UNIVERSITATEA LUCIAN BLAGA DIN SIBIU

Școala doctorală de Științe inginerești și Matematică

Domeniul de doctorat: Matematică

REZUMAT TEZĂ DE DOCTORAT

OPERATORI LINIARI ȘI POZITIVI, INEGALITĂȚI, CLASE DE FUNCȚII CONVEXE

Doctorand:
Sergiu-Vlad PAȘCA

Conducător de doctorat:
Prof. univ. dr. Ana Maria ACU

SIBIU2024

Cuprins

Introducere

Teoria Aproximării este o teorie plurivalentă. Operatorii liniari pozitivi joacă un rol important în acest domeniu. Ei sunt folosiți pentru a obține rezultate calitative exprimate prin convergența funcțiilor de aproximare către o funcție prescrisă. Rata de convergență în acest proces este descrisă în termeni de inegalități specifice și implicând module de continuitate. Proprietățile funcțiilor aproximative pot fi utilizate pentru a obține rate mai bune de convergență. În acest sens, funcțiile convexe și funcțiile convexe generalizate pot fi aproximate cu o viteză mai mare dacă alegem clase potrivite de operatori liniari pozitivi.

Pe de altă parte, gradul de netezime al unei funcții influențează gradul de aproximare. În acest context, rezultatele de tip Voronovskaja joacă un rol semnificativ. Comportamentul unui operator liniar pozitiv L_n în raport cu polinoamele este important pentru calcularea momentelor și momentelor centrale, esențiale în stabilirea rezultatelor de tip Voronovskaja. Prin urmare, vectorii şi valorile proprii ale operatorului L_n oferă informații importante privind imaginile polinoamelor sub L_n. În special, nucleul lui L_n este un subiect important de studiu.

Pornind de la un șir dat de operatori liniari pozitivi, unele modificări ar putea avea proprietăți de aproximare mai bune sau proprietăți de păstrare a formei mai bune. În acest sens, modificările de tip Kantorovich sunt adesea utilizate. Iteratele operatorilor liniari pozitivi sunt importante atât în Teoria Aproximării, cât și în Teoria Ergodică. Convergența acestor iterate poate fi studiată în unele cazuri folosind rezultate și algoritmi din algebra liniară.

Operatorii liniari pozitivi clasici păstrează de obicei funcțiile afine. În ultimii ani, s-a acordat o atenție specială construcției de noi șiruri care păstrează una sau două funcții prescrise. Aceasta a extins familia de funcții care pot fi aproximate folosind operatori liniari pozitivi.

Prezenta teză se ocupă de subiecte legate de contextul de mai sus. Această Introducere este urmată de 4 capitole și o listă de referințe.

Capitolul 1, ”Rezultate de tip Voronovskaja pentru șiruri de operatori”, vizează două aspecte importante. În primul rând, prezentăm formule de tip Voronovskaja care pot fi ”diferențiate” (prin schimbarea ordinii limitelor și diferențierii) sau care sunt asociate cu operatori care fixează două funcții date. În al doilea rând, obținem rezultate noi privind unele șiruri speciale de operatori liniari pozitivi investigate anterior în literatură; în special, formula lor de tip Voronovskaja poate fi, de asemenea, ”diferențiată”. Polinoamele Appell sunt implicate în studiul momentelor acestor operatori.

Secțiunea 1.1 este dedicată ”diferențierii” unei formule de tip Voronovskaja. Rezultatul principal poate fi prezentat astfel: dacă formula de tip Voronovskaja pentru şirul $(L_n)_{n>1}$ poate fi ”diferențiată”, atunci formula asociată cu operatorii modificați în sensul [14] poate fi, de asemenea, ”diferențiată”.

