1, 1995, pp.75-83

[B1] Benamrouche, N., Haddad, S., Bousbaine, A., Low, W.F.- *Determination of iron and stray load losses in induction motors using a thermometric method*; Eletric Machines and Power Systems, Vol.26, No.1, January 1998, pp.3-12

[B2] Benes, J. - *Sisteme cibernetice cu organizare automată*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1970

[B3] Bercovici, M., Arie, A., Tudose, M. - *Aspecte privind aplicarea teoriei componentelor simetrice în analiza regimurilor nesimetrice ale rețelelor electrice*; Buletinul Institutului Politehnic Bucureşti, tomul XXIX, numărul 4, iulie-august 1967, pag.101-131

[B4] Berndt, M.M., Schmitz, N.L. - *Derating of Polyphase Induction Motors Operated with Unbalanced Line Voltages*; IEEE Trans. Power App. Syst., February 1963, pp.680-686

[B5] Blasko, V., Kaura, V. - *A new mathematical model and control of a three-phase AC-DC voltage source converter; IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol.12, No.1, jan.1997, pp.116-123

[B6] Bogoevici, N., Toader, D. - *Utilizarea fazorilor de nesimetrie în analiza rețelelor electrice trifazate nesimetrice şi dezechilibrate*; Energetica, Vol.41., nr.4-B, 1993, pag.29-34

[B7] Bonacina, G., Salvetti, M., Zola, M. - *Structural testing of electromechanical equipment - Mathematical modeling and experimentation*; A.E.I. Automazione Energia Informazione, Vol.85, No.3, march 1998

[B8] Bose, B.K., Patel, N.R. – *Quasi-fuzzy estimation of stator resistance of induction motor, IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol.13, no.3, May 1998, pp.401-409

[B9] Boys, J.T. - *Theoretical Spectra for Narrow-Band Random PWM Waveforms*; IEE Proceedings - B, Electric Power Applications, Vol.140, No.6, November 1993

[B10] Brice, C.W., Dougal, R.A., Hudgins, J.K. – *Review of technologies for current-limiting low-voltage circuit breakers*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.32, no.5, September-October 1996, pp.1005-1010

[B11] Brittain, J.E.- *Charles L.G. Fortescue and the method of symmetrical components*, Proceeding of the IEEE, Vol.86, no.5, May 1998, pp.1020-1025

[B12] Bromilow, M. - *Computer algebra and applied mathematics*; IEE Review, Vol.43, No.5, sept.1997, pp.259-267

[B13] Busch, R. – *About the concept of consumed life of electrical machine windings and its application*, European Transaction on Electrical Power, Vol.8, no.2, March-April 1998, pp.105-110

[C1] Caramia, P., Carpinelli, G., Gagliari, F., Verde, P. - *Analysis and Design of a Combined System of Shunt Passive and Active Filters*; European Transactions on Electrical Power Engineering, Vol.4, No.2, Mar.-Apr. 1994

[C2] Castello, R., Montecchi, F., Rezzi, F., Baschirotto, A. - *Low - voltage analog filters*; IEEE Transactions on Circuits and Systems I, Fundamental Theory and Applications, Vol.42, No.11, November 1995, pp.827-840

[C3] Cavallini, A., Loggini, M., Montanari, G.C. - *Comparison of Approximate Methods for Estimate Harmonic Currents Injected by AC/DC Converters*; IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.41, No.2, april 1994, pp.256-262

[C4] Cerovsky, Z., Seinsch, H.O. - *Time Dependence and Symmetrical Properties of Rotor - Currents of Induction Machines Fed from U-Converters with Block - Waveform*; Archiv fur Elektrotechnik, Vol.77, No.2, January 1994

[C5] Cherry, J.A., Snelgrove, W.M. – *On the characterization and reduction of distortion in bandpass filters*, IEEE Transactions on Circuits and System I, Vol.45, no.5, May 1998, pp.523-537

[C6] Ciupa, R.V., Croicu, A.M. – *The Optimization of an Electromagnet by the Gradient Method;* Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 36, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1995, pag. 75-77

[C7] Ciupa, R.V. – *Regimuri tranzitorii în sisteme electrice*, Editura Universităţii Tehnice Cluj-Napoca, 1996

[C8] Ciupa, R.V., Croicu, A.M. – *Optimization in Electrotechnics trough the Descending Methods. Examples; Proceedings of the 1st International Workshop CAD in Electromagnetism and Electrical Circuits,* CADEMEC 97, 5-7 August 1997, Cluj-Napoca, Romania, Volume, pag. 102-107.

[C9] Ciupa, R.V. , Topa, V. – *The Theory of Electric Circuits*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 1998

[C10] Ciupa, R.V. – *Regimuri tranzitorii în sisteme electrice,* ediţia a-II-a, Editura Universităţii Tehnice Cluj-Napoca, 1998

[C11] Clarke, E. - *Analiza circuitelor sistemelor electroenergetice* (traducere selectivă din limba engleză -S.U.A.), Editura Tehnică, Bucureşti, 1973

[C12] Coloşi, T., Feştilă, R., Nascu, I., Raica, P. - *Modelling and numerical simulation alternative of induction motors in d-q axes*; Proceedings, First International Symposium on Advanced Electromechanical Motion Control Systems ELECTROMOTION'95, Cluj-Napoca, 25-26 May 1995, Volume, pp.116-119

[C13] Cristaldi, L., Ferrero, A. - *Mathematical foundations of the instantaneous power concepts: An algebric approach*; European Transaction on Electrical Power, Vol.6, No.5, sep.-oct. 1996, pp.305-309

[C14] Czarnecki, L.S., Tan, O.T. - *Evaluation and Reduction of Harmonic Distortion Caused by Solid State Voltage Controllers of Induction Motors*; IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol.9, No.3, September 1994, pp.528-534

[C15] Czarnecki, L.S. - *Power theory of electrical circuits with quasi-periodic waveforms of voltages and currents*; European Transaction on Electrical Power, Vol.6, No.5, sep.-oct. 1996, pp.321-328

[C16] Czarnecki, L.S. - *Budeanu and Fryze: Two frameworks for interpreting power properties of cicuits with nonsinusoidal voltages and currents*; Electrical Engineering, Vol.80, No.6, december 1997, pp.359-368

[D1] De Jong, H.C.J. - *Skew Leakage in Induction Machines*; European Transactions on Electrical Power Engineering, Vol.4, No.1, January-February 1994

[D2] De Jong, H.C.J. - *Scale aspects of electrical machine inductances; International Journal of Electrical Engineering Education*, Vol.32, No.2, April 1995, pp.179-185

[D3] Dems, M., Komeza, K., Wiak, S. - *Computation of rotor winding power losses in squirrel-cage induction motor*; COMPEL, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol.14, No.4, December 1995, pp.89-93

[D4] Dessouky, Y.G., Williams, B.W., Fletcher, J.E. - *Cooling enhancement of electric motors*, IEE Proceedings Electric Power Applications, Vol.145, No.1, January 1998, pp.57-60

[D5] De Weerdt, R., Hameyer, K., Belmans, R. - *End winding leakage calculation of a squirrel-cage induction motor for different load conditions*; COMPEL, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol.14, No.4, December 1995, pp.85-89

[D6] Ding, K.Q., Zhou, Z.G., Liu, C.T. – *Latin hypercube sampling used in the calculation of the fracture probability*, Reliability Engineering & Sistem Safety, Vol.59, no.2, February 1998, pp.239-242