În cadrul Secțiunii 1.2 discutăm despre operatorii care păstrează două monoame sau, mai general, două puteri ale unei bijecții date obținute prin modificarea celor clasici. În plus, proprietățile de aproximare sunt descrise în corelație cu operatorii lor de tip Voronovskaja. Concret, începem cu un șir clasic de operatori liniari pozitivi (Bernstein, Meyer-König și Zeller) și îi modificăm pentru a obține un nou șir de operatori care păstrează monoamele x_i și x_j. Pentru astfel de șiruri modificate stabilim formulele de tip Voronovskaja și comparăm magnitudinea operatorilor de tip Voronovskaja. Acest lucru oferă informații despre calitatea aproximării. Găsim intervale în care un șir de operatori oferă o aproximare mai bună decât alte șiruri.

Când un operator liniar pozitiv păstrează două funcții φ, ψ, un subiect de interes este să considerăm comportamentul său în raport cu funcțiile care sunt convexe relativ la $\{\varphi, \psi\}$ (vezi [14]). Studiul comportamentului lor în raport cu funcțiile convexe generalizate corespunzătoare ar putea fi un subiect de lucru ulterior. În acest sens, limita de tip Voronovskaja a unui șir de operatori oferă informații importante privind comportamentul operatorilor în raport cu clasele potrivite de funcții convexe.

În [75] și [20] autorii au introdus un șir de operatori liniari pozitivi L_n descriși în termeni de diferențe divizate sau, echivalent, în termeni diferiți. În Secțiunea 1.3 arătăm că acești operatori posedă proprietatea de comutativitate cu operatorul diferențial obișnuit; în consecință, sunt invarianti sub modificarea de tip Kantorovich. Oferim expresii explicite pentru imaginile funcțiilor exponențiale și trigonometrice sub L_n. În plus, arătăm că pentru fiecare n fixat, imaginile monoamelor sub L_n formează un șir de polinoame Appell. Acest lucru duce la unele identități algebrice implicând numerele Stirling de speța a doua. În plus, sunt menționate rezultate care arată că momentele centrale ale lui L_n sunt funcții constante pentru care oferim estimări.

Secțiunea finală a acestui capitol prezintă subiectul operatorilor de tip Rathore ($R_{n,c}$) introduși recent. În ceea ce privește acești operatori, oferim rezultate de tip Voronovskaja și o comparație cu operatorii extinși Szász-Mirakjan. Observând că condiția $f^{(3)} > 0$ exprimă o proprietate de convexitate generalizată, intenționăm să extindem rezultatul de tip menționat în Remarca 1.9 la alte clase de funcții convexe generalizate.

Capitolul 2 este intitulat "Operatori liniari pozitivi: vectori, valori proprii şi aplicații în ecuațiile cu diferențe". În acest capitol considerăm operatorii dați în Secțiunea 1.3, restricționați la $C(\mathbb{R})$. Secțiunea 2.1 este dedicată operatorilor L_n restricționați la polinoame. Pentru a descrie vectorii şi valorile proprii ale operatorilor, investigăm matricile lui $L_n : \Pi_{2k} \to \Pi_{2k}$, respectiv $L_n : \Pi_{2k+1} \to \Pi_{2k+1}$, în raport cu bazele monice. Nucleul operatorului L_n acționând pe $C(\mathbb{R})$ este subiectul studiului în Secțiunea 2.2. Acest nucleu este legat de setul de soluții ale unei ecuații cu diferențe. Pentru $T > 0$ și $p \in \Pi_m$, oferim trei algoritmi pentru a găsi $q \in \Pi_{m+1}$ astfel încât $q(x + T) - q(x) = p(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Algoritmii sunt utili în inversarea operatorului $L_n : \Pi \to \Pi$ și, în cele din urmă, în rezolvarea unor ecuații cu diferențe. Secțiunea 2.3 se ocupă de vectorii şi valorile proprii ale operatorilor de tip Beta din familia generală depinzând de parametrii $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Găsim valorile proprii în forme explicite și oferim relații de recurență pentru coeficienții polinoamelor proprii. Cazul limită când $\alpha > -1$, $\beta > -1$ a fost considerat în [39]. Unele rezultate din [39] sunt regăsite şi în rezultatele noastre din Secțiunea 2.3.