[D7] Dogaru, O., Tevy, I., Udriste, C. – *Extrema constrained by a family of curves and local extrema*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.97, no.3, June 1998, pp.605-622

[D8] Dordea, T. - *Maşini electrice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970

[D9] Dragomir, A., Laziun, V. - *Teorie combinatorie. Elemente de combinatorică clasică şi generalizată*, Editura Universităţii din Timişoara, 1974

[D10] Dragomir, A., Dragomir, P. - *Structuri algebrice*, Editura Facla, Timişoara, 1981

[D11] Drăgănescu, O.G. - *Încercările maşinilor electrice rotative*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1987

[D12] Dupre, L.R., Vankeer, R., Melkebeek, J.A.A. – *A computational model for the iron losses in rotating electrical machines*; International Journal of Engineering Science, Vol.36, no.7-8, May-June 1998, pp. 699-710

[D13] Duric, M., Radojevic, Z., Skokljev, I., Terzija, V. - *A simple algorithm for the symmetrical components relaying and monitoring*; Electrical Engineering, Vol.79, 1996

[E1] Eldhemy, S.A., Mohamed, A.A., Shokralla, S.S. - *Calculation of additional losses caused by feeding an induction motor from a nonsinusoidal supply*; International Journal of Electrical Engineering Education, Vol.32, No.1, January 1995, pp.51-63

[E2] El Din, A.S.Z., Lashine, A.E., Shokralla, S.S. - *Improvement of starting characteristic and speed control of three-phase induction motor using microprocesor*; Electric Machines and Power Systems, Vol.26, No.3, April 1998, pp.265-276

[E3] Emanuel, A.E. - *The oscillatory nature of the power in single - and polyphase circuits*, European Transactions on Electrical Power, Vol.6, No.5, Sep.-Oct. 1996, 315-320

[E4] Enns, M.K. – *Neutral impedances in fault analysis*; IEEE Transactions on Power Systems, Vol.13, no.2, May 1998, pp.274-279

[F1] Fabre, A., Saaid, O., Wiest, F., Boucheron, C.- *Current controlled bandpass filter based on translinear conveyors*; Electronics Letters, Vol.31, No.20, September 1995, pp.1727-1728

[F2] Faiz, J., Sharifian, M.B.B. - *Transient behaviour of optimum - designed three-phased squirrel-cage induction motors*; European Transactions on Electrical Power, Vol.7, No.6, Nov.-Dec. 1997, pp. 415-420

[F3] Farag, S.F., Bartheld, R.G., May, W.E. - *Electronically Enhanced Low Voltage Motor Protection and Control*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.30, No.3, May/June 1994, pp.776-784

[F4] Fiser, R., Ferkolj, S. – *Magnetic field analysis of induction motor with rotor faults*; COMPEL The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol.17, no.1-2, 1998, pp.206-211

[F5] Fransua, A., Nicolaide, A., Trifu, G. - *Maşini electrice uzuale. Exploatare şi regimuri de funcţionare*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1973

[F6] Fransua, A., Măgureanu, R. - *Maşini şi acţionări electrice. Elemente de execuţie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986

[G1] Gafford, B.N., Duesterhoeft, W.C., Mosher, C.C. - *Heating of Induction Motors on Unbalanced Voltages*, AIEE Transactions Power Applications Systems, June 1959, pp. 282-288

[G2] Galan, N. - *Consideraţii privind teoria moderna a maşinii asincrone trifazate*; Electrotehnica, Electronica, Automatica, Electronica, Vol.38, Nr.8, noiembrie 1990, pag.295-299

[G3] Galan, N. - *Ecuaţiile generale ale motorului asincron trifazat aplicate în regimuri nesimetrice*; Electrotehnica, Electronica, Automatica, Electrotehnica, Vol.38, Nr.8, noiembrie 1990, pag.300-305

[G4] Ghani, S.N. - *Digital Computer Simulation of Three-Phase Induction Machine Dynamics - A Generalized Approach*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.24, No.1, January/February 1988, pp.106-114

[G5] Gheorghiu, I.S., Fransua, A.S. - *Tratat de maşini electrice, Vol.III, Maşini asincrone*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1971

[G6] Glazenko, A.V., Danilevich, Y.B., Karymov, A.A. - *Digital modelling of thermal and mechanical processes in electrical machines*; Electrical Technology, Selected Translations from Elecktrichestvo, No.4, 1995, pp.123-134

[G7] Gluskin, E. - *On the Calculation of Ripple Factor*; ETEP, Vol.5, No.6, November/December 1995, pp.413-414

[G8] Goode, P.V., Chow, M. - *Using a Neuronal Fuzzy System to Extract Heuristic Knowledge of Incipient Faults in Induction Motors: Part I - Methodology*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.42, No.2, April 1995, pp.131-138

[G9] Goode, P.V., Chow, M. - *Using a Neuronal / Fuzzy System to Extract Heuristic Knowledge of Incipient Faults in Induction Motors: Part II - Application*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.42, No.2, April 1995, pp.139-146

[G10] Green, T.C., Taha, M.H., Rahim, A.B.D., Williams, B.W. - *Three-phase step-down reversible AC-DC power converter*; IEEE Transactions on Power Electronics, Vol.12, No.2, March 1997, pp.319-324

[G11] Grimes, C.A., Grimes, D.M. - *Complex power in circuits with multiple reactive elements*, Electric Machines and Power Systems, Vol.25, No.9, Nov. 1997, pp.955-966

[G12] Grotzbach, M., Xu, J. - *Line-Side Behaviour of 3-Phase Diode Rectifiers with Reactance Smooting*; European Transactions on Electrical Power Engineering, Vol.4, No.1, Jan-Feb. 1994

[H1] Holtz, J. - *The representation of AC machine dynamics by complex signal flow graphs; IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 42, No. 3, June 1995, pp. 263 - 272

[H2] Ho, S.L., Fu, W.N. - *Review and future application of finite element methods in induction motors; Electric Machines and Power Systems*, Vol. 26, No. 2, February - March 1998, pp.111 - 126

[I1] Ionescu, T.G., Coculescu, S., Neagoe, M., Pavel, E. - *Regimul nesimetric generator de consumuri proprii tehnologice suplimentare în rețelele electrice*; Energetica, Vol.XXXVI, Nr.9, septembrie 1988, pag.404 - 411

[I2] Ionescu, T.G., Golovanov, C., Manolescu, P., Oprea, R. - *Metode de determinare a coeficientului de nesimetrie inversă de tensiune*; Energetica, Vol. XXXVIII, Nr. 8 - 9, august - septembrie 1990, pag. 371 - 376

[I3] Ion, I.D., Niță, C., Năstăsescu, C. - *Complemente de algebră*, Editura Științifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1984

[J1] Joaquim, M. B. – *A bandpass active filter for Fourier analysis laboratory*; International Journal of Electrical Engineering Education, Vol. 32, No.4, October 1995, pp. 350 – 354

[K1] Karacal, S.C. – *A novel approach to simulation modeling*, Computers & Industrial Engineering, Vol.34, no.3, July 1998, pp.573-588

[K2] Kaufmann, A., Précigout, M. - *Elemente de teoria mulțimilor şi algebră modernă*, Vol I, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[K3] Kaufmann, A., Précigout, M. - *Elemente de teoria mulțimilor şi algebră modernă*, Vol II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1973

[K4] Keerthipala, W. W. L., Wai, C. T., Huisheng, W. - *Neuronal network based classifier for power system protection*; Electric Power Systems, Vol. 42, No. 2, august 1997, pp. 109 – 114