Capitolul 3 intenționează să prezinte exemple de operatori liniari pozitivi modificați, iterațiile lor și sisteme de ecuații liniare. Cazurile modificărilor de tip Kantorovich ale operatorilor de legătură și modificările de tip Stancu ale operatorilor Bernstein sunt aduse în discuție.

Secțiunea 3.1 se ocupă de modificările de tip Kantorovich ale operatorilor de legătură și prezintă studiul lor în raport cu limita iteratelor și măsura invariantă. În special, oferim o nouă demonstrație a [12, Teorema 5.1]. Un exemplu concret, unde măsura invariantă este măsura Lebesgue, este prezentat la sfârșitul secțiunii.

În Secțiunea 3.2 considerăm o familie de operatori Stancu, vezi [41], [40], și investigăm limita iteratelor unui astfel de operator. În găsirea limitei iteratelor, un pas esențial este soluția unui sistem de ecuații algebrice liniare.

Secțiunea 3.3 este dedicată unei modificări a șirului de operatori Bernstein B_n pe $C[0, 1]$, introduși de Schnabl [78] pentru a investiga saturația globală a șirului (B_n). Arătăm că aceștia pot fi obținuți ca un caz particular al operatorilor Stancu, și astfel rezultatele din Secțiunea 3.2 pot fi aplicate. Operatorii C_n introduși de Schnabl nu păstrează funcția constantă e_0. De fapt, $C_n e_0 = \frac{n-1}{n} e_0$. Prin urmare, formula de tip Voronovskaja pentru șirul C_n stabilită de Schnabl conține în partea dreaptă nu doar f' și f'', ci și funcția f (vezi (3.16)). Considerăm operatorii $A_n = \frac{n}{n-1} C_n$, $n \geq 2$. Formula de tip Voronovskaja pentru șirul A_n este mai simplă (vezi (3.17)). Secțiunea se încheie cu rezultatul privind rata de convergență a șirului A_n.

Așa cum am menționat mai sus, limita iteratelor este determinată prin rezolvarea unui sistem de ecuații liniare. În acest sens, un algoritm $A(p)$, $p \in \mathbb{R}$ este prezentat în Secțiunea 3.4. $A(1)$ coincide cu algoritmul EMML (algoritmul Expectation-Maximization (EM) pentru a calcula estimările de Maximum Likelihood (ML); același algoritm este folosit în contextul restaurării imaginilor astronomice). $A(-1)$ este o versiune a algoritmului de Reconstrucție a Spațiului de Imagine (ISRA). La sfârșitul secțiunii, algoritmul este ilustrat cu experimente numerice.

De obicei, în scopuri practice, un șir de operatori liniari pozitivi este convergent către operatorul identitate. Sub o modificare specifică, cu o nuanță probabilistică, un nou șir va converge către un operator diferit de cel identitate, vezi, de exemplu, [13, 28]. În Secțiunea 3.5 prezentăm rezultate de acest tip implicând o modificare a operatorilor Stancu $L_{n,\beta,\gamma}$.

Secțiunea 3.6 oferă o sugestie privind posibile lucrări ulterioare legate de subiectele de mai sus.

Capitolul 4 este intitulat "Operatori care fixează funcții exponențiale". În literatură se găsesc mai multe lucrări care tratează operatorii liniari pozitivi care fixează anumite funcții. Un punct de plecare a fost articolul scris în 2003 de P.J. King [53], care a construit operatori liniari pozitivi pe $C[0,1]$ care conservă funcția constantă 1 și funcția x^2. Operatorii liniari de tip Bernstein care păstrează 1 și o funcție dată τ cu proprietăți adecvate au fost introduși și studiați în [29]. Recent, au fost construiți operatori care fixează două funcții exponențiale. Aral, Cardenas-Morales, Garrancho [22] au considerat o generalizare a operatorilor clasici Bernstein introduși de Morigi și Neamțu în 2000. Specific, ei se concentrează pe un șir de operatori care reproduc funcțiile exponențiale $\exp(\mu t)$ și $\exp(2\mu t)$, $\mu > 0$. Alte lucrări dedicate operatorilor care fixează funcții specifice sunt [5], [11], [14], [22], [29], [36], [45].

Modificăm operatorii Bernstein-Stancu astfel încât noii operatori $\tilde{S}_n$ să păstreze funcțiile $\exp(ut)$ și $\exp(2ut)$, $\mu > 0$. Această proprietate este prezentată în Lema 4.2 ii) și iii). Un rezultat de tip Voronovskaja pentru noii operatori introduși poate fi găsit în Teorema 4.1. Clase speciale de funcții monotone generalizate și funcții convexe sunt considerate în acest capitol. Proprietățile de păstrare a formei ale operatorilor $\tilde{S}_n$ în raport cu aceste clase de funcții sunt descrise în Secțiunea 4.1. Secțiunea 4.2 este dedicată unei comparații între operatorii (S_n) și operatorii clasici Bernstein-Stancu. Pentru unele funcții, prezentăm ilustrări grafice care arată că operatorii $\tilde{S}_n$ oferă o aproximare mai bună.

Bibliografie

[1] U. Abel, M. Ivan, Asymptotic expansion of a sequence of divided differences with application to positive linear operators, J. Comput. Anal. Appl. 7(1) (2005), 89-101.

[2] U. Abel, M. Ivan, Asymptotic approximation with a sequence of positive linear operators, J. Comput. Anal. Appl. 3(4) (2001), 331-341.

[3] U. Abel, V. Gupta, The rate of convergence of a generalization of Post-Widder operators and Rathore operators, communicated, 2022.

[4] M Abramowitz, I Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York, 1964.

[5] T. Acar, A. Aral, D Cárdenas-Morales, P. Garrancho, Szász–Mirakyan type operators which fix exponentials, Results Math 72, 1393–1404, (2017).

[6] T. Acar, A. Aral, H. Gonska, On Szász–Mirakyan operators preserving e^{2ax}, $a > 0$, Mediterr. J. Math, 14, 6 (2017).

[7] T. Acar, A. Aral, I. Raşa, Modified Bernstein-Durrmeyer operators, General Mathematics, 22(1), 2014, 27-41.

[8] A.M. Acu, I. Buscu, I.Raşa, Generalized Kantorovich modifications of positive linear operators, Mathematical Foundations of Computing, 6 (2023), 54-62.

[9] A.M. Acu, M. Dancs, M. Heilmann, **S.V. Paşca**, I. Raşa, Voronovskaya type results for special sequences of operators, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas volume, 116(1), Article number: 19 (2022).

[10] A.M. Acu, M. Dancs, M. Heilmann, **S.V. Paşca**, I. Raşa, A Bernstein-Schnabl type operator: applications to difference equations, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 16(2), (2022), 495-507.

[11] A.M. Acu, V. Gupta, On Baskakov-Szasz-Mirakyan-type operators preserving exponential type functions, Positivity, 22(3):919-929, 2018.

[12] A. M. Acu, H. Heilmann, I. Rasa, Eigenstructure and iterates for uniquely ergodic Kantorovich modifications of operators II, Positivity, 25 (2021), 1585-1599.

[13] A. M. Acu, M. Heilmann, I. Rasa, A. Seserman, Poisson approximation to the binomial distribution: extensions to the convergence of positive operators. Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. 117, 162 (2023).

[14] A.M. Acu, A.I. Măduţă, I. Raşa, Voronovskaya type results and operators fixing two functions, Math. Model. Anal., 26(3) (2021), 395-410.