[K5] Kellerer, H., Kotov, V., Speranza, M.C., Tuza, Z. – *Semi on-line algorithms for the partition problem*, Operations Research Letters, Vol.21, no.5, December 1997, pp.235-242

[K6] Kluszczynski, K., Miksiewicz, R. - *Synchronous parasitic torques in asymmetrically fed three - phase squirrel cage motor*; Electric Machines and Power Systems, Vol. 24, No. 1, January - February 1996, pp. 9- 20

[K7] Knopp, M., Kohle, S. - *Time - varying loads in electric power systems; Power input, equivalent circuit elements, and disturbances*, European Transations on Electrical Power, Vol. 7, No.1, January - February 1997, pp. 5 - 12

[K8] Knuth, D.E. - *Tratat de programarea calculatoarelor, vol I - Algoritmi fundamentali*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974

[K9] Knuth, D.E. - *Tratat de programarea calculatoarelor, vol II - Sortare şi căutare*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1976

[K10] Knuth, D.E. - *Tratat de programarea calculatoarelor, vol III - Algoritmi seminumerici,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1983

[L1] Labuntsov, V. A., Daizhun, C. - *Three - phase rectifier with a capacitance filter and an improved waveform for the current drawn from the network*; Electrichestvo, No. 2, 1993

[L2] Lawrance, W. B. , Mielczarski, W. - *Harmonic Current Reduction in a Three - Phase Diode Bridge Rectifier*; IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 39, No. 6, December 1992, pp. 571 - 576

[L3] Lawrance, W. , Mielczarski, W., Michalik, G. - *Application of a new scheme for harmonic current reduction in three - phase bridge rectifier systems*; Electric Power Research, Vol. 36, No. 2, February 1996, pp. 123 – 130

[L4] Lee, C.Y. – *Temperature-based optimal test sequence for determining the equivalent circuit parameters of a three-phase induction motor*, Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol.21, no.4, July 1998, pp.459-466

[L5] Levi, E., Krzeminski, Z. - *Main Flux - Saturation Modelling in d-q Axis Models of Induction Machines Using Mixed Current - Flux State - Space Models*; ETEP, Vol. 6, No. 3, May - June 1996, pp.207 – 215

[L6] Lian, J.A. – *Orthogonality criteria for multiscaling functions,* Applied and Computational Harmonic Analysis, Vol.5, no.3, July 1998, pp.277-311

[L7] Lim, T.J. – *A stochastic regime switching model for the failure process of a repairable system*, Reliability Engineering & System Safety, Vol.59, no.2, February 1998, pp.225-238

[L8] Lin, B.R., Hoft, R.G. - *Analysis of power converter control using neural network and rule - based methods*; Electric Machines and Power Systems, Vol. 24, No. 7, October - November 1996, pp. 695 – 720

[L9] Lin, K.P., Lin, M.H., Lin, T.P. – *An advanced computer code for single-tuned harmonic filter design*, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.34, no.4, July-August 1998, pp.640-648

[L10] Loggini, M., Montanari, G. C., Cavalllini, A. - *Generation of Uncharacteristic Harmonics in Electrical Plants with AC/DC Converters*; European Transactions on Electrical Power Engineering, Vol.4, No. 3, May - June 1994

[M1] Maier, R. - *Protection of Squirrel-Cage Induction Motor Utilizing Instantaneous Power and Phase Information*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.28, No.2, March/April 1992, pp.376-380

[M2] Man, E., Rizzo, R., Micu, D., Munteanu, D. - *A Simultaneous Treatment of Symmetrization and Power Factor Improvement in Three-Phased Networks*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 36, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1995, pag. 50- 52.

[M3] Man, E., Pop, E. - *Impedance Adaptation and Negative Resistance Synthesis, using Controlled Sources*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 37, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1996, pag. 21 - 24

[M4] Man, E. - *Circuite electrice cu surse comandate*, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, 1996

[M5] Man, E. - *A Generalization of the Maximum Power Transfer Theorem In DC Circuits*; Proceedings of the 1st International Workshop CAD in Electromagnetism and Electrical Circuits CADEMEC 97, CLuj-Napoca, 5-7 August 1997, Volume, pp.91-93

[M6] Man, E., Hintea, S. - *Analiza circuitelor electrice prin modelare cu surse comandate*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 1997

[M7] Mattavelli, P., Tenti, P. - *Load and line identification in multi-phase systems: A compensation-oriented approach*; European Transaction on Electrical Power, Vol.6, No.6, November-December 1996, pp.373-379

[M8] Mbamalu, G.A.N., El Hawary, M.E., El Hawary, F. - *Pseudo inverse based probabilistic power flow approach*; Electric Machines and Power Systems, Vol.23, No.2, March-April 1995, pp.107-119

[M9] Micu, D., Oniga, A. - *Componente simetrice pentru sisteme polifazate*; Conferința Națională de Matematică Aplicată şi Mecanică, Cluj-Napoca, 20-23 octombrie 1988

[M10] Micu, D. - *Basis of Electrotechnics. The theory of electric circuits*, Technical University of Cluj-Napoca, 1993.

[M11] Micu, D., Rizzo, R., Man, E. - *A Study on Polyphase Machine Fed by Non Symmetrical Voltage System*, Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 36, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1995, pag. 53 - 57

[M12] Micu, D., Rizzo, R., Man, E. - *Polyphase Machine Fed by Non Symmetrical System. Fault Detection in Case of Bar Breakage in Three-Phase Motors*, Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 36, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1995, pag. 58 - 61

[M13] Micu, D., Micu, A., Vlad, S. - *A Dissipative Singlephase-Threephase Convertor*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol. 37, Nr. 1, Cluj-Napoca, 1996, pag. 57 - 60

[M14] Mielczarski, W., Lawrance, W.B., Nowaki, R., Holmes, D.G. - *Harmonic Current Reduction in Three-Phase Bridge-Rectifier Circuits Using Controlled Current Injection*; IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.44, No.5, October 1997, pp.604-611

[M15] Mihalache, M. – *Determinarea parametrilor interni ai motorului asincron utilizând datele de catalog: Electrotehnica, Electronica, Automatica, Electrotehnica,* vol. 34, nr. 6, august 1986, pag. 261-264.

[M16] Milenko, D. B. - *Determining symmetric components by a method of four samples (power system analysis),* Electrichestvo, No. 9, September 1992, pp. 50-51

[M17] Mocanu, C.I. - *Teoria circuitelor electrice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979

[M18] Modran, L., **Popa, V.M.**, Crăciunaş, G., Spătar, O. – *Electrotehnică şi electronică*, Editura Meteor, Sibiu, 1998

[M19] Moshchinskii, Y. A., Osin, I. L. - *Determination of three-phase induction motor parameters from an asymmetric supply test*, Electrichestvo, Nr. 1, 1993

[N1] Nakagawa, S., Niki, N., Hashiguchi, H. – *Computer algebra application to the distribution of sample correlation coefficient*, Mathematics and Computers in Simulation, Vol.45, no.1-2, January 1998, pp.23-32

[N2] Năstăsescu, C., Niță, C., Vraciu, C. - *Bazele algebrei*, Vol.I, Editura Academiei, Bucureşti, 1986

[N3] Neamțu, V. - *Circuite electrice în regim permanent sinusoidal şi nesinusoidal - culegere de probleme*, Editura Universității Tehnice Cluj-Napoca, 1996

[N4] Nedelcu, V.N. - *Regimurile de funcționare ale maşinilor de curent alternativ*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1968

[N5] Nedelcu, V.N. - *Teoria conversiei electromecanice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978