[15] A. M. Acu, I. Rasa and A. Seserman, Positive linear operators and exponential functions, Mathematical Foundations of Computing, 6 (2022), 1-7.

[16] A. M. Acu, I. Rasa, F. Sofonea, Composition of some positive linear integral operators, Demonstratio Mathematica, in press.

[17] A.M. Acu, I. Raşa, Iterates and invariant measures for Markov operators, Results Math 76, 218 (2021).

[18] J. M. Aldaz, O. Kounchev and H. Render. Shape preserving properties of generalized Bernstein operators on extended Chebyshev spaces. Numer. Math. 114(1) (2009), 1-25.

[19] J.M. Almira, A.J. Lopez-Moreno: On solutions of the Frechet functional equation, J. Math. Anal. Appl. 332 (2007), 119–133.

[20] F. Altomare, M. Campiti, Korovkin-type approximation theory and its applications, Series: De Gruyter Studies in Mathematics, 17, 1994.

[21] O. Agratini, Aproximare Prin Operatori Liniari, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2000.

[22] A. Aral, D. Cardenas-Morales, P. Garrancho, Bernstein-type operators that reproduce exponential functions, J. Math. Inequal., 12(3), (2018), 861–872.

[23] G. E. B. Archer, D. M. Titterington, The Iterative Image Space Reconstruction Algorithm (ISRA) as an Alternative to the EM Algorithm for Solving Positive Linear Inverse Problems, Statistica Sinica, 5, 77-96 (1995).

[24] S.N. Bernstein, Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités, Communications de la Société Mathematique de Kharkov, 13, 1913, 1-2.

[25] M. Bessenyei, Z. Pales, Hadamard-type inequalities for generalized convex functions, Math. Ineq. Appl. 6, 3 (2003) 379–392.

[26] I.C. Buşcu, G. Motronea, **S.V. Paşca**, Modified positive linear operators, iterates and systems of linear equations, Mathematical Foundations of Computing, 7(4), (2024), 568-577.

[27] I.C. Buşcu, **S.V. Paşca**, A. Seserman, On Rathore type operators, General Mathematics 30(2), (2022), 35-39

[28] J. de la Cal, F. Luquin, Approximation Szász and Gamma operators by Baskakov operators, J. Math. Anal. Appl., 184 (1994), 585-593.

[29] D. Cárdenas-Morales, P. Garrancho, I. Raşa, Bernstein-type operators which preserve polynomials, Computers and Mathematics with Applications 62, 2011, 158–163.

[30] E.W. Cheney, A. Sharma, Bernstein power series, Canadian Journal of Mathematics, 16 (1964), 241-252.

[31] A. Ciurte, S. Nedevschi, I. Rasa, A Generalization of the EMML and ISRA Algorithms for Solving Linear Systems, J. Comput. Anal. Appl., 12(2010), 799-816

[32] S. Cooper, S. Waldron, The eigenstructure of the Bernstein operator, J. Approx. Theory, 105(2000), 133-165.

[33] L. Coroianu, D. Costarelli, S. G. Gal, G. Vinti, Approximation by max-product sampling Kantorovich operators with generalized kernels, Anal. Appl., 19 (2021), 219-244.

[34] F.A. Costabile, E. Longo, A determinantal approach to Appell polynomials, J. Comput. Appl. Math. 234 (5) (2010), 1528-1542.

[35] Z. Ditzian, V. Totik, Moduli of Smoothness, Springer, New York, 1987.

[36] Z. Finta, Bernstein type operators having 1 and x^j as fixed points, Cent. Eur. J. Math. 11(12) (2013), 2257-2261.

[37] M.S. Floater, On the convergence of derivatives of Bernstein approximation, J. Approx. Theory 134 (1) (2005), 130-135.

[38] I. Gavrea, M. Ivan, A note on the fixed points of positive linear operators, J. Approx. Theory 227 (2018), 27-36.