[N6] Nilsson, W.J. - *Electric Circuits*, Fourth Edition, Addison Wesley Co., Jowa State University, 1993

[O1] Oberretl, K. - *Tooth breakage and tooth forces in asynchronous motors*; Electrical Engineering, Vol.80, No.5, October 1997, pp.309-324

[O2] Ostovic, V. - *Computer-aided Analysis of Electric Machines*, Prentice Hall, New York, 1994

[P1] Palco, S. - *Structural optimisation of an induction motor using a genetic algorithm and a finite element*; Acta Polytechnica Scandinavica, Electrical Engineering Series, No.84, 1996, pp.2-99

[P2] Pană, T. - *MATLAB în sisteme de acționare electrică*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 1996

[P3] Pană, T. - *MATLAB Application Toolbox, Electrical Drives - Induction Motor*, Mediamira Science Publisher, Cluj-Napoca, 1997

[P4] Pandurangavittal, K., Fakmddin, D.B., Rao, I. R. , Parthasarathy, K. - *Microcontroller based three-phase induction motor protection relay with operator selectable thermal I-T curve feature*; Electric Machines and Power Systems, Vol.26, No.1, January 1998, pp.13-26

[P5] Pavel, E., Ionescu, T.G. - *Efectele consumatorilor nesimetrici asupra rețelelor electrice*; Energetica, Vol.XXXIV, Nr.10, octombrie 1986, pag.457-459

[P6] Pavel, E. - *Receptoare trifazate dezechilibrate. Caracteristic şi particularități de funcționare în regimuri stabilizate*; Energetica, Vol.XXXVI, Nr.6, iunie 1988, pag.241-249

[P7] Pavel, E. - *Considerații privind receptoarele electrice trifazate dezechilibrate*, ENERG, Vol.VII, Editura Tehnică, Bucureşti, 1989, pag.194-220

[P8] Pavel, E. - *Noi aspecte ale teoriei receptoarelor trifazate statice dezechilibrate*; Energetica, Vol.37, Nr.11, noiembrie 1989, pag.481-492

[P9] Perahia, J., Nayar, C.V. - *Analysis of a series - delta connected tandem induction motor*; Electric Machines and Power Systems, Vol.23, No.2, March-April 1995, pp.221-230

[P10] Pillay, P., Sabur, S.M.A., Haq, M.M. - *A model for induction motor aggregation for power system studies*; Electric Power Systems, Vol.42, No.3, September 1997, pp.225-228

[P11] Pillay, P., Nolan, R., Haque, T. - *Application of genetic algorithms to motor parameter determination for transient torque calculations*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.33, No.5, September-October 1997, pp.1273-1282

[P12] Pinto, J.A.D., Coimbra, A.P., Antunes, C.L., Fernandez, X.M.L., Donsion, M.P. – *Influence of the neutral in the thermal performance of a three-phase induction motor under unbalanced power supply using the finite element approach*, COMPEL, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol.17, no.1-2, 1998, pp.378-382

[P13] **Popa, V.M.** - *Unele generalizări în combinatorică*; Buletinul Ştiinţific al Institutului de Învăţământ Superior Sibiu, Vol.III, Sibiu, 1980, pag.33-39

[P14] **Popa, V.M.**, Diaconescu, C. - *Noi cercetări privind protecţia motoarelor asincrone*; Buletinul Ştiinţific al Institutului de Învăţământ Superior Sibiu, Vol.IV, 1981, pag.244-247

[P15] **Popa, V.M.**, *Asupra numărării bijecţiilor între două mulţimi multiple*; Gazeta Matematică - Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, Vol.VII, Nr.2, Bucureşti, 1986, pag.78-81

[P16] **Popa, V.M.** - *Asupra unei probleme de algebră*; Astra Matematică, Vol.1, Nr.1, Sibiu, 1990, pag.29-31

[P17] **Popa, V.M.** - *On a question of linear programming*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.X (1), Sibiu, 1993, pag.65-67

[P18] **Popa, V.M.** - *Unele aspecte privind caracterizarea circuitelor trifazate dezechilibrate*; Referat de doctorat nr.1, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, octombrie 1993

[P19] **Popa, V.M.** - *Aplicaţii şi încercări experimentale privind comportarea circuitelor trifazate în regimuri nesimetrice*; Referat de doctorat nr.2, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, octombrie 1994

[P20] **Popa, V.M.** - *On a classification of the three-phase loads*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XIV (2), Sibiu, 1995, pag.87-90

[P21] **Popa, V.M.** - *A new approach to be characterized the unbalanced three-phase loads*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XIV (2), Sibiu, 1995, pag.91-93

[P22] **Popa, V.M.**, Buduruşi, C., Garcia Moreno, E. - *Some Aspects about the Analysis of a Three-Phase Non-Symmetrical Alimentated Bridge with Thyristors*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol.36, Nr.1, Cluj-Napoca, 1995, pag.42-44

[P23] **Popa, V.M.** - *A Mathematical Model for Polyphasic Loads Unbalanced Classes Analysis*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol.36, Nr.1, Cluj-Napoca, 1995, pag.91-92

[P24] **Popa, V.M.** - *On an Analysis for the Unbalanced Loads*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol.36, Nr.1, Cluj-Napoca, 1995, pag.93-94

[P25] **Popa, V.M.** - *Considerații privind comportarea circuitelor electrice în regimuri nesimetrice de funcționare*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XX, Sibiu, 1995, pag.129-134

[P26] **Popa, V.M.** - *Considerations Upon a Relay of Protecting Asynchronous Three-Phase Motors*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol.37, No.1, Cluj-Napoca, 1996, pag.61-62

[P27] **Popa, V.M.**, Roşca, P. - *Electrotehnică*, Editura Universității "Lucian Blaga", Sibiu, 1996

[P28] **Popa, V.M.** - *Electrotehnică - îndrumar de laborator,* Editura Universității "Lucian Blaga", Sibiu, 1996

[P29] **Popa, V.M.** – *Aspecte energetice privind alimentarea receptorilor dezechilibrați*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XXVIII, Sibiu, 1998

[P30] **Popa, V.M.** – *Caracterizarea algebrică a receptoarelor dezechilibrate discrete*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XXVIII, Sibiu, 1998

[P31] **Popa, V.M.** – *Metode pentru calculul numărului receptoarelor dezechilibrate discrete*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XXVIII, Sibiu, 1998

[P32] **Popa, V.M.** – *Metoda de recurență pentru calculul numărului claselor de dezechilibru ale receptoarelor m-fazate*; Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.XXVIII, Sibiu, 1998

[P33] Popescu, D., Vraciu, C. - *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986

[P34] Prisăcaru, A., Cojocaru-Filipiuc, C. - *On the nonsinusoidal and unsymmetrical behaviour of three-phase asynchronous motor*; Proceedings, First International Symposium on Advanced Electromechanical Motion Control Systems ELECTROMOTION'95, Cluj-Napoca, 25-26 May 1995, Volume, pp.116-119

[P34-a] Pyati, V.P. – *Comment on "On the geometry of parallel impedances",* IEEE Transactions on Education, Vol.41, no.2, May 1998, pp.171-176

[R1] Ramras, M. – *Congestion-free routings of linear complement permutations*, Siam Journal of Discrete Mathematics, Vol.11, no.3, 1998, pp.487-500

[R2] Rankin, D.R. - *The industrial application of phase current analysis to detect rotor winding faults in squirel cage induction motors*; Power Engineering Journal, Vol.9, No.2, April 1995, pp.77-89