[39] H. Gonska, M. Heilmann, I. Rașa, Eigenstructure of the genuine Beta operators of Lupaș and Muhlbach, Stud. Univ. Babeș-Bolyai Math. 61(2016), No.3, 383-388.

[40] H.H. Gonska, J. Meier, Quantitative theorems on approximation by Bernstein-Stancu operators, Calcolo 21 (1984), 317-335.

[41] H. Gonska, P. Piţul, I. Raşa, Over-iterates of Bernstein-Stancu operators, Calcolo, 44 (2007), 117-125.

[42] H. Gonska, I. Raşa, Asymptotic behaviour of differentiated Bernstein polynomials, Mat. Vesnik 61 (1) (2009), 53–60.

[43] H. Gonska, I Raşa, E.-D. Stănilă, Beta Operators with Jacobi Weights, Constructive theory of functions, Sozopol 2013 (K. Ivanov, G. Nikolov and R. Uluchev, Eds.), pp. 101-114, Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2014.

[44] V. Gupta, A form of Gamma operator due to Rathore, Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. 117, 81, 2023.

[45] V. Gupta, A.-J Lopez-Moreno, Phillips operators preserving arbitrary exponential functions, e^{at}, e^{bt}, Filomat, 32(14), (2018), 5071-5082.

[46] V. Gupta, M. Th. Rassias, Moments of Linear Positive Operators and Approximation, Springer Briefs in Mathematics Series, Springer Nature, Switzerland, 2019.

[47] V. Gupta, G. Tachev, Approximation with Positive Linear Operators and Linear Combinations, Springer, 2017.

[48] M. Heilmann, Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit bei der Approximation von Funktionen mit Hilfe von Linearkombinationen spezieller positiver linearer Operatoren, Habilitationsschrift, Universität Dortmund, 1992.

[49] M. Heilmann, I. Raşa, C_0-semigroups associated with uniquely ergodic Kantorovich modifications of operators, Positivity (2018) 22:829-835.

[50] M. Heilmann, I. Raşa, A Nice Representation for a Link between Bernstein-Durrmeyer and Kantorovich Operators, Commun. Comput. Inf. Sci., 655. Springer, Singapore, 2017.

[51] M. Heilmann, I. Raşa, Eigenstructure and iterates for uniquely ergodic Kantorovich modifications of operators, Positivity (2017) 21:897-910.

[52] M. Ivan, I. Raşa, A Voronovskaya-type theorem, Anal Numér Théor Approx. 30(1) (2001), 47–54.

[53] P. J. King, Positive linear operators which preserve x^2, Acta Math. Hungar. 99 (2003), 203–208.

[54] M. Koecher, Klassische Elementare Analysis, Birkhauser Verlag, 1987.

[55] M. Kuczma, Functional Equations in a Single Variable, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1968.

[56] A. Kumar, A new variant of the modified Bernstein-Kantorovich operators defined by Özarslan and Duman, Mathematical Foundations of Computing, 6 (2023), 1-23.

[57] A. J. López-Moreno, J. Martínez-Moreno, F. J. Muñoz-Delgado, Asymptotic expression of derivatives of Bernstein type operators, Rend. Circ. Mat. Palermo Ser. II 68 (2002), 615–624.

[58] A. Lupaş, Die Folge der Beta-Operatoren, Dissertation Universität Stuttgart, 1972.

[59] A. Lupaş, L. Lupaş, Polynomials of binomial type and approximation operators, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 32 (4) (1987), 61–69.

[60] D. Mache, D.X. Zhou, Characterization theorems for the approximation by a family of operators, J Approx Theory 84, (1996), 145-161.

[61] G.J. McLachlan and Th. Krishnan, The EM Algorithm and Extensions, Wiley, 2008.

[62] W. Meyer-König, K. Zeller, Bernsteinsche Potenzreihen, Studia Math 19 (1960), 89-94.