[R3] Rashid, M.H., Maswood, A.I. - *Analysis of Three-Phase AC-DC Converters Under Unbalanced Supply Conditions*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.24, No.3, May/June 1988, pp.449-455

[R4] Rashid, M.H., Maswood, A.I. - *A Novel Method of Harmonic Assessment Generated by Three-Phase AC-DC Converters Under Unbalanced Supply Conditions*, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.24, No.4, July/August 1988, pp.590-597

[R5] Rastogi, M., Mohan, N., Henze, C.P. - *Three-phase sinusoidal current rectifier with zero-current switching*; IEEE Transactions on Power Electronics, Vol.10, No.6, November 1995, pp.753-760

[R6] Ravezzi, L., Stoppa, D., DallaBetta, G.F. – *Current-mode A/D converter*, Electronics Letters, Vol.34, no.7, April 1998, pp.615-616

[R7] Reljin, B., Ristic, S., Sreckovic, M. - *Analysis of some physical phenomena and processes by equivalent electrical circuits*, International Journal of Electrical Engineering Education, Vol.33, No.4, October 1996, pp.353-360

[R8] Richter, R. - *Maşini electrice, Vol.IV, Maşini asincrone*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1960

[R9] Riordan, J. - *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967

[R10] Riordan, J. - *Combinatorial Identities*, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1968

[R11] Roger Folch, J., Joares, V.J.Z. - *Contribution to the transient analysis of induction motors solving the electrodynamic equations by using the finite elements method*; COMPEL, The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol.14, No.4, December 1995, pp.93-97

[R12] Roşca, P., Diaconescu, C., Modran, L, **Popa, V.M.** - *An Improved Protection Method at the Electric Drive Systems with Asynchronous Motors*; A treia Conferință Națională de Acționări Electrice, Braşov, 28-30 mai 1982, volum, pag.A135-A138

[R13] Roşca, P., Diaconescu, C., **Popa, V.M.**, Modran, L. - *Calculul armonicii de 100Hz din tensiunea obținută prin redresarea unui sistem trifazat asimetric cu ajutorul unei punți trifazate*; Buletinul Ştiințific al Institutului de Învățământ Superior Sibiu, Vol.VI, 1982, pag.130-134

[R14] Roşca, P., **Popa, V.M.**, Diaconescu, C., Modran, L. - *Releu cu fiabilitate ridicată pentru protecția complexă a motoarelor asincrone trifazate*; Conferința Națională de Energetică, Bucureşti, 23-25 noiembrie 1983, volum secția 34, pag.34.091-34.096

[R15] Roşca, P., **Popa, V.M.**, Diaconescu, C., Modran, L. - *The Influence of Non-Symmetric States on the Functioning of the Electronic Relay RPMA-1 of Protecting Asynchronous Three-Phase Motors at the Interruption of one Phase*; A patra Conferință Națională de Acționări Electrice, Craiova, 20-21 septembrie 1984, volum, pag.C127-C130

[R16] Roşca, P., Diaconescu, C., **Popa, V.M.**, Modran, L. - *Releu pentru protecția motoarelor asincrone trifazate la întreruperea unei faze de alimentare*; Brevet de Invenție 87118 din 19.03.1985

[R17] Roşca, P., **Popa, V.M.**, Diaconescu, C., Modran, L. - *Frână cu curenți turbionari*; Buletinul Ştiințific al Institutului de Subingineri Sibiu, Vol.VII, 1985, pag.68-71

[R18] Roşca, P., **Popa, V.M.**, Diaconescu, C., Modran, L. - *Instalație pentru ridicarea caracteristicii mecanice a motoarelor electrice*; Buletinul Ştiințific al Institutului de Subingineri Sibiu, Vol.IX, 1986, pag.370-373

[R19] Roşca, P., Diaconescu, C., **Popa, V.M.** - *Proiectarea produsului "Dispozitiv de protecție antibifazică" în vederea asimilării în fabricație*, Contract de cercetare ştiințifică între Institutul de Subingineri Sibiu şi Intreprinderea de Relee Mediaş, 1989

[R20] Roşca, P., Modran, L., **Popa, V.M.**, Diaconescu, C. - *Cuplaj - frână electromagnetic*, Brevet de invenție 108833 din 30.08.1996

[R21] Rosolowski, E., Izykowski, J., Kasztenny, B., Saha, M.M. - *A new distance relaying algorithm based on complex differential equation for symmetrical components*; Electric Power Systems Research, Vol.40, No.3, March 1997, pp.175-180

[R22] Rukgauer, A., Schiehlen, W. – *Simulation of modular dynamic systems*, Mathematics and Computers in Simulation, Vol.46, no.5-6, June 1998, pp.535-542

[S1] Saari, J. - *Thermal modelling of high-speed induction machines*; Acta Polytechnica Scandinavica, Electrical Engineering Series, No.82, 1995, pp.1-82

[S2] Şafarevici, I.R. - *Noțiunile fundamentale ale algebrei*, Editura Academiei, Bucureşti, 1989

[S3] Sakui, M., Fujita, H, Shioya, M. - *A Method for Calculating Harmonic Currents of a Three-Phase Bridge Uncontrolled Rectifier with DC Filter*; IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.36, No.3, August 1989, pp.434-440

[S4] Sakui, M., Fujita, H. - *Calculation of Uncharacteristic Harmonics of a Three-Phase Bridge Rectifier with DC Current Ripple*; Electrical Engineering in Japan, Vol.111, No.5, 1991, pp.127-129

[S5] Sakui, M., Fujita, H. - *Harmonic Analysis of a Capacitor-Filtered Three-Phase Diode-Bridge Rectifier with Complex Source Impedance*; IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol.39, No.1, February 1992, pp.80-81

[S6] Sakui, M., Fujita, H. - *Calculation of harmonic currents in a three-phase convertor with unbalanced power supply conditions*; IEE Proceedings-B, Vol.139, No.5, September 1992, pp.478-484

[S7] Sakui, M., Fujita, H. - *An Analytical Method for Calculating Harmonic Currents of a Three-Phase Diode-Bridge Rectifier with DC Filter*; IEEE Transactions on Power Electronics, Vol.9, No.6, November 1994, pp.631-637

[S8] Sakui, M, Minamijima, M., Amei, K., Fujita, H. - *Analytical Method for Calculating Harmonic Currents of an AC/DC Converter with AC Filters*; ETEP, Vol.6, No.2, March/April 1996, pp.97-101

[S9] Salmon, J.C. - *Operating a three-phase diode rectifier with a low-input current distortion using a series-connected dual boost converter*; IEEE Transactions on Power Electronic, Vol.11, No.4, July 1996, pp.592-604

[S10] Sarkar, D. – *Approximate analysis of temperature rise in a induction motor during dynamic braking*, Electric Machines and Power Systems, Vol.26, no.6, July 1998, pp.585-600

[S11] Sasdelli, R., Menchetti, A. - *Some remarks on power theories*; European Transactions on Electrical Power Engineering, Vol.4, No.6, November-December 1994, pp.457-463

[S12] Schoen, R.R., Habetler, T.G. - *A new method of current-based condition monitoring in induction machines operating under arbitrary load conditions*; Electric Machines and Power Systems, Vol.25, No.2, February-March 1997, pp.141-152

[S13] Shi, K.L., Chan, T.F., Wong, Y.K. - *Modelling of the three-phase induction motor using SIMULINK*; 1997 IEEE International Electric Machines and Drives Conference Record, May 18-21, 1997, pp.WB3, 6.1-6.3

[S14] Shi, S.W. - *Study of fault analysis using two vector system symmetrical components*; Electric Machines and Power Systems, Vol.26, No.2, February-March 1998, pp.155-170

[S15] Simion, E., Mîndru, G., Gligor, T., Nicula, O. – *Bazele electrotehnicii*, Institutul Politehnic, Cluj, 1972

[S16] Simion, E. – *Electrotehnica*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucueşti, 1978

[S17] Simion, E., Maghiar, T. - *Electrotehnica*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

[S18] Simion, E., Man, E., Munteanu, C. – *The Symmetrization of the Line Current's Three-Phased System Using the Symmetric Components Method*; Annual Scientific Workshop, Oradea, 29-30 May, 1992

[S19] Simion, E., Ursu, M.F., Man, E. - *The Systematization of the Three-Phase Electric Circuit in Sinusoidal Steady State - The Tripole*, Proceedings of 4th International Conference on Optimization of Electric and Electronic Equipments OPTIM'94, Braşov, 12-14 May 1994, pp.79-83

[S20] Simion, E., Ţopa, M. - *On Symbolic Analysis for Analog Filter Design*, Proceedings of the 4th International Conference on Optimization of Electric and Electronic Equipments OPTIM'94, Braşov, 12-14 May 1994, pp.181-185

[S21] Simion, E., Man, E., Munteanu, C. - *Contributions to the symmetrization of line current three-phase system*, Proceedings of the 4th International Conference on Optimization of Electric and Electronic Equipments, OPTIM'94, Braşov, 12-14 May 1994, pp.287-291

[S22] Simion, E., Man, E., Ciupa, R.V., Roşca, P., Neamţu, V., **Popa, V.M.** - *Teoria circuitelor electrice*, Editura Universităţii Tehnice Cluj-Napoca, 1996

[S23] Simion, E., Munteanu, C., Topa, V. – *The Numerical Analysis of the Electromagnetic Interference Phenomena in Printed Circuit Boards Using the Transmission Line Model*; Acta Electrotehnica Napocensis, Vol.37, Nr.1, Cluj-Napoca, 1996, pag.35-38

[S24] Slemon, G.R. - *Modelling of Induction Machines for Electric Drives*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.25, No.6, November/December 1989, pp.1126-1131

[S25] Smith, O.D. – *Generation of ground structures for 2D and 3D design domains*, Engineering Computations, Vol.15, no.4, 1998, pp.462-500

[S26] Smolleck, H.A. - *A new look at the effects of unbalanced voltages upon synchronous and induction machines*; Electric Power Systems Research, Vol.25, 1992, pp.199-206

[S27] Soliman, S.A, Al Kandari, A.M., El Hawary, M.E. - *Time domain estimation techniques for harmonic load models; Electric Machines and Power Systems*, Vol.25, No.8, October 1997, pp.885-896

[S28] Sonea, P., Fransua, A., Nicolaide, A., Saal, C. - *Electrotehnică, maşini şi instalații electrice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966

[S29] Şora, C. - *Bazele electrotehnicii*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982

[S30] Sowaied, A., Taleb, M. - *Assessment of power converter harmonics*; Electric Machines and Power Systems, Vol.24, No.2, March 1996, pp.147-158

[S31] Speranza, F. - *Relații şi structuri*, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1975

[S32] Stănăşilă, O. - *Noțiuni şi tehnici de matematică discretă*, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985

[S33] Stringer, N.T., Waser, D. - *An innovative method of providing total breaker failure protection*; IEEE Transactions on Industry Applications, Vol.32, No.5, September-October 1996, pp.1011-1017

[S34] Şurianu, F.D. - *Experiment şi simulare numerică a comportării motoarelor asincrone la golurile de tensiune simetrice*; Energetica, Vol.42, Nr.5-B, 1994, pag.223-226

[T1] Terzija, V., Djuric, M. - *A numerical algorithm for direct real-time estimation of voltage phasor, frequency and its rate of change*; Electric Machines and Power Systems, Vol.24, No.4, June 1996, pp.417-428

[T2] Timotin, A., Hortopan, V., Ifrim, A., Preda, M. - *Lecții de bazele electrotehnicii*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970

[T3] Țogui, L., Covrig, M., Manoliu, V. - *Determinarea cuplului electromagnetic al masinii asincrone trifazate cu înfăşurări nesimetrice*; Electrotehnica, Electronica, Automatica, Electrotehnica, Vol.44, Nr.5-6, mai-iunie 1996, pag.19-21

[T4] Țogui, L., Covrig, M., David, F. - *Modelul matematic al masinii asincrone trifazate cu înfăşurare nesimetrică pe stator; Electrotehnica*, Electronica, Automatica, Electrotehnica, Vol.43, Nr.7-8, iulie-august 1995, pag.21-25

[T5] Tomescu, I. - *Introducere în combinatorică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972

[T6] Tomescu, I. - *Introduction to Combinatorics*, Collet's (Publishers) Limited, London and Wellingborough, 1975

[T7] Tomescu, I. - *Combinatorică şi teoria grafurilor*, Editura Universității din Bucureşti, 1978

[T8] Tomescu, I. - *Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

[T9] Tou, M., Al Haddad, K., Olivier, G., Rajagopalan, V. - *Analysis and design of single-controlled switch three-phase rectifier with unity power factor and sinusoidal input current*; IEEE Transactions on Power Electronics, Vol.12, No.4, July 1997, pp.608-614

[T10] Țugulea, A. - *Considerații privind efectele energetice în regimuri armonice nesimetrice ale sistemelor trifazate*; Energetica, Vol.XXXIV, Nr.3, martie 1986, pag.121-129

[T11] Țugulea, A. - *Considerații referitoare la definirea factorului de putere pentru sistemele trifazate dezechilibrate*; Energetica, Vol.XXXIV, Nr.4, aprilie 1986, pag.164-167

[T12] Țugulea, A., Golovanov, C. - *Efectele energetice ale regimurilor nesimetrice şi deformante ale sistemelor electroenergetice. Posibilități de măsurare*; ENERG, Vol.III, Editura Tehnică, Bucureşti, 1987, pag.130-162

[V1] Vaananen, J. - *Combination of two-dimensional finite element analysis of electical machines with circuit simulation techniques*; Acta Polytechnica Scandinavica, Electrical Engineering Series, No.80, 1995, pp.1-104

[V2] Văzdăuțeanu, O. - *Cu privire la compensarea nesimetriei într-un sistem trifazat de tensiuni*; Buletinul Ştiințific şi Tehnic al Universității Tehnice din Timişoara, tomul 37 (51), fascicola 1-2, ianuarie-decembrie 1992, pag.73-76

[W1] Waikar, D.L., Elangovan, S., Liew, A.C. - *Further enhancements in the symmetrical components based improved fault impedance estimation method. 1. Mathematical modelling*; Electric Power Systems Research, Vol.40, No.3, March 1997, pp.189-194

[W2] Waikar, D.L., Liew, A.C., Elangovan, S. - *Further enhancements in the symmetrical components based improved fault impedance estimation method. 2. Performance evaluation*; Electric Power Sustems Research, Vol.40, No.3, March 1997, pp.195-202

[W3] Wang, Y.J., Pierrat, L., Feuillet, R. - *An Analytical Method for Predicting Current Harmonics Produced by an AC/DC Converter under Unbalanced Supply Voltage*; ETEP, Vol.2, No.4, July/August 1992, pp.237-244

[W4] Wang; Y.J., Pierrat, L. - *Probabilistic modelling of current harmonics produced by an AC/DC converter under voltage unbalance*; IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.8, No.4, October 1993, pp.2060-2066