[63] G. M. Mirakjan, Approximation of continuous functions with the aid of polynomials, (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR, 31, 1941, 201-205.

[64] P. Montel, Sur des équations fonctionnelles caracterisant les polynomes, C. R. Acad. Sci., Paris 226 (1948) 1053–1055.

[65] G. Mühlbach, Rekursionsformeln für die zentralen Momente der [illegible] der Beta-Verteilung, Metrika 19 (1972), 171–177.

[66] G. Mühlbach, Verallgemeinerungen der Bernstein- und der Lagrangepolynome, Bemerkungen zu einer Klasse linearer Polynomoperatoren von D.D. Stancu, Rev. Roumaine Math. Pure Appl. 15 (1970), 1235–1252.

[67] **S.V. Paşca**, The modified Bernstein-Stancu operators, General Mathematics 29(1), (2021), 121-128.

[68] **S.V. Paşca**, The eigenstructure of Beta operators with Jacobi weights, submitted.

[69] **S.V. Paşca**, A. Seserman, A. Şteopoaie, Iterates of positive linear operators and linear systems of equations, Dolomites Research Notes on Approximation, 17(2), (2024), 52-58.

[70] J.E. Pecaric, I. Raşa, A linear operator preserving k-convex functions, Bul. St. IPCN, 33 (1990), 23–26.

[71] A. R. De Pierro, On the Convergence of the Iterative Image Space Reconstruction Algorithm for Volume ECT, IEEE Trans. Med. Imaging, 6, 174-175 (1987).

[72] A. R. De Pierro, On the Relation Between the ISRA and the EM Algorithm for Positron Emission Tomography, IEEE Trans. Med. Imaging, 12, 328-333 (1993).

[73] D. Popa, I. Raşa, The Frechet functional equation with application to the stability of certain operators, J. Approx. Theory 164 (2012) 138–144.

[74] T. Popoviciu, Introduction á la théorie des différences divisées, Bull. Math. Soc. Roumaine Sci. 42(1) (1940), 65–78.

[75] I. Raşa, Korovkin approximation and parabolic functions, Conf. Sem. Mat. Univ. Bari. 236, 1991.

[76] R. K. S. Rathore, Linear combinations of linear positive operators and generating relations on special functions, Ph. D. Thesis, Delhi, 1973.

[77] J. Riordan, An Introduction to Combinatorial Analysis, Princeton, New Jersey, 1978.

[78] R. Schnabl, Zum globalen Saturationsproblem der Folge der Bernsteinoperatoren, Acta Sci. Math. 31(3-4) (1970), 351-358.

[79] P. C. Sikkema, On some linear positive operators, Indag. Math., vol. 32, 1970, 327-337.

[80] F. Sofonea, On a sequence of linear and positive operators, General Mathematics, vol. 16, no. 4, 2008, 155-165.

[81] D.D. Stancu, Approximation of functions by means of some new classes of positive linear operators, in: Numerische Methoden der Approximations-Theorie, Bd. 1, Proc. Conf. Math. Res. Inst. Oberwolfach 1971; Collatz L., Mainardus G. (1972), Birkhauser, Basel, 187–203.

[82] O. Szász, Generalization of S. Bernsteinş polynomials to the infinite interval, J. Res. Nat. Bur. Standards, vol. 45, 1950, 239-245.

[83] D. M. Titterington, On the Iterative Image Space Reconstruction Algorithm for ECT, IEEE Trans. Med. Imaging, 6, 52-56 (1987).

[84] M. Velez-Reyes, A. Puetz, P. Hoke, R. B. Lockwood, S. Rosario, Iterative Algoritms for Unmixing of Hyperspectral Imagery, in Algorithms and Technologies for Multispectral, Hyperspectral and Ultraspectral Imagery IX (S. S. Shen and P. E. Lewis, eds.), Proc. SPIE 5093, Bellingham , WA, 2003, pp. 418-429.