[W5] White, D.J. – *Epsilon dominance and constraint partitioning in multiple objective problems*, Journal of Global Optimization, Vol.12, no.4, June 1998, pp.435-445

[W6] Willems, J.L. - *The compensation of non-active currents for three-phase power systems in sinusoidal steady state*; Electrical Machines and Power Systems, Vol.21, No.6, November-December 1993

[W7] Willems, J.L. - *Mathematical foundations of the instantaneous power concepts: A geometrical approach*; European Transactions on Electrical Power, Vol.6, No.5, September-October 1996, pp.299-304

[W8] Williams, J.E. - *Operation of 3-Phase Induction Motors on Unbalanced Voltages*; AIEE Transactions Power Applications Systems, Vol.PAS-73, April 1954, pp.125-133

[W9] Witherspoon, S.A., Choma, J. - *The analysis of balanced, linear differential circuits*; IEEE Transactions on Education, Vol.38, No.1, February 1995, pp.40-51

[W10] Woll, R.F. - *Effect of Unbalanced Voltage on the Operation of Polyphase Induction Motors; IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol.IA-11, No.1, January/February 1975, pp.38-42

[W11] Wroblewski, Z. – *Digital simulation of reliability of contacts used in AC electromagnetic contactors, European Transactions on Electric Power*, Vol.8, no.3, May-June 1998, pp.201-206

[X1] Xia, R.W., Chen, S.J. – *A quasi-analytic method for structural optimization*, Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol.14, no.6, June 1998, pp.569-580

[X2] Xypteras, J., Maras, K., Spyrelis, D. - *Calculation of the temperature distribution in an asynchronous machine*; European Transaction on Electrical Power Engineering, Vol.5, No.3, May-June 1995, pp.181-187

[Y1] Yacamini, R. - *Power system harmonics. 4. Inter-harmonics*; Power Engineering Journal, Vol.10, No.4, August 1996, pp.185-196

[Y2] Yu, D.C., Chen, D., Ramasamy, S., Flinn, D.G. - *A Windows based graphical package for symmetrical components analysis*; IEEE Transactions on Power Systems, Vol.10, No.4, November 1995, pp.1742-1749

[Z1] Zaninelli, D., Zanotti, P. - *Simplified frequency dependent model for induction machines*; Electric Machines and Power Systems, Vol.22, No.6, November-December 1994, pp.727-742

[Z2] Zuckerberger, A., Alexandrovitz, A. - *Modelling and Simulation of Unsymmetrical Supplied Three-Phase Induction Motor*; ETEP, Vol.6, No.3, May/June 1996, pp.189-194

BIBLIOGRAFIE SUPLIMENTARĂ

[B14] Boldea, I. – *Transformatoare şi maşini electrice*, Editura Politehnica, 2001

[B15] Buta, A., Milea, L., Pană, A. – *Impedanța armonică a rețelelor electrice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 2000

[B16] Buta, A., Pană, A., Milea, L. – *Calitatea energiei electrice*, Editura AGIR, Bucureşti, 2001

[D14] Delapeta, M., Deaconu S., Iagăr, A. – *Echipamente electrice*, vol. I şi vol. II, Centrul de Multiplicare al U.P.T., 2000

[F7] Felea, I., Coroi, N. – *Fiabilitatea şi mentenanța echipamentelor electrice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 2001

[F8] Felea, I., Dale, E. – *Efecte ale regimului deformant şi nesimetric*, Editura Universității din Oradea, 2002

[F9] Felea, I., Rancov, N., Haş, V. – *Testing procedure in distortional operation condition of asynchronous machine*, Conferința de Inginerie Energetică CIE 2008, Oradea

[H3] Hortopan, G. – *Aparate electrice de comutație*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1993

[I4] Iordănescu, I., Golovanov, N., Postolache, P., Toader, C., Porumb, R., Lipan, L., Popescu, S. – *Instalații electrice şi elemente de audit electroenergetic*, Editura TIPOGAL 2008

[M20] Milici, Mariana – Circuite electrice – *Regimuri sinusoidale şi particulare de funcționare*, Editura MatrixRom, Bucureşti, 2005

[P35] Popa, V.M. – *Contribuții la analiza sistemelor trifazate nesimetrice, cu aplicații*, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, Facultatea de Electrotehnică, Cluj-Napoca, 1999

[P36] Popa, V.M. - *A Synthesis Regarding the Study of a Real Unbalanced Load,* Sesiunea de Comunicări Ştiințifice cu participare internațională, Hunedoara, 19-20 octombrie 2000; Universitatea „Politehnica" din Timişoara, Analele Facultății de Inginerie din Hunedoara, Tomul II, Fascicola 2, ISSN 1454-6531, pag.9-12

[P37] Popa, V.M. - *The Study of the Real Unbalanced Load for Extreme Functioning Situations,* Sesiunea de Comunicări Ştiințifice cu participare internațională, Hunedoara, 19-20 octombrie 2000; Universitatea „Politehnica" din Timişoara, Analele Facultății de Inginerie din Hunedoara, Tomul II, Fascicola 2, ISSN 1454-6531, pag. 13-16

[P38] Popa, V.M. - *Considerații privind alimentarea receptorilor dezechilibrați,* Sesiunea de comunicări ştiințifice a Universității "Petru Maior", Târgu Mureş, 27-28 octombrie 2000, Volumul 7, Electroenergentică, ISBN 973-8084-19-9, pag. 191-196

[P39] Popa, V.M., Popescu, Lizeta - *Măsurători expermentale privind puntea de diode alimentată nesimetric,* A treia Conferință Internațională de Sisteme Electromecanice şi Energetice SIELMEN - 2001, Republica Moldova, Chişinău, 4-6 octombrie 2001, volumul III, ISBN 9975-9638-8-9, pag. 165-166

[P40] Popa, V.M., Popescu, Lizeta - *Studiul punții de diode alimentată cu sisteme particulare nesimetrice de tensiuni,* A treia Conferință Internațională de Sisteme Electromecanice şi Energetice SIELMEN - 2001, Republica Moldova, Chişinău, 4-6 octombrie 2001, volumul III, ISBN 9975-9638-8-9, pag. 173-176

[P41] Popa, V.M. - *The Complex Analysis of the Real Unbalanced Load,* www.roger-univ.ro, Publicații; Analele Universitații Româno-Germane din Sibiu; Secțiunea Tehnică, Sibiu, 2002

[P42] Popa, V.M. - *Studiul energetic al receptorului dezechilibrat real,* Lucrările celei de A Doua Conferințe Naționale „Profesorul Dorin Pavel-fondatorul hidroenergeticii româneşti", Sebeş, 31 mai; 1-2 iunie 2002, Volumul Ştiință şi Inginerie (Vol. I), ISBN 973-8130-82-4; ISBN 973-8130-83-2, pag. 69-74

[P43] Popa, V.M. - *Analiza cazurilor limită ale receptorului dezechilibrat real,* Sesiunea Jubiliară de Comunicări Ştiințifice cu Participare Internațională prilejuită de împlinirea a 30 de ani de învațământ superior de stat în Arad,Arad,28-29 noiembrie 2002,Analele Universității „Aurel Vlaicu" din Arad, Volum, Seria Electrică, ISSN 1582-3377, pag. 126-131

[P44] Popa, V.M. - *Studiul punții de diode alimentată nesimetric,* Lucrările celei de A Treia Conferințe Naționale – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii româneşti”, Sebeş, 30-31 mai; 1 iunie 2003, Volumul „Ştiință şi Inginerie” (vol. III), ISBN 973-8130-82-4; ISBN 973-8466-03-2, pag. 105-108

[P45] Popa, V.M. - *Studiul receptorului trifazat cu coeficienți de dezechilibru reali,* A treia sesiune anuală de comunicări ştiințifice a cadrelor didactice, Universitatea Româno-Germană Sibiu, 30 aprilie 2004, Volum 2; ISBN 973-7998-11-1, pag. 101-111

[P46] Popa, V.M. - *Analiza receptorului dezechilibrat real cu coeficienți de dezechilibru reali,* Lucrările celei de A Patra Conferințe Naționale – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii româneşti”, Sebeş, 21-23 mai 2004; Volumul „Ştiință şi Inginerie” (vol. V), ISBN 973-8130-82-4; ISBN 973-8466-67-9, pag. 151-156

[P47] Popa, V.M. - *Factor global de nesimetrie pentru sisteme trifazate,* Seminarul Ştiințific Național “Electrotehnologii şi Mediul ambiant”,Sibiu,5-6 noiembrie 2004, Revista „Energetica”, nr. 12/2004, ISSN 1453-2360, pag. 544-549

[P48] Popa, V.M. - *Studiul analitic al punții trifazate de diode alimentate nesimetric,* A VI-a Sesiune de comunicări ştiințifice, Universitatea Româno-Germană Sibiu, 4 noiembrie 2005, Extras, ISBN 973-7998-23-5, pag. 199-204

[P49] Popa, V.M. - *Asupra nesimetriei unui sistem trifazat,* Lucrările celei de A V-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii româneşti”, Sebeş, 3-4 iunie 2005; Volumul „Ştiință şi Inginerie” (vol. 7), ISBN 973-720-015-2; ISBN 973-8130-84-0, pag. 241-246

[P50] Popa, V.M. - *The Energetical Study of the Unbalanced Three-Phased Load*, Conferința Națională cu participare internațională „Electrotehnica aplicată în eco-reconstrucția industrială”, Sibiu, 23-24 septembrie 2005; Volum, ISBN 973-739-138-1, pag. 144-151

[P51] Popa, V.M. - *Analiza punții de diode alimentată cu sisteme de tensiuni nesimetrice*, Lucrările celei de A VI-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii româneşti”, Sebeş, 2-3 iunie 2006; Volumul „Ştiință şi Inginerie” (vol. 9), ISBN 10 973-8130-82-4, pag. 309-314

[P52] Popa, V.M. - *Aspecte experimentale şi sintetice privind puntea trifazată de diode alimentată nesimetric,* A VII-a Sesiune de comunicări ştiințifice, Universitatea Româno-Germană Sibiu, 19 aprilie 2007, Extras, ISBN 978-973-7998-32-3 şi CD al sesiunii, pag. 263-269

[P53] Popa, V.M. - *Rezultate experimentale şi comparative privind puntea de diode în regim de alimentare nesimetric,* Lucrările celei de A VII-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii româneşti”, Sebeş, 1-2 iunie 2007; Volumul „Ştiinţă şi Inginerie” (vol. 11), ISBN 973-8130-82-4, pag. 191-196

[P54] Popa, V.M. - *Studiul energetic al receptorului extrem dezechilibrat generalizat,* Lucrările celei de A IX-a Conferinţe Naţionale multidisciplinare – cu participare internaţională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii româneşti”, Sebeş, 5-6 iunie 2009; Volumul „Ştiinţă şi Inginerie” (vol. 15), ISBN 973-8130-82-4, pag. 363-368

[P55] Popa, V.M. – *Aspecte de combinatorică cu aplicaţii în electrotehnică*, Editura Universităţii „Lucian Blaga” din Sibiu, Sibiu, 2009

[P56] Popa, V.M. - *Studiul energetic al receptorului echilibrat real,* Lucrările celei de A X-a Conferinţe Naţionale multidisciplinare – cu participare internaţională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii româneşti”, Sebeş, 4-5 iunie 2010; Volumul „Ştiinţă şi Inginerie” (vol. 17), ISSN 2067-7138, pag.357-362

[P57] Popa, V.M. – *Receptoare generalizate în electrotehnică*, Editura Universităţii “Lucian Blaga” din Sibiu, Sibiu, 2010

[P58] Popa, V.M. - *On Generalized Loads in Electrotechnics,* A X-a Sesiune de comunicări ştiinţifice cu participare internaţională, Universitatea Româno-Germană Sibiu, 19-29 noiembrie 2010, Extras, ISBN 978-973-7998-61-3 şi CD al sesiunii, pag. 12-15

[P59] Popa, V.M. - *Generalized Impedances and Unbalanced Loads,* Acta Universitatis Cibiniensis, Vol.LXI, Technical series, ISSN 1583-7149, pag. 47-50, Sibiu, 2010

[P60] Popa, V.M. – *Aspecte privind receptoarele generalizate în electrotehnică,* Lucrările celei de A XI-a Conferinţe Naţionale multidisciplinare – cu participare internaţională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii româneşti”, Sebeş, 3-4 iunie 2011; Volumul „Ştiinţă şi Inginerie” (vol. 19), ISSN 2067-7138, pag.345-352

[P61] Popa, V.M. – *Sisteme nesimetrice în electrotehnică*, Editura Universităţii “Lucian Blaga” din Sibiu, Sibiu, 2011

[P62] Popa, V.M. –*Metodă analitică pentru studiul punţii de diode având o sarcină complexă,* Lucrările celei de A XII-a Conferinţe Naţionale multidisciplinare – cu participare internaţională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii româneşti”, Sebeş, 1-2 iunie 2012; Volumul „Ştiinţă şi Inginerie” (vol. 21), ISSN 2067-7138, pag.289-298

[P63] Popa, V.M. – *Regimuri nesimetrice în electrotehnică*, Editura Universităţii “Lucian Blaga” din Sibiu, Sibiu, 2012

[P64] Popa, V.M. – *Circuite trifazate dezechilibrate*, Editura Universităţii “Lucian Blaga” din Sibiu, Sibiu, 2013

[P65] Popa, V.M. – *Aspecte comparative privind puntea de diode având o sarcină complexă,* Lucrările celei de A XIII-a Conferințe Naționale multidisciplinare – cu participare internațională – „Profesorul Dorin Pavel – fondatorul hidroenergeticii româneşti”, Sebeş, 7-8 iunie 2013; Volumul „Ştiință şi Inginerie” (vol. 23), ISSN 2067-7138, pag. 305-312

[P66] Postolache, P., Toader, C. – *Calitatea şi eficiența energiei electrice*, Editura AGIR, Bucureşti, 2007

[P67] Popescu, Lizeta – *Echipamente electrice*, Editura Alma Mater, Sibiu, 2008

[P68] Popa, I., Popa, G. N. – *Dispozitive electronice cu structură cablată şi programată de protecție a motoarelor asincrone trifazate de joasă tensiune*, Editura Mirton, Timişoara, 2000

[R23] Rancov, N. – *Aspects regarding experimental determination of thermal inertia at asynchronous motors operating in harmonics regime*, CIE 2009, Oradea

[V3] Vasilievici, A. – *Aparate şi echipamente electrice*, vol. I, vol. II, Editura MS, Sibiu, 1995, 1996

[W12] www.moeller.net

[W13] www.siemens.com

[W14] www.omron.com

[W15] www.littelfuse.com

[W16] www.fairchildsemi.com

[W17] www.futureelectronics.com

[W18] www.datasheetcatalog.com

[W19] www.schneider-electric.ro

[W20] www.ganzkk.ro